MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N° 1–2, 1982, pp. 81–87

SUR UN THÉORÈME DE W. WOLIBNER

par
MIRCEA IVAN
(Cluj-Napoca)

Dans ce travail nous présentons quelques résultats concernant un théorème de W. WOLIBNER sur l'interpolation par polynômes, présenté à la Société Polonaise de Mathématique de Wroclaw en 1949 et publié dans [5] en 1951.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des points distincts du segment $[a, b]$ et soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nombres réels tels que

$$y_{i-1} \neq y_i$$

$i = 2, 3, \ldots, m$.

THÉORÈME 1. (Wolibner) *Il existe un polynôme P tel que:*

(1.1) $P(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$;

(1.2) *P est monotone sur chaque segment* $[x_{i-1}, x_i],\ i = 2, 3, \ldots, m$.

Sans connaître le travail de W. Wolibner, S. YOUNG a publié en 1967 le même résultat [7].

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Posons $||f|| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

Dans [2] F. DEUTSCH et P.D. MORRIS remarquent que le théorème de W. Wolibner conduit au résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme P tel que:*

(2.1) $P(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, m$;

(2.2) $||f - P|| < \varepsilon$;

(2.3) $||f|| = ||P||$.

Soit $\mathfrak{L}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n. En utilisant le théorème de W. Wolibner on a énoncé le résultat :

THÉORÈME 3. (S. Paszkovski, [4]) *Il existe un entier positif n_0 tel que pour n'importe quelle function f continue sur le segment $[a, b]$ et pour tout $n \geqslant n_0$ il existe un polynôme $P \in \mathfrak{L}_n$ tel que :*

(3.1) $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

(3.2) $\| f - P \| \leqslant 2 \inf\limits_{Q \in \mathfrak{L}_n} \| f - Q \|$.

Soit X un espace normé, Y un ensemble convexe partout dense dans X, $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*$ fonctionnelles linéaires continues sur X.

Hidehiko Yamabe a publié en 1950 une généralisation du théorème de W. Wolibner :

THÉORÈME 4. (H. Yamabe, [6]) *Quel que soit $x \in X$ et pour tout $\varepsilon < 0$ il existe $y \in Y$ tel que :*

(4.1) $x_i^*(x) = x_i^*(y)$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

(4.2) $\| x - y \| < \varepsilon$.

Soient $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite croissante de sous-espaces fermés de X dont la réunion est partout dense dans X.

THÉORÈME 5. (D.J. Johnson, [3]) *Il existe une constante C et un entier positif n_0, tels que pour tout $x \in X$ et quelque soit $n \geqslant n_0$ il y a $v_n \in V_n$ tel que :*

(5.1) $x_i^*(v) = x_i^*(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

(5.2) $\| x - v_n \| \leqslant C \inf\limits_{v \in V_n} \| x - v \|$.

Nous remarquons qu'il n'est pas difficile de démontrer l'existence d'une constante C, mais il est difficile de trouver la borne inférieure des constantes C qui vérifient la relation (5.2).

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_m$ points distincts du compact Hausdorff T et soit $C(T)$ l'espace des fonctions réelles continues sur T.

Désignons par $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de $C(T)$ dont la réunion est partout dense en $C(T)$. Soit $f \in C(T)$ et posons

$$A = \{g/g \in C(T),\ g(t_i) = f(t_i),\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

THÉORÈME 6. (R.K. Beatson, [1]) *Il existe un entier positif n_0 et une suite de nombres positifs $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$, telle que pour toute fonction $f \in C(T)$ la relation*

$$\inf_{g \in A \cap V_n} \| f - g \| \leqslant (2 + \delta_n) \cdot \inf_{v \in V_n} \| f - v \|$$

soit remplie pour $n \geqslant n_0$.

Dans la suite de ce travail nous construirons deux opérateurs d'approximation et d'interpolation.

LEMME. *Il existe un entier positif n_0 et il existe les polynômes positifs $P_1, P_2, \ldots, P_m$ de degré n_0 tels que :*

(a) $P_k(x_i) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, 2, \ldots, m$;

(b) $\sum\limits_{k=1}^{m} P_k(x) \leqslant 1$, $x \in [a, b]$.

D é m o n s t r a t i o n. Pour simplifier la démonstration supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_m \in (0, 1)$.

Posons

$$l(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m),$$

$$l_k(x) = \frac{l(x)}{(x - x_k) l'(x_k)},$$

$$g_k(x) = l_k^2(x)(1 - (x - x_k) l_k'(x_k))^2,$$

$k = 1, 2, \ldots, m$, $x \in [0, 1]$.

Les polynômes g_k vérifient les relations :

$$g_k(x) \geqslant 0, \qquad x \in [0, 1],$$
$$g_k(x_i) = \delta_{ik}$$
$$g_k'(x_i) = 0$$

$i, k = 1, 2, \ldots, m$.

Il existe donc les polynômes R_{ki}, S_{ki} qui vérifient les relations :

$$g_k'(x) = (x - x_i)\, R_{ki}(x)$$

pour $i, k = 1, 2, \ldots, m$ et

$$g_k(x) = (x - x_i)^2\ S_{ki}(x)$$

pour $i, k = 1, 2, \ldots, m$, $i \neq k$.

Posons

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^{m} g_k(x)(1 - (x - x_k)^2)^n,$$

$$Q_{ni}(x) = \sum_{k=1}^{m} R_{ki}(x)(1 - (x - x_k)^2)^n -$$

$$- 2n \sum_{k=1}^{m} (x - x_k)(x - x_i) S_{ki}(x)(1 - (x - x_k)^2)^{n-1} -$$

$$- 2n\ g_i(x)(1 - (x - x_i)^2)^{n-1},$$

$i = 1, 2, \ldots, m$

$n = 1, 2, \ldots$

Les égalités

$$\lim_{x \to x_i} Q_{ni}(x) = \sum_{k=1}^{m} R_{ki}(x_i) - 2n$$

impliquent l'existence d'un entier n_1 et d'un nombre $\delta > 0$ tels que

$$Q_{n,i}(x) < 0$$

pour $x \in (x_i - \delta,\ x_i + \delta),\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Les relations:

$$Q_n'(x) = (x - x_i)\, Q_{ni}(x)$$

impliquent les relations:

$$Q_{n_1}'(x) > 0$$

pour $x \in (x_i - \delta,\ x_i)$

$$Q_{n_1}'(x) < 0$$

pour $x \in (x_i,\ x_i + \delta),\ i = 1, 2, \ldots, m$

On voit donc que, sur l'ensemble ouvert $G = \bigcup_{i=1}^{m} (x_i - \delta,\ x_i + \delta)$, le polynôme Q_{n_1} a des maximums dans les points $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

C'est pourquoi

$$Q_{n_1}(x) \leqslant Q_{n_1}(x_i) = 1 \tag{1}$$

pour $x \in G,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Posons

$$q = \max_{\substack{x \in [0,1] \setminus G \\ i = 1, 2, \ldots, m}} \{1 - (x - x_i)^2\}.$$

On voit que:

$$Q_n(x) \leqslant q^n \sum_{k=1}^{m} g_k(x),$$

$$0 < q < 1.$$

Il existe donc n_2 tel que

$$Q_{n_2}(x) \leqslant 1 \tag{2}$$

pour $x \in [0,\ 1] \setminus G.$

Les relations (1), (2) et le fait que la suite $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ est décroissante prouvent que

$$Q_{n_3}(x) \leqslant 1$$

pour $n_3 = \max\ \{n_1,\ n_2\},\ x \in [0,\ 1].$

Les polynômes $P_k(x) = g_k(x)\ (1 - (x - x_k)^2)^{n_0}$ sont positifs et vérifient les relations (a), (b).

R e m a r q u e. Si les points $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m$ sont les zéros du polynôme de Tchebycheff, $x_k = \cos \frac{2k-1}{2m} \pi,\ k = 1, 2, \ldots, m,$ alors les polynômes d'interpolation de Fejér

$$P_k(x) = \left\{1 - \frac{l''(x_k)}{l'(x_k)}\right\} l_k^2(x),$$

$k = 1, 2, \ldots, m,$ vérifient les conditions du lemme sur le segment $[-1, 1]$.

THÉORÈME 7. *Il existe un entier n_0 et un opérateur linéaire et positif U,*

$$U : C[a,\ b] \to P_{n_0}$$

qui vérifie les relations:

$$Uf(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{7.1}$$

$$\| U \| = 1. \tag{7.2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Posons

$$Uf = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\, P_k$$

où $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m$ sont les polynômes du lemme. Les relations (a) impliquent les relations (7.1). Les relations (b) impliquent

$$Uf(x) \leqslant \sum_{k=1}^{m} |\, f(x_k)\, | P_k(x) \leqslant \| f \| \sum_{k=1}^{m} P_k(x) \leqslant \| f \|,$$

pour tout $x \in [a,\ b],\ f \in C[a,\ b]$ et donc

$$\| Uf \| \leqslant \| f \|$$

pour toute $f \in C[a,\ b]$.

Il en résulte

$$\| U \| \leqslant 1.$$

On sait que n'importe quel opérateur d'interpolation défini sur un ensemble qui contient la fonction contante égale à 1 vérifie la relation

$$\| U \| \geqslant 1,$$

et on a démontré donc la relation (7.2).

THÉORÈME 8. *Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $Q \in \mathfrak{P}_n,\ f \in C[a,\ b]$ il existe $P \in \mathfrak{P}_n$ tel que:*

$$P(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{8.1}$$

$$\| f - P \| \leqslant 2 \| f - Q \|. \tag{8.2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Définissons

$$P = Q + U(P - Q)$$

où U est l'opérateur du théorème 7. Par la suite la démonstration est immédiate.

R e m a r q u e. Si le polynôme Q est le polynôme de la meilleure approximation de f on obtient le théorème de S. Paszkovski.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algébre de $C(T)$ qui sépare n'importe quels deux points du compact T et qui contient l'unité.

THÉORÈME 9. *Quelle que soit la fonction $f \in C(T)$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $P \in \mathcal{A}$ tel que:*

$$P(t_i) = f(t_i),\ i = 1, 2, \ldots, m; \tag{9.1}$$

$$\|f - P\| < \varepsilon. \tag{9.2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $f \in C(T)$, $\varepsilon > 0$. Grâce au fait que $\mathcal{A}$ sépare les points de T il existe $g_{ij} = g_{ji} \in \mathcal{A}$ tels que

$$g_{ij}(t) \neq g_{ij}(t_j),$$

pour $i, j = 1, 2, \ldots, m,\ i \neq j$.

Posons

$$h_i = (g_{1i} - g^{1i}(x_1)) \ldots (g_{i-1i} - g_{i-1i}(x_{i-1}))\,(g_{i+1i} - g_{i+1i}(x_{i+1})) \ldots (g_{mi} - g_{mi}(x_m))$$

$$l_i = \frac{h_i}{h_i(x_i)},\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

On voit que

$$l_i(x_j) = \delta_{ij},$$

$i, j = 1, 2, \ldots, m.$

Posons

$$M = \sum_{i=1}^{m} \|l_i\|$$

Conformément au théorème de Stone-Weierstrass il existe $Q \in \mathcal{A}$ tel que

$$\|f - Q\| < \frac{\varepsilon}{1 + M}$$

L'élément $P = Q + \sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - Q(x_i))\, l_i$ vérifie les relations (9.1), (9.2).

B I B L I O G R A P H I E

[1] B e a t s o n, R. K., *The Asymptotic Cost of Lagrange Interpolatory Side Conditions*, J. Approximation Theory, **20**, 288–295 (1977).

[2] D e u t s c h, F. and M o r r i s, P. D., *On Simultaneous Approximation and Interpolation which Preserves the Norm*, Bull. Amer. Math. Soc., **75**, 812–814, (1969).

[3] J o h n s o n, D. J., *Jackson Type Theorems for Approximation with Side Conditions*, J. Approximation Theory, **12**, 213–229 (1974).

[4] P a s z k o w s k i, S., *On Approximation with Nodes*, Rozprawy Mat., **14**, 1–61 (1957).

[5] W o l i b n e r, W., *Sur un polynôme d'interpolation*, Coll. Math., **2**, 136–137 (1951).

[6] Y a m a b e, H., *On an Extension of the Helly's Theorem*, Osaka Math. J., **2**, 15–17 (1950).

[7] Y o u n g, S., *Piecewise Monotone Interpolation*, Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 642–643 (1967).

Reçu le 18.XII.1981.

Institutul Politehnic
3400 *Cluj-Napoca*