MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 10, N° 2, 1981, pp. 187—189

SUR UNE SUITE D'OPÉRATEURS D'INTERPOLATION ET D'APPROXIMATION

par

MIRCEA IVAN et IOAN GAVREA

(Cluj-Napoca)

Dans ce travail nous présentons un procédé d'approximation et d'interpolation dans un espace linéaire normé X, et l'application de ce procédé à l'approximation et à l'interpolation des fonctions réeles.

Considérons :

U, un opérateur linéaire défini sur X aux valeurs en X, continu ;

I, l'opérateur unité de $X(I(f) = f, \forall f \in X)$;

$(B_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite d'opérateurs qui converge vers I.

DEFINITION 1. *L'opérateur U est dit opérateur d'interpolation par rapport au sous-espace S si les conditions suivantes sont remplies :*

$$U \cdot f \in S, \quad \forall f \in X; \tag{1}$$

$$U \cdot U = U. \ [3] \tag{2}$$

DÉFINITION 2. *L'opérateur U est dit opérateur d'interpolation du type Gonciarov relatif aux fonctionnelles linéaires $A_0, A_1, \ldots, A_m$ définies sur X si les conditions suivantes sont remplies :*

$$A_k \cdot U = A_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Construisons la suite d'opérateurs :

$$P_n = B_n - U(B_n - I), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

THÉORÈME 1. *Si l'opérateur U vérifie les relations* (2) *et* (3), *alors les opérateurs P_n, $n = 1, 2, \ldots$ sont simultanément des opérateurs d'approximation et d'interpolation du type Gonciarov relatifs aux fonctionnelles A_0, $A_1, \ldots, A_m$.*

Démonstration. Les égalités (4) impliquent les relations :

(5) $$\|P_n - I\| = \|B_n - I - U(B_n - I)\| \leqslant (1 + \|U\|)\, \|B_n - I\|,\quad n = 1, 2, \ldots$$

Vu que la suite $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers I, les relations (5) prouvent la propriété d'approximation de la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$.

Les égalités (2) et (4) impliquent les relations :

(6) $$U \cdot P_n = U \cdot B_n - U \cdot U \cdot B_n + U \cdot I = U,\ n = 1, 2, \ldots$$

En vertu des égalités (3) les relations (6) impliquent les relations :

(7) $$A_k \cdot P_n = A_k \cdot U \cdot P_n = A_k \cdot U = A_k,\quad k = 0, 1, \ldots, m\quad n = 0, 1, \ldots$$

ce qui prouve la propriété interpolatoire du type Gonciarov de la suite $(P_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ainsi le théorème est complètement démontré. La méthode presentée antérieurement nous permet de construire une suite d'opérateurs d'approximation et d'interpolation en utilisant l'opérateur de Bernstein et celui d'Hermite.

Considérons les points $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leqslant 1$ et soit f une fonction qui possède une dérivée ordre p, continue sur le segment [0,1]. Désignons par $B_n f$ le polynôme de Bernstein :

$$B_n f = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$$

et par $H = H(h_0, h_1, \ldots, h_{p+1})$ le polynôme d'Hermite qui vérifie les égalités :

(8) $$H^{(i)}(x_k) = h_i(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, p + 1$$

où les fonctions h_i sont définies à l'aide des formules :

(9) $$h_0(x) = \int_0^x (B_n f(t) - f(t))dt,$$
$$h_1(x) = B_n f(x) - f(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$h_{p+1}(x) = B_n^{(p+1)} f(x) - f(x),\qquad x \in [0,1].$$

THÉORÈME 2. *La suite* $P_n f = Bf - H'$, $n = 1, 2, \ldots$ *possède les propriétés :*

(10) $$P_n^{(i)} f(x) = f^{(i)}(x_k);$$

(11) $$\int_0^{x_k} P_n f(x)dx = \int_0^{x_k} f(x)dx;$$

(12) $P_n^{(i)}$ *converge uniformément vers* $f^{(i)}$ *sur le segment* [0, 1], *propriétés valables pour* $n = 0, 1, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, p$.

Démonstration. En vertu des relations (8) et (9) on arrive aux égalités :

$$P_n^{(i)} f(x_k) = B_n^{(i)} f(x_k) - (B_n^{(i)} f(x_k) - f^{(i)}(x_k)) = f^{(i)}(x_k),$$

$i = 0, 1, \ldots p;\ k = 0, 1, \ldots, m;\ n = 0, 1, \ldots$ ce qui prouve les relations (10).

Vu que $h_0(0) = 0$ il en résulte $H(0) = 0$. Par conséquent on obtient les relations :

$$\int_0^{x_k} P_n f(x)dx = \int_0^{x_k} B_n f(x)dx - H(x_k) = \int_0^{x_k} f(x)dx,\ k = 0, 1, \ldots, m;$$

$n = 1, 2, \ldots$ ce qui prouve la propriété (11).

On voit que h_i, $i = 0, 1, \ldots, p + 1$ convergent uniformément vers zéro, grâce au fait bien connu que, $B_n^{(i)} f$ converge uniformément vers $f^{(i)}$ sur le segment [0,1]. Par conséquent le polynôme H et toutes ses dérivées convergent uniformément vers zéro, ce qui prouve la propriété (12).

Remarquons que la propriété (12) montre que, pour n suffisamment grand, les polynômes P_n conservent les propriétés de convexité de la fonction f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Darell, J. J., *SAIN Approximation in C* [*a*, *b*], J. Approximation Theory **17,** 14–34, (1976).

[2] Ivan, M., *Opérateurs d'interpolation dans des espaces abstraits,* Mathematica, Cluj-Napoca, **4,** (1), 19–28 (1975).

[3] Popoviciu, Elena., *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării,* Ed. Dacia, Cluj 1972.

[4] Wolibner W., *Sur un polynôme d'interpolation,* Colloq. Math. 136–137 (1951).

Reçu le 5.III.1981.

Institutul Politehnic
Catedra de matematică
Cluj-Napoca