MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 10, N° 2, 1981, pp. 179—185

APPROXIMATION DES FONCTIONS PÉRIODIQUES DE RÉGULARITÉ VARIABLE

par

PIERRE GOETGHELUCK

(Paris)

1. Introduction

Pour tout intervalle ouvert I, pour $p \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in [0,1]$, on désignera par $C^{p,\alpha}(I)$ l'ensemble des fonctions f d'une variable réelle, périodiques, de période 2π, possédant une dérivée $f^{(p)}$ bornée sur I si $\alpha = 0$, lipschitzienne d'ordre α si $\alpha \neq 0$. Si $I = \mathbf{R}$ on écrira $C^{p,\alpha} = C^{p,\alpha}(\mathbf{R})$. On notera H_n l'espace des polynômes trigonométriques de période 2π et d'ordre au plus n.

Le théorème de Jackson (voir par exemple [3, p. 89]) montre que si $f \in C^{p,\alpha}$, il existe une constante C_1 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on puisse trouver $P \in H_n$ vérifiant $\sup_x |f(x) - P(x)| \leqslant C_1 n^{-p-\alpha}$.

Soit $f \in C^{p,\alpha}$ et $]a_i, b_i[$ tel que $-\pi < a_i < b_i < \pi$ pour $i = 1, 2, \ldots, s$; supposons de plus que pour tout i, $f \in C^{q_i, \beta_i}(]a_i\, b_i[)$ avec $q_i + \beta_i > p + \alpha$ (nous dirons que f est plus régulière sur les intervalles $]a_i, b_i[$). Soit $K = [-\pi, +\pi]$

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant:

THEOREME 1. *Pour* $i = 1, 2, \ldots, s$, *soit* $[c_i, d_i] \subset\,]a_i, b_i[$. *Alors il existe deux constantes* C_2 *et* C_3 *telles que pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$ *on puisse trouver* $P \in H_n$ *vérifiant :*

$$|f(x) - P(x)| \leqslant C_2 n^{-p-\alpha} \qquad x \in K$$

$$|f(x) - P(x)| \leqslant C_3 n^{-q_i-\beta_i} \qquad x \in [c_i, d_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Aprés avoir établi ce théorème nous traiterons plus précisément un cas particulier qui nous permettra de donner une application.

2. Demonstration du theoreme 1

2.1. *Rappels et notations*

On pose $\Delta_t^k f(x) = \sum_0^k (-1)^{k-1} \binom{k}{j} (x + jt)$.

Si $f^{(k)}$ existe, on a [2, p. 47] :

(1) $$\Delta_t^k f(x) = \int_0^t \cdots \int_0^t f^{(k)}(x + y_1 + \ldots + y_k) dy_1 \ldots dy_k$$

Nous noterons $\omega_k(f, h) = \operatorname*{Max}_{\substack{x,t \\ |t| \leqslant h}} |\Delta_t^h f(x)|$. On a donc

(2) $$|\Delta_t^k f(x)| \leqslant \omega_k(f, |t|).$$

Rappelons que pour $m < k$ ([4, p. 104])

(3) $$\omega_k(f, |t|) \leqslant 2^{k-m} \omega_m(f, |t|)$$

et que si $f^{(k)}$ est continue ([2, p. 47])

(4) $$\omega_k(f, |t|) \leqslant |t|^m \omega_{k-m}(f^{(m)}, |t|).$$

Soit $q = \operatorname*{Max}_i q_i$ et soit r le plus petit entier vérifiant $r \geqslant \frac{1}{2}(q + 4)$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Nous poserons $K_{n,r}(t) = C_{n,r} \left(\frac{\sin n't/2}{\sin t/2}\right)^{2r}$ avec $n' = [n/r] + 1$ et la constante $C_{n,r}$ étant choisie telle que $\int_K K_{n,r}(t)dt = 1$. On a ([2, p. 57)] :

(5) $$\int_K K_{n,r}(t)|t|^\gamma dt^\gamma \leqslant C\, n^{-\gamma} \text{ pour } \gamma \in [0, 2r - 2].$$

(6) Notons $P(f, x) = \int_K K_{n,r}(t)[\Delta_t^{q+1} f(x) + (-1)^q f(x)]dt$

alors, $P \in H_n$ ([2, pp. 57—58]) et

(7) $$|f(x) - P(f,x)| = \left|\int_K K_{n,r}(t) \Delta_t^{q+1} f(x) dt\right|$$

2.2. *Demonstration du theoreme*

Nous allons montrer que le polynôme P défini par (6) convient. Pour tout x, d'après (2), (3) et (4),

$$|\Delta_t^{q+1} f(x)| \leqslant \omega_{q+1}(f, |t|) \geqslant 2^{q-p} \omega_{p+1}(f, |t|) \leqslant 2^{q-p}|t|^p \omega_1(f, |t|) \leqslant C_5 |t|^{p+\alpha}$$

donc d'après (5) et (7) :

$$|f(x) - P(f, x)| \leqslant C_2 n^{-p-\alpha}.$$

Si de plus $x \in [c_i, d_i]$ posons $l_i = (2q + 1)^{-1} \operatorname{Min}(c_i - a_i, b_i - d_i)$ et $l = \inf_i l_i$. Pour $|t| \leqslant l$ on a :

$$\Delta_t^{q+1} f(x) = \Delta_t^{q_i}(\Delta_t^{q-q_i+1} f)(x)$$

$$= \int_0^t \cdots \int_0^t \Delta_t^{q-q_i}[f^{(q_i)}(x + t + y_1 + \ldots + y_{q_i}) -$$

$$- f^{(q_i)}(x + y_1 + \ldots + y_{q_i})] dy_1 \ldots dy_{q_i}$$

mais d'après l'hypothèse sur f,

$$|\Delta_t^{q-q_i}[f^{(q_i)}(x + t + y_1 + \ldots + y_{q_i}) - f^{(q_i)}(x + y_1 + \ldots + y_{q_i})]| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{q-q_i}|t|^{\beta_i} \text{ donc } |\Delta_t^{q+1} f(x)| \leqslant C_6 |t|^{q_i+\beta_i}.$$

Si $|t| < l$, comme f est bornée :

$$|\Delta_t^{q+1} f(x)| \leqslant C_7 \leqslant C_7 l^{-q_i-\beta_i} |t|^{q_i+\beta_i}$$

donc quel que soit t, $|\Delta_t^{q+1} f(x)| \leqslant C_8 |t|^{q_i+\beta_i}$

et d'après (5) et (7) : $|f(x) - P(f, x)| \leqslant C_{3,i} n^{-q_i-\beta_i}$.

On posera alors $C_3 = \operatorname*{Max}_i C_{3,i}$.

3. Etude d'un cas particulier

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier l'approximation des fonctions périodiques ayant au voisinage de l'origine un comportement du type $|x|^\gamma$ et plus régulières pour $x \neq 2k\pi$ par exemple $x \mapsto |\sin(x/2)|^\gamma$. Les hypothèses seront les suivantes : soit f une fonction périodique, de période 2π, telle que

* pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$, $f \in C^{p,\alpha}(]\varepsilon, 2\pi - \varepsilon[)$.
* pour $x \in]-1, +1[$, $f(x) = |x|^\gamma g(x)$ avec $0 \leqslant \gamma < p + \alpha$ et $g \in C^{p,\alpha}(]-1, +1[)$.

THEOREME 2. *Pour une telle fonction f on peut trouver une constante C_9 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe $P_n \in H_n$ vérifiant :*

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C_9 \inf [n^{-\gamma}, n^{-p-\alpha}(1 + |x|^{\gamma-p-\alpha})] \quad (x \in K).$$

LEMME 1. *La fonction u définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $u(x) = |x|^\gamma$ *vérifie: Pour tout entier k non nul vérifiant* $k \geq 1$ *il existe une constante* $C_{10} = C_{10}^{(k)}$ *telle que* $|\Delta_t^k u(x)| \leq C_{10}|x|^{\gamma-k}|t|^k \quad (x \neq 0)$.

Demonstration. Soit v la fonction définie par $v(y) = |1+y|^\gamma$. Si k est un entier non nul $\geq \gamma$, pour $|z| \leq (2k)^{-1}$, v est indéfiniment dérivable et

$$\Delta_z^k v(0) = \int_0^z \dots \int_0^z v^{(k)}(y_1 + \dots + y_k)dy_1 \dots dy_k.$$

Il en résulte que

$$|\Delta_z^k v(0)| \leq |\gamma(\gamma-1)\dots(\gamma-k+1)2^{k-\gamma}|z|^k.$$

Si $|z| > (2k)^{-1}$ on a:

$$|\Delta_z^k v(0)| \leq 2^k(1+k|z|)^\gamma \leq 2^k(1+k|z|)^k \leq (6k)^k|z|^k.$$

Donc pour tout z: $|\Delta_z^k v(0)| \leq C_{10}|z|^k$.

Il suffit alors de remarquer que pour $x \neq 0$

$$|\Delta_t^k u(x)| = |x|^\gamma|\Delta_{t/x}^k v(0)| \leq C_{10}|x|^{\gamma-k}|t|^k.$$

Démonstration du théorème 2

Soit k un entier non nul vérifiant $k \geq p + \alpha$. On peut trouver une fonction h périodique de période 2π telle que:

$$h(x) = |x|^\gamma \text{ pour } |x| \leq 2$$

$$h^{(k)} \text{ existe et est bornée pour } 1 \leq |x| \leq 2\pi - 1$$

$$h(x) \neq 0 \text{ si } 2 \leq |x| \leq \pi.$$

On peut donc écrire d'aprés les hypothèses faites sur f: $f(x) = h(x)\cdot m(x)$ avec $m \in C^{p,\alpha}$. Il existe une constante C_{11} telle que pour tout n on puisse trouver $Q_n \in H_n$ vérifiant ([3, p. 89])

$$|m(x) - Q_n(x)| \leq C_{11}n^{-p-\alpha}.$$

Admettons pour un instant le résultat suivant:

LEMME 2. *Il existe une constante* C_{12} *telle que pour tout n on puisse trouver* $R_n \in H_n$ *vérifiant:*

$$|h(x) - R_n(x)| \leq C_{12}n^{-\gamma} \inf\,[1, (n|x|)^{\gamma-k}] \quad (x \in K).$$

Le théorème en résulte alors facilement en écrivant:

$$|f(x) - Q_n(x)R_n(x)| \leq h(x)|m(x) - Q_n(x)| + |Q_n(x)||h(x) - R_n(x)|.$$

Demonstration du lemme 2

Nous avons pour $|x| \leq 3/2$, $|t| \leq (2k)^{-1}$ et $j \leq k$

$|x| + j|t| \leq 2$ donc $h(x+jt) = |x+jt|^\gamma$ et d'après le lemme 1

$$|\Delta_t^k h(x)| \leq C_{10}|x|^{\gamma-k}|t|^k.$$

Si $x \in K$, $|x| \geq 3/2$ et $|t| \leq (2k)^{-1}$ alors $|x+jt| \in [1,2]$ pour $j \leq k$ donc d'après (1), l'hypothèse sur $h^{(k)}$ et comme $|x| \leq \pi$:

$$|\Delta_t^k h(x)| \leq C_{13}|t|^k \leq C_{14}|t|^k|x|^{\gamma-k}.$$

Si $|t| \geq (2k)^{-1}$

$$|\Delta_t^k h(x)| \leq 2^k \sup|h(x)| = C_{15} \leq C_{15}(2k|t|)^k(\pi|x|^{-1})^{k-\gamma} = C_{16}|t|^k|x|^{\gamma-k}.$$

Donc pour tout $x \in K$ et $t \in K$,

(8) $$|\Delta_t^k h(x)| \leq C_{17}|t|^k|x|^{\gamma-k}$$

et l'on a aussi d'après (2) et (3)

(9) $$|\Delta_t^k h(x)| \leq \omega_k(h, |t|) \leq 2^{k-1}\omega_1(h, |t|) \leq 2^{k-1}|t|^\gamma.$$

Le polynôme $R_n(x) = P(h, x)$ défini par (6), en remplaçant $q+1$ par k et avec $r \geq \frac{1}{2}(k+3)$, vérifiera d'après (5), (7), (8) et (9)

$$|h(x) - P_n(x)| = \left|\int_K K_{n,r}(t)\Delta_t^k h(x)dt\right| \leq C_{18}n^{-\gamma}$$

$$\text{et aussi} \quad \leq C_{19}n^{-k}|x|^{\gamma-k}.$$

4. Une application

Pour toute fonction f mesurable, périodique de période 2π on note pour $p \geq 1$ $||f||_p = \left[\int_K |f(x)|^p dx\right]^{1/p}$;

$$||f||_\infty = \sup \text{ess}\, |f(x)|\,;\ E_{n,p}(f) = \inf_{P \in H_n} ||f - P||_p\,;$$

et pour $\alpha > 0$, $E_{n,p}^\alpha(f) = \inf\limits_{P \in H_n} ||(f(x) - P(x))|x|^\alpha||_p$

PROPOSITION 1. *Soit* $q > \alpha$. *Si* $(n^q E_{n,p}^\alpha(f))_{n \in \mathbf{N}}$ *est une suite bornée, alors* $(n^{q-\alpha}E_{n,p}(f))_{n \in \mathbf{N}}$ *est une suite bornée.*

Demonstration. Soit $P_n \in H_n$ tel que $\|(f(x) - P_n(x))\,|x|^\alpha\|_p = E^\alpha_{n,p}(f)$

$$\|f - P_n\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|P_{2^k n} - P_{2^{k-1}n}\|_p$$

et en utilisant le résultat du théorème de [1]:

$$\|f - P_n\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|(P_{2^k n} - P_{2^{k-1}n})|x|^\alpha\|_p (2^k\ n)^\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha} n^\alpha 2 E^\alpha_{2^{k-1}n,p}$$

donc d'après l'hypothèse de la proposition:

$$\|f - P_n\|_p \leqslant C_{20} n^{\alpha-q} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha} (2^{k-1})^{-q} \leqslant C_{21} n^{\alpha-q}$$

d'où le résultat puisque $E_{n,p}(f) \leqslant \|f - P_n\|_p$.

Nous allons maintenant montrer que ce résultat est optimal.

PROPOSITION 2. Soit $p \geqslant 1$ et $\alpha > 0$. *On peut trouver une fonction h et $q > \alpha$ tels que $(n^q E^\alpha_{n,p}(h))_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite bornée et que $(n^{q-\beta} E_{n,p}(h))_{n\in\mathbf{N}}$ ne soit pas bornée pour $\beta < \alpha$.*

Demonstration. Soit $\gamma = 1 - 1/p$ ($\gamma = 1$ si $p = +\infty$) et k un entier vérifiant $k > \alpha + 1$; on aura donc en particulier $k > \gamma$. Soit h la fonction du lemme 2; nous allons montrer qu'elle peut servir de contre-exemple.

D'après le lemme 2

$$E^\alpha_{n,p}(h) \leqslant \|(h - R_n)|x|^\alpha\|_p \leqslant$$

$$\leqslant C_{22} n^{-\gamma} \Bigg[\int\limits_{|x|\leqslant 1/n} |x|^{\alpha p} dx + \int\limits_{|x|>1/n} n^{(\gamma-k)p} |x|^{(\gamma+\alpha-k)p} dx \Bigg]^{1/p} \leqslant C_{23} n^{-\gamma-\alpha-1/p} = C_{23} n^{-\alpha-1}$$

donc $(n^{\alpha+1} E^\alpha_{n,p}(h))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Supposons que $n^{\alpha+1-\beta} E_{n,p}(h) = 0(1)$ avec $\beta < \alpha$. On aurait $\alpha + 1 - \beta > 1$, alors d'après [4, p. 339] h posséderait presque partout une dérivée dans L^p vérifiant dans le cas où $p = +\infty$

$$(10) \qquad \omega_1(h', t) = \begin{cases} 0(t^{\alpha-\beta}) & \text{si} \quad \alpha - \beta < 1 \\ 0(t \log t) & \text{si} \quad \alpha - \beta = 1 \\ 0(t) & \text{si} \quad \alpha - \beta > 1 \end{cases}$$

Or si p est fini $\gamma = 1 - 1/p$ et h' existe presque partout mais n'est pas dans L^p et si $p = +\infty$, $\gamma = 1$ et au voisinage de l'origine $h'(x) = \operatorname{sgn} x$ donc ne peut satisfaire (10).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Goetgheluck, P., *Inégalité de Bernstein dans les espaces L^p avec poids*, J. Approximation Theory, **23**, 359–365, (1980).

[2] Lorentz, G. G., „*Approximation of functions*", Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[3] Natanson, I. P., „*Constructive function theory*", volume 1, Ungar, New York, 1964.

[4] Timan, A. F., „*Theory of approximation of functions of a real variable*, Pergamon Press, 1963.

Reçu le 10.VI.1981.

Université de Paris —
Sud Centre d'Orsay,
Dep de Math. Bâtiment **425, 91405**
Orsay Cedex France