MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N° 1—2, 1982, pp. 89—97

SUR DEUX PROBLÈMES DE LA MEILLEURE APPROXIMATION DANS LES ESPACES DE BANACH

par
KALIK C.
(Cluj-Napoca)

1. Position des problèmes. On considère les données suivantes :

— deux espaces de Banach, notés par X et Y, uniformément convexes,

— un opérateur linéaire, continu et surjectif, $T: X \to Y$

— un nombre fini de fonctionnelles de X^*, notées par $s_1^*, \ldots, s_n^*$, linéairement indépendantes,

— une fonction $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continue, strictement croissante et telle qu'il y ait les égalités $g(0) = 0$ et $\lim g(t) = +\infty$ quand $t \to +\infty$.

On considère l'opérateur $\pi: X \to \mathbf{R}^n$ donné par l'égalité

$$\pi x = \{\langle s_1^*, x\rangle, \ldots, \langle s_n^*, x\rangle\}, \quad x \in X.$$

Il est évident que l'opérateur π ainsi défini est linéaire, continu et surjectif.

Ayant en vue aussi l'égalité

$$\pi^* r = \sum_{i=1}^{n} r_i s_i^*, \quad r \in \mathbf{R}^n,$$

on aura pour les éléments $e_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}, \ldots, e_n = \{0, \ldots, 0, 1\}$,

$$\pi^* e_i - s^* \quad i = \overline{1, n}.$$

A l'aide de la fonction g, nous définissons les fonctionnelles suivantes

$$G(y) = \int_0^{\|y\|} g(t)dt, \quad y \in Y \quad \text{et} \quad G^*(y^*) = \int_0^{\|y^*\|} g^{-1}(t)dt, \quad y^* \in Y^*.$$

Ces fonctionnelles sont strictement convexes, semi-continues inférieurement (s.c.i.) et non bornées dans le sens des égalités

$$\lim_{\|y\|\to+\infty} G(y) = +\infty, \quad \lim_{\|y^*\|\to+\infty} G^*(y^*) = +\infty.$$

Dans ce travail on considère deux problèmes suivants,

(P) : Etant donné le vecteur $r \in \mathbf{R}^n$, il faut trouver un tel élément $s \in X$ qu'on ait

1. $\pi s = r$ et
2. $G(Ts) = \min\{G(Tx) \mid x \in X(p)\}$,

où

$$X(r) = \{x \in X \mid \pi x = r\},$$

(P^*) : Etant donné la fonctionnelle $f^* \in X^*$, il faut trouver une telle fonctionnelle $s_0^* \in X^*$ qu'on ait

1. $s_0^* \in \mathrm{Sp}\{s_1^*, \ldots, s_n^*\}$ et
2. $G^*(T^{*-1}r_0^*) = \min\{G^*(T^{*-1}r^*) \mid r^* \in R(f^*)\}$, où $r_0^* = f^* - s_0^*$ et $R(f^*) = \{r^* \in (\mathrm{Ker} T)^{\perp} \mid \exists s^* \in \mathrm{Sp}\{s_1^*, \ldots, s_n^*\} : f^* = s^* + r^*\}$.

Le problème (P) est un problème d'interpolation de type spline. Le cas le plus simple de ce problème est quand $s_i^* = \delta(t_i)$ où $t_i \in \mathbf{R}$ et $Tx = x^{(k)}$. Le problème (P^*), dans le cas le plus simple, est celui de la formule de quadrature optimale.

2. Quelques résultats auxiliaires. Dans ce travail on suppose partout qu'on a

(1) $$\mathrm{Ker}\, T \cap X(0) = \{0\}.$$

Une conséquence de cette égalité est l'inégalité suivante

$$\dim \mathrm{Ker}\, T \leqslant n$$

démontrée dans [3].

On note $k = \dim \mathrm{Ker}\, T$ et $p = n - k$.

L'égalité (1) montre que la restriction de π sur l'ensemble $\mathrm{Ker}\, T$, c'est-à-dire que

(2) $$\pi : \mathrm{Ker}\, T \to \pi(\mathrm{Ker}\, T)$$

est un opérateur bijectif. Par conséquent, on a

(3) $$\mathbf{R}^n = \pi(\mathrm{Ker}\, T) \oplus [\pi(\mathrm{Ker}\, T)]^{\perp}$$

et $\dim \pi(\mathrm{Ker}\, T) = k$. En changeant la suite $e_1, \ldots, e_n$, on peut toujours obtenir que

$$\pi(\mathrm{Ker}\, T) = \mathrm{Sp}\{e_1, \ldots, e_k\} \text{ et } [\pi(\mathrm{Ker}\, T)]^{\perp} = \mathrm{Sp}\{e_{k+1}, \ldots, e_{k+p}\}.$$

Soit $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathrm{Ker}\, T$ les solutions des équations

$$\pi\xi_i = e_i, \quad i = \overline{1, k}.$$

Il faut remarquer que chacune de ces équations a une seule solution dans l'ensemble $\mathrm{Ker}\, T$ à cause de la bijectivité de l'opérateur (2). En outre, la suite $\xi_1, \ldots, \xi_k$ est une base de $\mathrm{Ker}\, T$. Donc nous avons

$$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Sp}\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}.$$

On note par S^* l'ensemble donné par

$$S^* = \mathcal{R}(T^*) \cap \mathcal{R}(\pi^*).$$

Ayant en vue que $\mathcal{R}(T^*) = (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$ et $\mathcal{R}(\pi^*) = (\mathrm{Ker}\, \pi)^{\perp}$, on a aussi l'égalité

$$S^* = (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp} \cap (\mathrm{Ker}\, \pi)^{\perp}.$$

LEMME 1. *Supposons que l'égalité* (1) *soit valable. Dans ce cas on a*

(4) $$S^* = \mathrm{Sp}\{s_{k+1}^*, \ldots, s_{k+p}^*\}$$

D é m o n s t r a t i o n. I. Soit $s^* \in S^*$. En ce cas on a $s^* \in \mathcal{R}(\pi^*)$. Mais l'égalité

$$\mathcal{R}(\pi^*) = \mathrm{Sp}\{s_1^*, \ldots, s_n^*\}$$

permet d'écrire que

$$s^* = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i^* + \sum_{i=1}^{p} \beta_i s_{k+i}^*.$$

En même temps, nous avons

$$\langle s_i^*, \xi_j\rangle = \langle \pi^* e_i, \xi_j\rangle = \langle e_i, \pi\xi_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Ce qui nous permet d'écrire que

$$\langle s^*, \xi_j\rangle = \alpha_j, \; j = \overline{1, k}.$$

D'autre part $s^* \in \mathcal{R}(T^*) = (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$. Ainsi nous avons

$$\langle s^*, \xi_j\rangle = 0, \; j = \overline{1, k}.$$

Ce qui montre que $\alpha_j = 0$ et par conséquent

$$s^* = \sum_{i=1}^{p} \beta_i s_{k+i}^* \in \mathrm{Sp}\{s_{k+1}^*, \ldots, s_{k+p}^*\}.$$

II. Cette fois soit $s^* = \sum_{i=1}^{p} \beta_i s_{k+i}^*$. Cela signifie que $s^* \in \mathrm{Sp}\{s_1^*, \ldots, s_n^*\} = \mathcal{R}(\pi^*)$. Comme on l'a vu plus haut $\langle s^*, \xi_j\rangle = \delta_{ij}$. Ces égalitées permettent d'écrire que

$$\langle s^*, \xi_j\rangle = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \langle s_{k+i}^*, \xi_j\rangle = 0, \; j = \overline{1, k}.$$

Ainsi on a $s^* \in (\operatorname{Ker} T)^\perp = \mathcal{R}(T^*)$. Donc on a obtenu finalement que $s^* \in \mathcal{R}(T^*) \cap \mathcal{R}(\pi^*)$. Q.E.D.

LEMME 2. *On suppose que l'égalité* (1) *soit valable. Alors on a aussi l'égalité*

$$T^*[TX(0)]^\perp = S^*. \tag{5}$$

Démonstration. I. Soit $s^* \in T^*[TX(0)]^\perp$. Cela signifie que $s^* \in \mathcal{R}(T^*)$. On note par $y^* \in Y^*$ l'élément pour lequel on a $T^*y^* = s^*$. Dans ce cas, pour chaque $x \in X(0) = \operatorname{Ker} \pi$, on a

$$\langle s^*, x\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = 0,$$

ce qui montre que $s^* \in (\operatorname{Ker} \pi)^\perp = \mathcal{R}(\pi^*)$. Ainsi nous avons $s^* \in (\operatorname{Ker} \pi)^\perp = \mathcal{R}(\pi^*)$.

II. Soit $s^* \in S^*$. S'appuyant sur le lemme 1, on peut écrire que

$$s^* = \sum_{i=1}^{p} \beta_i s^*_{k+i} = \mathcal{R}(T^*) \cap \mathcal{R}(\pi^*).$$

De nouveau, on note par $y^* \in Y^*$ l'élément pour lequel on a $T^*y^* = s^*$. Il faut montrer que $y^* \in [TX(0)]^\perp$. Remarquons d'abord que

$$\langle y^*, Tx\rangle = \langle T^*y^*, x\rangle = \langle s^*, x\rangle = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \langle s^*_{k+i}, x\rangle$$

pour chaque $x \in X(0) = \operatorname{Ker} \pi$. Mais on a aussi l'égalité

$$\langle s^*_{k+i}, x\rangle = \langle \pi^* e_{k+i}, x\rangle = \langle e_{k+i}, \pi x\rangle = 0$$

Vu toutes ces égalités, on peut écrire que $\langle y^*, Tx\rangle = 0$, $\forall x \in \operatorname{Ker} T$, ce qui signifie que $s^* \in T^*[TX(0)]^\perp$. Q.E.D.

3. Les résultats concernant les problèmes (P) et (P*).

THÉORÈME 1. *A condition que l'égalité* (1) *soit satisfaite, pour chaque vecteur* $r \in \mathbb{R}^n$, *le problème* (P) *admet une solution et seulement une.*

Démonstration. Soit $x_0 \in X(r)$ un élément quelconque fixé. On peut voir aisément que

$$X(r) = x_0 + X(0),$$

où $X(0)$ est un sousespace fermé de X. En tenant compte de l'égalité (1), on obtient que la restriction de l'opérateur T sur l'ensemble $X(0)$ est injective. Donc l'opérateur

$$T : X(0) \to TX(0)$$

est bijectif. Il en découle entre autres, que l'ensemble $TX(0)$ est un sousespace fermé de Y. En outre, nous avons

$$TX(r) = Tx_0 + TX(0),$$

ce qui montre que l'ensemble $TX(r)$ este convexe et fermé.

D'autre part, on sait déjà que la fonctionnelle $G : Y \to \mathbf{R}$ este convexe, s.c.i. et qu'elle satisfait aussi l'égalité

$$\lim_{\|y\| \to \infty} G(y) = +\infty.$$

Par conséquent cette fonctionnelle G admet un point de minimum sur l'ensemble convexe et fermé $TX(r)$.

Finalement, ayant en vue que la fonctionnelle G est même strictement convexe, on peut affirmer que le point de minimum de G est unique dans $TX(r)$. Q.E.D.

THÉORÈME 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'élément* $s \in X$ *soit une solution du problème* (P) *est qu'on ait*

1°. $\pi s = r$ et

2°. $(T^* \mathcal{J}_g T)(s) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i s^*_{k+i}$,

où $\mathcal{J}_g$ *est l'application de la dualité correspondant à la fonction* g *et la suite* $\beta_1, \ldots, \beta_p$ *des nombres réels est une solution du système d'équations algébriques*

$$\left\langle T^{*-1} s^*_{k+j},\ \mathcal{J}_g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{p} \beta_i T^{*-1} s^*_{k+i}\right)\right\rangle = r_{k+j},\ j = \overline{1, p}. \tag{6}$$

Démonstration. I. Soit s une solution du problème (P). Alors l'égalité $\pi s = r$ est satisfaite. En outre, nous avons

$$G(Ts) = \min \{G(Tx) \mid x \in X(r)\}.$$

Il s'ensuit que

$$0 \in \mathcal{J}_g(Ts) + \partial I_{TX(r)} \cdot (Ts),$$

où $I_{TX(r)}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $TX(r)$. Par conséquent, nous avons

$$-\mathcal{J}_g(Ts) \in \partial I_{TX(r)}(Ts).$$

Cela signifie qu'on a

$$\langle \mathcal{J}_g(Ts),\ Tx - Ts\rangle \geqslant 0,\ \forall x \in X(r).$$

Ayant en vue aussi que l'ensemble $X(0)$ est linéaire, il en résulte que

$$\langle \mathcal{J}_g(Ts),\ Tx\rangle = 0,\ \forall x \in X(0).$$

C'est-à-dire que

$$\mathfrak{J}_g(Ts) \in [TX(0)]^{\perp},$$

ou

$$(T^*\mathfrak{J}_g T)(s) \in T^*[TX(0)]^{\perp}.$$

De là, à cause des lemmes 1 et 2, on obtient l'égalité

$$(T^*\mathfrak{J}_g T)(s) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i s^*_{k+i},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left\langle T^{*-1}s^*_{k+j},\ \mathfrak{J}_g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{p} \beta_i T^{*-1}s^*_{k+i}\right)\right\rangle = \langle T^{*-1}s^*_{k+j}, Ts\rangle = \langle s^*_{k+j}, s\rangle =$$

$$= \langle \pi^* e_{k+j}, s\rangle = \langle e_{k+j}, \pi s\rangle = \langle e_{k+j}, r\rangle = r_{k+j}.$$

C'est-à-dire que la suite $\beta_1, \ldots, \beta_p$ est vraiment une solution du système (6).

II. Soit s un élément qui satisfait les conditions 1° et 2° du théorème 2. Partant du lemme 2, auquel on ajoute la condition 2°, nous obtenons que

$$(\mathfrak{J}_g T)(s) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i T^{*-1}s^*_{k+i} \in [TX(0)]^{\perp}.$$

C'est-à-dire que

$$\langle(\mathfrak{J}_g T)(s), Tx\rangle = 0, \quad \forall x \in X(0).$$

De cette façon on a

$$\langle \mathfrak{J}_g(Ts), Tx - Ts\rangle = 0, \quad \forall x \in X(r),$$

ce qui signifie que

$$-\mathfrak{J}_g(Ts) \in \partial I_{TX(r)}(Ts).$$

Cela veut dire que

$$G(Ts) = \min\{G(Tx) \mid x \in X(r)\}.$$

Donc s est une solution du problème (P). Q.E.D.

THÉORÈME 3. *Supposons que la condition* (1) *est satisfaite. Alors pour chaque* $f^* \in X^*$, *le problème* (P^*) *admet une solution et seulement une.*

D é m o n s t r a t i o n. I. Pour commencer nous démontrons l'égalité

$$R(f^*) = f^* - \sum_{i=1}^{k} \langle f^*, \xi_i\rangle s_i^* - S^*. \tag{7}$$

Soit

$$r^* = f^* - \sum_{i=1}^{k} \langle f^*, \xi_i\rangle s_i^* - \sum_{i=1}^{p} \beta_i s^*_{k+i}.$$

Il faut montrer que $r^* \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$. En effet, pour chaque $\xi_j \in \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, nous avons

$$\langle r^*, \xi_j\rangle = \langle f^*, \xi_j\rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle f^*, \xi_i\rangle\langle s_i^*, \xi_j\rangle - \sum_{i=1}^{p} \beta_i\langle s^*_{k+i}, \xi_j\rangle.$$

Mais $\langle s_i^*, \xi_j\rangle = \delta_{ij}$ et $\langle s^*_{k+i}, \xi_j\rangle = \delta_{k+i,j} = 0$. Ces égalités permettent d'écrire que

$$\langle r^*, \xi_j\rangle = \langle f^*, \xi_j\rangle - \langle f^*, \xi_j\rangle = 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Cela signifie que $r^* \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, donc il y a $r^* \in R(f^*)$.

Inversement, soit $r^* \in R(f^*)$. Alors

$$r^* = f^* - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_i^* - \sum_{i=1}^{p} \beta_i s^*_{k+i} \text{ et } \langle r^*, \xi_j\rangle = 0, \quad \forall j = \overline{1, k}.$$

En y ajoutant les égalités $\langle s_i^*, \xi_j\rangle = \delta_{ij}$ et $\langle s^*_{k+i}, \xi_j\rangle = 0$, nous trouvons que $\alpha_j = \langle f^*, \xi_j\rangle$. C'est-à-dire que

$$r^* = f^* - \sum_{i=1}^{k} \langle f^*, \xi_i\rangle s_i^* - \sum_{i=1}^{p} \beta_i s^*_{k+i}.$$

De cette façon l'égalité (7) est demontrée.

II. A la base de l'égalité (7) on peut écrire que

$$T^{*-1}R(f^*) = T^*(f^* - \sum_{i=1}^{k} \langle f^*, \xi_i\rangle s_i^*) - T^{*-1}S^*. \tag{7'}$$

En tenant compte aussi du fait que l'opérateur $T^*: Y^* \to (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ est bijectif, on trouve que l'ensemble $T^{*-1}R(f^*)$ est convexe et fermé.

D'autre part, on sait que la fonctionnelle $G^*: Y^* \to \mathbf{R}$ est strictement convexe, s.c.i. et satisfait l'égalité

$$\lim_{\|y^*\| \to +\infty} G^*(y^*) = +\infty.$$

Donc G^* admet, dans l'ensemble convexe et fermé $T^{*-1}R(f^*)$, un point de minimum et seulement un. Q.E.D.

THÉORÈME 4. *L'élément* $s_0^* \in X^*$ *est une solution du problème* (P^*) *alors et seulement alors quand on a*

$$s_0^* = \sum_{i=1}^{k} \langle f^*, \xi_i\rangle s_i^* + \sum_{i=1}^{p} \beta_i s^*_{k+i}, \tag{8}$$

où la suite $\beta_1, \ldots, \beta_p$ est une solution du système des équations algébriques

$$(9)\qquad \left\langle T^{*-1}s^*_{k+j},\ \mathcal{J}_g^{-1}\left(T^{*-1}(f^* - \sum_{i=1}^{k}\langle f^*, \xi_i\rangle s^*_i) - \sum_{i=1}^{p}\beta_i T^{*-1}s^*_{k+i}\right)\right\rangle = 0,\ j = \overline{1, p}.$$

D é m o n s t r a t i o n. I. Soit s^*_0 une solution du problème (P^*). Cela signifie que

$$s^*_0 = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i s^*_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_j s^*_{k+i}.$$

De là, par la voie déjà connue, on obtient que $\langle s^*_0, \xi_j\rangle = \alpha_j$. D'autre part, ayant en vue que $r^*_0 = f^* - s^*_0 \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$, on peut écrire

$$0 = \langle r^*_0, \xi_j\rangle = \langle f^*, \xi_j\rangle - \langle s^*_0, \xi_j\rangle = \langle f^*, \xi_j\rangle - \alpha_j.$$

Ces égalités montrent qu'on à la représentation (8).

Partant de l'égalité

$$G^*(T^{*-1}r^*_0) = \min\{G^*(T^{*-1}r^*) \mid r^* \in R(f^*)\},$$

nous obtenons que

$$0 \in \partial G^*(T^{*-1}r^*_0) + \partial I_{T^{*-1}R(f^*)}(T^{*-1}r^*_0),$$

ou que

$$-\mathcal{J}_g^{-1}(T^{*-1}r^*_0) \in \partial I_{T^{*-1}R(f^*)}(T^{*-1}r^*_0).$$

De là, ayant en vue aussi la formule (7′), on déduit d'une façon habituel, que

$$\langle \mathcal{J}_g^{-1}(T^{*-1}r^*_0),\ T^{*-1}S^*\rangle = 0.$$

Le lemme 1 montre que la dernière égalité équivaut à

$$\langle T^{*-1}s^*_{k+j},\ \mathcal{J}_g^{-1}(T^{*-1}r^*_0)\rangle = 0,\ j = \overline{1, p},$$

ce qui est exactement le système (8).

II. Maintenant soit

$$s^*_0 = \sum_{i=1}^{k}\langle f^*, s_i\rangle s^*_i + \sum_{i=1}^{p}\beta_i s^*_{k+i},$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_p$ est une solution du système (9). Pour démontrer que l'élément s^*_0 est une solution du problème (P^*) il suffit de démontrer que $T^{*-1}r^*_0$ est un point de minimum de G^* sur l'ensemble $T^{*-1}R(f^*)$.

S'appuyant sur le système (9), on peut écrire que

$$\langle T^{*-1}S^*,\ \mathcal{J}_g^{-1}(T^{*-1}r^*_0)\rangle = 0.$$

Donc nous avons

$$\langle \mathcal{J}_g^{-1}(T^{*-1}r^*_0),\ T^{*-1}r^* - T^{*-1}r^*_0\rangle = 0,\ \forall r^* \in R(f^*),$$

ce qui signifie que

$$0 \in \partial(G^* + I_{T^{*-1}R(f^*)})(T^{*-1}r^*_0).$$

Il en résulte que

$$G^*(T^{*-1}r^*_0) = \min\{G^*(T^{*-1}r^*) \mid r^* \in R(f^*)\}.$$

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A t t e i a M., *Fonctions-spline généralisées*, C. R. **261** (1965), pp. 2149–2152.
[2] B a u m e i s t e r J., *Extremaleigenschaft nichtlinearer Spline*, Diss. München 1974.
[3] K a l i k C., *Interpolating spline elements in Banach Spaces*, Mathematica **18** (41), 2, 1976, pp. 152–164.
[4] S a r d A., *Optimal Approximation*, J. of Funct. Analysis, (1), 1967 pp. 222–244.

Reçu le 12.I.1982

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de matematică
340 *Cluj-Napoca*
Str. Kogălniceanu 1