MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N° 1–2, 1982, pp. 99–108

VERALLGEMEINERTE KONVEXE FUNKTIONEN UND DAS PRINZIP DER LOKALEN BESCHRÄNKTHEIT

von
IOSIF KOLUMBÁN
(Cluj-Napoca)

1. Einführung. Ist eine reellwertige konvexe Funktion, die auf einem reellen topologischen linearen Raum erklärt ist, in einem Punkt lokal nach oben beschränkt, dann ist sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches lokal nach oben beschränkt. In der Arbeit [4] wurde gezeigt, dass auch die quasikonvexen Funktionen diese Eigenschaft besitzen. Ist eine quasikonvexe Funktion, die auf einer offenen Teilmenge von zweiter Kategorie eines reellen oder komplexen topologischen linearen Raumes erklärt ist, nach unten halbstetig, dann ist sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches lokal nach oben beschränkt. Diese Eigenschaft der quasikonvexen Funktionen stellt eine Verallgemeinerung des für Familien von stetigen linearen Abbildungen gültigen Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit dar.

In den letzten Jahren erschienen eine Reihe von Arbeiten in denen verallgemeinerte konvexe Menge und verallgemeinerte konvexe Funktionen untersucht wurden (vgl. z.B. [2] und [7]). Beeinflusst wurden diese Untersuchungen durch Anwendungen in verschiedenen Teilgebieten der Mathematik. Ein wichtiges Anliegen, das dabei verfolgt wurde, war das Erzielen eines möglichst allgemeinen Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit. In der vorliegenden Arbeit setzen wir diese Untersuchungen weiter fort.

Im zweiten Abschnitt unserer Arbeit werden sogenannte G-konvexe Funktionen eingeführt und näher untersucht. Für sie wird ein Prinzip der lokalen Beschränktheit nach oben bewiesen (Satz 2.11). Es sei darauf hingewiesen, dass anstelle linearer Räume ein weitaus allgemeinere algebraische Struktur als Rahmen für unsere Untersuchugen gewält wurde. Im dritten Abschnitt der Arbeit werden fastkonvexe Funktionen behandelt. Eine Anwendung der erzielten Ergebnisse liefert im vierten Abschnitt eine

Verallgemeinerung des Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit für quasilineare Abbildungen, die kürzlich von ŠULMAN, V. S. [6] eingeführt worden sind.

2. G-konvexe Funktionen. Es sei X ein topologischer Raum. Die Menge aller Umgebungen eines Punktes $a \in X$ wird mit $\mathcal{V}(a)$ bezeichnet. Wir setzen voraus, dass es für jedes Paar $(a, b) \in X \times X$ eine Teilmenge ab von X gibt, so dass folgende Bedingungen erfüllt werden:

(i) für alle $a, b \in X$, $a \neq b$, gibt es ein $c \in X$ mit $b \in ac$;

(ii) für alle $a, b \in X$, $V \in \mathcal{V}(a)$ und $c \in ab$, $c \neq a$, gibt es ein $U \in \mathcal{V}(c)$ derart, dass für alle $x \in U$ ein $y \in V$ mit der Eigenschaft $x \in yb$ existiert.

Die Teilmengen ab mit den obigen Eigenschaften nennen wir *Intervalle*. Die Eigenschaft (i) zeigt, dass X „algebraisch offen" ist, während Eigenschaft (ii) eine stetige Abhängigkeit zwischen den Elementen des Intervalles ab und der Grenze a ausdrückt.

B e i s p i e l 2.1. Es sei X ein reeller topologischer linearer Raum. Das Intervalll ab wird durch

$$ab = \{x \in X : x = ta + (1 - t)b,\ t \in T\},\ au = \emptyset \tag{2.1}$$

definiert, wobei $T \subseteq R \setminus \{0, 1\}$ und $T \neq \emptyset$. Die Bedingungen (i) und (ii) sind in diesem Fall erfüllt. In der Tat, sind $a, b \in X$, $a \neq b$, vorgegeben, dann gilt für

$$c = \frac{1}{t}(b - ta)$$

(wobei $t \in T$), dass c aus X ist und $b \in ac$. Um (ii) zu beweisen, wählen wir $a, b \in X$, $V \in \mathcal{V}(a)$, $c = ta + (1 - t)b$ (wobei $t \in T$). Es sei $W \in \mathcal{V}(\theta)$ eine kreisförmige Umgebung, so dass $a + W \subseteq V$ gilt. Setzen wir $U = c + tW$, dann gilt $U \in \mathcal{V}(c)$ und für alle $x = c + tz$ mit $z \in W$ haben wir $x = ty + (1 - t)b$, wobei $y = a + z$ gewählt wurde.

B e i s p i e l 2.2. Es sei X eine offene konvexe Teilmenge eines reellen topologischen linearen Raumes. Wird das Intervall ab durch (2.1) definiert, wobei $T \subseteq]0, 1[$ und 0 ein Häufungspunkt von T ist, dann kann man wie in Beispiel 2.1 zeigen, dass die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt werden.

B e i s p i e l 2.3. Es sei $(X, \cdot)$ eine topologische Gruppe und $ab = \{a \cdot b\}$ für alle $a, b \in X$. Man kann leicht zeigen, dass die Bedingungen (i) und (ii) auch in diesem Fall erfüllt werden.

D e f i n i t i o n 2.4. Es sei X ein topologischer Raum, in dem Intervalle mit den Eigenschaften (i) und (ii) definiert sind. Weiterhin sei $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ eine Funktion, die auf jedem beschränkten eindimensionalen Intervall aus $\mathbf{R}^2$, das zur Ordinatenachse parallel ist, nach oben beschränkt ist. Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ heisst *G-konvex*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $f(x), f(y) \in \mathbf{R}$ und alle $z \in xy$ die Ungleichung $f(z) \leqslant G(f(x), f(y))$ gilt.

B e i s p i e l 2.5. Es sei X ein reeller topologischer linearer Raum, $T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ und $G(u, v) = \frac{1}{2}(u + v)$, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$. Werden die Intervalle wie im Beispiel 2.1 definiert, dann ist jede im Sinne von Jensen konvexe Funktion G-konvex. — Jede präkonvexe Funktion im Sinne von [4] ist G-konvex mit $G(u, v) = \gamma \max\{u, v\}$, $\gamma \geqslant 1$. In diesem Fall werden die Intervalle wie im Beispiel 2.2 mit $T =]0, 1[$ definiert.

Es sei X ein topologischer Raum, $f : X \to \mathbf{R}$, $x \in X$ und $f(x) < +\infty$. Die Funktion f ist an der Stelle x nach oben beschränkt, wenn es ein $V \in \mathcal{V}(x)$ gibt, so dass die Einschränkung f_V von f auf V nach oben beschränkt ist. Mit anderen Worten, f ist an der Stelle x nach oben beschränkt, wenn $\overline{f}(x) < +\infty$, wobei

$$\overline{f}(x) = \limsup_{x \to y} f(y)$$

gesetzt wurde.

Die Menge

$$D(f) = \{x \in X : f(x) \in \mathbf{R}\}$$

heisst *effektiver Definitionsbereich* von f, während $S(f) = X \setminus D(f)$ die Menge der *Singularitäten* von f ist.

SATZ 2.6. *Es sei $f : X \to]-\infty, +\infty]$ eine G-konvexe Funktion. Gibt es ein $a \in D(f)$ mit $\overline{f}(a) < +\infty$, dann gilt*

$$\overline{f}(x) < +\infty \text{ für alle } x \in D(f).$$

B e w e i s. Es sei $x_1 \in D(f)$, $x_1 \neq a$. Weiterhin sei $V \in \mathcal{V}(a)$ so gewählt, dass f_V nach oben beschränkt ist. Wegen Bedingung (i) gibt es ein $x_0 \in X$ mit $x_1 \in ax_0$. Wegen Bedingung (ii) gibt es ein $U \in \mathcal{V}(x_1)$ derart, dass für alle $z \in U$ ein $y \in V$ existiert mit der Eigenschaft $z \in yz_0$. Weil f G-konvex ist, gilt $f(z) \leqslant G(f(y), f(x_0))$. Da die rechte Seite dieser Ungleichung nach oben beschränkt ist, falls y in der Menge V variiert, folgt, dass f_U nach oben beschränkt ist, d.h. es gilt $\overline{f}(x_1) < +\infty$.

B e m e r k u n g 2.7. Der Beweis von Satz 2.6. zeigt, dass für einen metrischen Raum X, dessen Metrik mit ρ bezeichnet wird, die Voraussetzung dass f G-konvex ist, wie folgt abgeschwächt werden kann: für jede positive reelle Zahl δ existiert eine Funktion $G_\delta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, die auf jedem beschränkten eindimensionalen Intervall aus $\mathbf{R}^2$, das zur Ordinatenachse parallel ist, nach oben beschgränkt ist, so dass für alle $x, y \in X$ mit $\rho(x, y) \geqslant \delta$, $f(x) \in \mathbf{R}$, $f(y) \in \mathbf{R}$ und alle $z \in xy$ die Ungleichung

$$f(z) \leqslant G_\delta(f(x), f(y))$$

gilt. In der Tat, falls $x_1 \in D(f)$, $x_1 \in ax_0$ und U eine Umgebung von x_1 mit der Eigenschaft ist, dass für alle $z \in U$ ein $y \in V$ existiert mit

$z \in yx_0$, dann kann man o.b.d.A. voraussetzen, dass U eine Teilmenge der Kugel mit dem Mittelpunkt x_1 und dem Radius $\delta \leqslant \frac{1}{2}\rho(x_0, x_1)$ ist.

Im folgenden werden wir eine Funktion f mit der obigen Eigenschaft G_δ — konvex nennen.

Beispiel 2.8. Es sei X ein offenes Intervall der reellen Zahlenachse und $\mathfrak{F}$ eine Menge reellwertiger Funktionen, die auf X definiert und stetig sind. Wir setzen voraus, dass es für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ und alle $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ genau eine Funktion $F \in \mathfrak{F}$ gibt mit $F(x_1) = y_1$ und $F(x_2) = y_2$. Um die Abhängigkeit dieser Funktion F von x_1, x_2, y_1 und y_2 auszudrücken, schreiben wir $F(x) = F(x; x_1, x_2, y_1, y_2)$.

Für $a, b \in X$, $a < b$, setzen wir $ab =]a, b[$. Ist X mit der natürlichen Topologie versehen, dann sind die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Eine Funktion $f: X \to \mathbf{R}$ heisst konvex bezüglich der Familie $\mathfrak{F}$, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ und $x \in x_1x_2$ die Ungleichung $f(x) \leqslant F(x)$ gilt, wobei $F(x) = F(x; x_1, x_2, f(x_1), f(x_2))$. E. F. BECKENBACH [1] hat gezeigt, dass für alle x_n, $x'_n \in X$ und y_n $y'_n \in \mathbf{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0),\ \lim_{n\to\infty} (x'_n, y'_n) = (x'_0, y'_0),\ x_0 \neq x'_0$$

die Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$$

gilt, wobei die Konvergenz auf jedem kompakten Teilintervall I von X gleichmässig ist. Die Funktionen $F_n \in \mathfrak{F}$ sind dabei durch $F_n(x_n) = y_n$ und $F_n(x'_n) = y'_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ definiert. Es seien nun $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$ fest gewählt, I ein kompaktes Teilintervall von X, $\delta > 0$ und

$$G_\delta(y_1, y_2) = \sup\{F(x; x_1, x_2, y_1, y_2): x, x_1, x_2 \in I,\ \delta \leqslant x_2 - x_1\}.$$

Nach dem vorhin erwähnten Satz von Beckenbach gilt $G_\delta(y_1, y_2) < +\infty$. Ist f eine bezüglich $\mathfrak{F}$ konvexe Funktion und δ eine positive reelle Zahl, dann gilt für alle $x, y \in X$ mit $y - x \geqslant \delta$ und alle $z \in xy$ die Ungleichung $f(x) \leqslant G_\delta(f(x), f(y))$. Dieses Beispiel motiviert die Bemerkung 2.7. sowie die Definition 2.4.

Beispiel 2.9. Es sei $(X, \cdot)$ eine topologische Gruppe und $G(u, v) = u + v$ für alle $u, v \in \mathbf{R}$. Die Intervalle seien wie im Beispiel 2.3 definiert. Eine Funktion $f: X \to \mathbf{R}$ ist genau dann G-konvex, wenn $f(x \cdot y) \leqslant f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in X$. Ist eine solche Funktion auf dem Einselement nach oben beschränkt, dann ist sie nach Satz 2.6 in jedem Punkt von X nach oben beschränkt.

Der nächste Satz beschreibt die Struktur der Menge der Singularitäten von f. Mit $int\, D(f)$ bezeichnen wir das Innere der Menge $D(f)$.

SATZ 2.10. *Es sei $f: X \to]-\infty, +\infty]$ eine nach unter halbstetige G-konvexe Funktion (bzw. eine G_δ — konvexe Funktion falls X ein metrischer Raum ist). Gilt $int\, D(f) = \emptyset$ oder gibt es einen Punkt in $int\, D(f)$ derart, dass f an dieser Stelle nicht nach oben beschränkt ist, dann ist $S(f)$ der Durschschnitt abzählbar vieler offener und in X dichter Mengen.*

Beweis. Es sei $X_n = \{x \in X: f(x) < n\}$, $n \in N$. Diese Mengen sind offen und es gilt $S(f) = \bigcap \{X_n: n \in N\}$. Wir zeigen, dass für alle $n \in N$ die Menge X_n in X dicht ist. Wäre X_{n_0} nicht dicht, dann müsste es ein $y_0 \in X$ und eine Umgebung $V \in \mathcal{V}(y_0)$ geben, so dass $V \cap X_{n_0} = \emptyset$. Also würde $f(x) \leqslant n_0$ für alle $x \in V$ gelten und demnach wäre $int D(f) \neq \emptyset$. Nach Satz 2.6 hätten wir also $\bar{f}(x) < +\infty$ für alle $x \in int\, D(f)$, was unserer Voraussetzung widersprechen würde.

SATZ 2.11. *Es sei $f: X \to \mathbf{R}$ eine nach unter halbstetige G-konvexe Funktion (bzw. eine G_δ-Funktion falls X ein metrischer Raum ist). Ist X ein topologischer Raum von zweiter Kategorie, dann ist f in jedem Punkt von X nach oben beschränkt.*

Beweis. Es sei X_n wie im Beweis des Satzes 2.10 definiert. Dann ist $M_n = X \setminus X_n$ abgeschlossen. Weil X ein topologischer Raum von zweiter Kategorie ist und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ gilt, gibt es ein $n_0 \in N$, so dass M_{n_0} innere Punkte hat ([3], S. 384). Demnach gibt es ein $x_0 \in X$ und eine Umgebung U von x_0, so dass $f(x) \leqslant n_0$ für alle $x \in U$ gilt. Nach Satz 2.6 haben wir dann $\bar{f}(x) < +\infty$ für alle $x \in X$.

Bemerkung 2.12. Satz 2.11 verallgemeinert das Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit von Banach-Steinhaus. In der Tat, es seien X und Y normierte lineare Räume und $L(X, Y)$ der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $A: X \to Y$. Es sei X vollständig. Dann ist X von zweiter Kategorie. Weiterhin seien $\mathfrak{A} \subseteq L(X, Y)$, $f: X \to]-\infty, +\infty]$, $f(x) = \sup\{\|Ax\|: A \in \mathfrak{A}\}$ für alle $x \in X$. Die Familie $\mathfrak{A}$ ist genau dann punktweise beschränkt wenn gilt $D(f) = X$. Ist $\mathfrak{A}$ punktweise beschränkt und f im Nullpunkt nach oben beschränkt, dann ist f, wegen Beispiel 2.9, in jedem Punkt von X nach oben beschränkt. Falls f im Nullpunkt nach oben beschränkt ist, dann ist f sogar auf jeder Kugel von X beschränkt. Wählt man in Satz 2.11 $G(u, v) = u + v$ und zieht in Betracht, dass f nach unten halbstetig ist, so folgt dass f auf der Einheitskugel von X beschränkt ist, d.h. die Familie $\mathfrak{A}$ ist gleichmässig beschränkt.

3. Fastkonvexe Funktionen. Im allgemeinen ist eine G-konvexe Funktion nicht stetig. Diese Feststellung ergibt sich sofort, wenn man beachtet, dass jede reellwertige Funktion, die auf der reellen Zahlenachse definiert und beschränkt ist, G-konvex ist (in der natürlichen Topologie und mit dem üblichen Intervallbegriff). Andererseits ist jede lokal nach oben beschränkte konvexe Funktion stetig. Im folgenden werden wir eine hinreichende Bedingung dafür angeben, dass eine lokal nach oben beschränkte Funktion stetig ist.

Definition 3.1. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Funktion $f: X \to \mathbf{R}$ heisst *fastkonvex an der Stelle* $x_0 \in X$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$

und jedes $U \in \mathcal{V}(x_0)$ ein $V \in \mathcal{V}(x_0)$ existiert, das folgende Eigenschaften besitzt:

(3.1) $$V \subseteq U;$$

(3.2) für alle $x, y \in V$, $x \neq y$, gibt es ein $z \in U$,
$\alpha = \alpha(\varepsilon, U, V, x, y) \in \mathbf{R}$ und $\beta = \beta(\varepsilon, U, V, x, y) \in \mathbf{R}$, so dass $0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon, |\beta| \leqslant \varepsilon$ und $f(x) \leqslant \alpha f(z) + (1 - \beta) f(y)$ gilt.

Beispiel 3.2. Eine im Sinne von Jensen konvexe Funktion (Beispiel 2.5) ist in jedem Punkt fastkonvex. In der Tat, gegeben seien $x_0 \in X$, $0 < \varepsilon < 1$ und eine Umgebung U von x_0. Wir wählen eine kreisförmige Umgebung W des Nullpunkts, so dass gilt $x_0 + W + W \subseteq U$. Wir haben dann $V = x_0 + \frac{1}{n} W \in \mathcal{V}(x_0)$ und $V \subseteq U$ für alle $n \in N$. Es seien nun $x, y \in V$ und $z = y + n(x - y)$. Weil die Punkte x und y in der Form $x = x_0 + \frac{1}{n} u$, $y = x_0 + \frac{1}{n} v$ mit $u, v \in W$ dargestellt werden können, gilt

$$z = x_0 + \frac{1}{n} v + u - v = x_0 + u - \left(1 - \frac{1}{n}\right) v \in x_0 + W + W \subseteq U.$$

Andererseits haben wir $x = \frac{1}{n} z + \left(1 - \frac{1}{n}\right) y$ und demnach

$$f(x) \leqslant \frac{1}{n} f(x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(y).$$

Wählt man n so dass gilt $\frac{1}{n} < \varepsilon$, so folgt, dass für $\alpha = \beta = \frac{1}{n}$ die Bedingungen in Definition 3.1 erfüllt werden.

Auf ähnliche Weise kann man zeigen, dass auch eine rational s-konvexe Funktion (vgl. [2]) in jedem Punkt fastkonvex ist. In diesem Fall wählt man $\alpha = \frac{1}{n^s}$ und $\beta = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s$, wobei $\alpha < \varepsilon$, $\beta < \varepsilon$.

SATZ 3.3. *Ist die Funktion $f: X \to \mathbf{R}$ an der Stelle $x_0 \in X$ fastkonvex und nach oben beschränkt, dann ist sie an dieser Stelle stetig.*

Beweis. Es sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $U \in \mathcal{V}(x_0)$ und $0 < \gamma$, so dass $f(z) \leqslant \gamma$ für alle $z \in U$ gilt. Benutzen wir die Bezeichnungen aus Definition 3.1, so folgt

$$f(x) \leqslant \alpha\gamma + (1 - \beta) f(y).$$

Hieraus ergibt sich $|f(z)| \leqslant \eta$ für alle $z \in V$, wobei $\eta = 4\gamma$ gesetzt wurde. Demnach gilt für alle $x, y \in V$

$$f(x) - f(y) \leqslant \alpha\gamma - \beta f(y) \leqslant (\alpha + |\beta|)\eta \leqslant 2\varepsilon\eta.$$

Also ist f im Punkt x_0 stetig.

Beispiel 3.4. Es sei X eine konvexe Teilmenge eines reellen oder komplexen lokalkonvexen Raumes und T eine Teilmenge von $]0, 1[$, für die 0 ein Häufungspunkt ist. Es sei $f: X \to R$ eine Funktion, die folgende Eigenschaft besitzt: für alle $x, y \in X$ und $t \in T$ gibt es zwei reelle nichtnegative Zahlen $\alpha = \alpha(t, x, y)$ und $\beta = \beta(t, x, y)$ mit

$$\lim_{t \searrow 0} \alpha(t, x, y) = 0, \quad \lim_{t \searrow 0} \beta(t, x, y) = 0,$$

wobei die Konvergenz bezüglich (x, y) gleichmässig ist, so dass gilt

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \beta) f(y).$$

Eine solche Funktion ist in jedem Punkt von X fastkonvex. In der Tat, gegeben seien $x_0 \in X$, $U \in \mathcal{V}(x_0)$ und $\varepsilon > 0$. Wählen wir eine konvexe Umgebung V von x_0 mit $V \subseteq U$ (in der induzierten Topologie) und setzen wir $z = tx + (1 - t)y$, $t \in T$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \varepsilon$, $|\beta| \leqslant \varepsilon$ für $x, y \in V$, dann sind die Bedingungen von Definition 3.1 erfüllt.

Es sei nun $g: X \to \mathbf{R}$ eine konvexe Funktion im Sinne von Jensen und $h: X \to]0, +\infty[$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(3.4) $$h\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) = \frac{1}{2}(h(x) + h(y)) \text{ für alle } x, y \in X;$$

(3.5) $\frac{h(x)}{h(y)}$ ist beschränkt.

Dann ist die Funktion $f = \frac{g}{h}$ in jedem Punkt von X fastkonvex. In der Tat, setzen wir $T =]0, 1[\cap Q$, dann gilt

$$f(tx + (1 - t)y) \leqslant \frac{th(x)}{th(x) + (1 - t)h(y)} \cdot f(y) + \frac{(1 - t)h(y)}{th(x) + (1 - t)h(y)} \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in X$ und $t \in T$. Setzen wir

$$\alpha = \alpha(t, x, y) = \frac{th(x)}{th(x) + (1 - t)h(y)} \text{ und } \beta = \alpha,$$

dann lässt sich eine positive Konstante K so angeben, dass gilt

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 2t \frac{h(x)}{h(y)} \leqslant K \cdot t, \ \forall x, y \in X, \forall t \in T, t \leqslant \frac{1}{2}.$$

Also streben α und β gleichmässig gegen 0, falls $t \to 0$. Die Funktion f ist demnach auf Grund der vorhergehenden Bemerkung in jedem Punkt von X fastkonvex.

Andererseits folgt, wegen $\beta = \alpha$, dass f quasikonvex ist. Demnach ist sie G-konvex, wobei $G(u, v) = \max\{u, v\}$ gewählt wurde. Ist nun X eine offene, konvexe Menge von zweiter Kategorie und ist f nach unten halbstetig, so folgt nach Satz 2.11, dass f in jedem Punkt von X nach oben beschränkt ist. Unter den gleichen Voraussetzungen ist die Funktion f dann nach Satz 3.3 sogar stetig auf X.

4. Quasilineare Abbildungen. Es seien Y und Z reelle oder komplexe normierte lineare Räume und X eine konvexe Teilmenge von Z. Nach V. S. ŠULMAN [6] heisst eine Abbildung $A : X \to Y$ *quasilinear*, wenn $A(\mathrm{co}W) \subseteq \mathrm{co}A(W)$ für jede Teilmenge W von X gilt. Eine Abbildung $A : X \to Y$ ist genau dann quasilinear, wenn es für alle $x, y \in X$ und $t \in [0, 1]$ ein $\alpha \in [0, 1]$ gibt (das von t, x, y, A abhängt), so dass gilt

$$A(tx + (1 - t)y) = \alpha A(x) + (1 - \alpha)A(y).$$

Ist I ein Intervall der reellen Zahlenachse und $A : I \to \mathbf{R}$ eine monotone Funktion, dann ist A quasilinear. Auch die Abbildung $A = \frac{B}{l}$ ist quasilinear, falls $l : X \to \mathbf{R}$ ein affines Funktional ist, das keine Nullstellen in der konvexen Teilmenge X von Z besitzt, und $B : X \to Y$ eine affine Abbildung bezeichnet (d.h. eine Abbildung, so dass für alle $x, y \in X$ und $t \in [0, 1]$

$$B(tx + (1 - t)y) = tB(x) + (1 - t)B(y)$$

gilt).

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit für quasilineare Abbildungen.

SATZ 4.1. *Es sei Z ein Banachraum, X eine offene konvexe Teilmenge von Z und $\mathcal{A}$ eine Familie stetiger quasilinearer Abbildungen $A : X \to Y$. Gilt*

$$\sup \{\|A(x)\| : A \in \mathcal{A}\} < +\infty \quad \textit{für alle} \quad x \in X, \tag{4.1}$$

dann gibt es für jedes $x_0 \in X$ ein $V \in \mathcal{V}(x_0)$ und $K > 0$, so dass $\|A(x)\| \leqslant K$ für alle $x \in V$ und alle $A \in \mathcal{A}$ gilt.

B e w e i s. Wir setzen $f(x) = \sup\{\|A(x)\| : A \in \mathcal{A}\}$ für alle $x \in X$. Sind x, y aus X und t aus $[0, 1]$, dann gilt

$$\|A(tx + (1 - t)y)\| = \|\alpha A(x) + (1 - \alpha)A(y)\| \leqslant \alpha \|A(x)\| +$$
$$+ (1 - \alpha)\|A(y)\| \leqslant \max\{\|A(x)\|, \|A(y)\|\}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$, also auch $f(tx + (1 - t)y) \leqslant \max\{f(x), f(y)\}$. Die Funktion f ist demnach quasikonvex. Beachtet man, dass f nach unten halbstetig ist und dass eine offene Teilmenge eines Banachraumes von zweiter Kategorie ist, so ergibt sich nach Satz 2.11, dass f in jedem Punkt von X nach oben beschränkt ist. Für jedes $x_0 \in X$ gibt es also ein $V \in \mathcal{V}(x_0)$ und $K > 0$, so dass $\|A(x)\| \leqslant f(x) \leqslant K$ für alle $x \in V$ und $A \in \mathcal{A}$ gilt.

Bevor wir den nächsten Satz beweisen, bemerken wir, dass, im Falle einer stetigen quasilinearen Abbildung A, für alle $x, y \in X$ mit $A(x) \neq A(y)$, die nichtnegative Zahl $\alpha = \alpha(t; x, y, A)$ (aus der Definition der

quasilinearen Abbildung) gegen 0 strebt, wenn $t \to 0$. In der Tat, wäre das nicht der Fall, dann würde es ein $\alpha_0 > 0$ geben, so dass

$$A(y) = \alpha_0 A(x) + (1 - \alpha_0)A(y)$$

gilt. Hieraus würde $A(x) = A(y)$ folgen, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Falls $A(x) = A(y)$, setzen wir $\alpha = 0$ für alle $t \in [0, 1]$.

SATZ 4.2. *Es sei Z ein Banachraum, X eine offene, konvexe Teilmenge von Z und $\mathcal{A}$ eine Familie stetiger quasilinearer Abbildungen $A : X \to Y$. Gilt (4.1) und strebt $\alpha(t; x, y, A)$ gleichmässig bezüglich x und A gegen 0 falls $t \to 0$, dann ist die Familie $\mathcal{A}$ gleichstetig in jedem Punkt von X.*

B e w e i s. Es sei x_0 aus X und $g_A(x) = \|A(x) - A(x_0)\|$. Wendet man Satz 4.1 für die Familie quasilinearer Abbildungen an, die durch $B(x) = A(x) - A(x_0)$, $x \in X$, erklärt sind, dann folgt die Existenz eines $V \in \mathcal{V}(x_0)$ und eines $K > 0$ so dass $g_A(x) \leqslant K$ für alle $x \in V$ und alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Es sei $\varepsilon > 0$ und W eine Kugel mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt so dass $x_0 + W \subseteq V$ gilt. Für alle $n \in N$ setzen wir $U_n = x_0 + \frac{1}{n} W$. Falls $y \in U_n$, dann liegt der Punkt $x = x_0 + n(y - x_0)$ in V und es gilt $y = \frac{1}{n} x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_0$. Weil $A \in \mathcal{A}$ quasilinear ist, gibt es ein $\alpha_n \in [0, 1]$, $\alpha_n = \alpha\left(\frac{1}{n}; x, x_0, A\right)$ derart dass

$$g_A(y) = \alpha_n g_A(x) \leqslant \alpha_n K.$$

Gemäss unserer Voraussetzung haben wir $\alpha_n \to 0$ gleichmässig bezüglich x und A, also gilt $\alpha_n K < \varepsilon$ *für* alle $x \in X$ und $A \in \mathcal{A}$ falls n genügend gross ist. Ist n_0 eine solche natürliche Zahl und $U = U_{n_0}$, dann haben wir $0 \leqslant g_A(y) < \varepsilon$ für alle $y \in U$ und alle $A \in \mathcal{A}$, d.h. die Familie $\mathcal{A}$ ist gleichstetig im Punkt x_0.

Bezeichnet $\mathcal{A}$ eine Familie von Abbildungen $A : X \to Y$, dann nennen wir einen Punkt $x \in X$ *singular für* $\mathcal{A}$, falls $\sup\{\|A(x)\| : A \in \mathcal{A}\} = +\infty$. Es bezeichne $S_{\mathcal{A}}$ die Menge der singularen Punkte für $\mathcal{A}$. Ist $S_{\mathcal{A}}$ eine überabzählbare, dichte G_δ-Menge, dann nennen wir $S_{\mathcal{A}}$ *superdicht*.

SATZ 4.3. *Es sei Z ein Banachraum, X eine offene, konvexe Teilmenge von Z und $\mathcal{A}$ eine Familie stetiger quasilinearer Abbildungen $A : X \to Y$. Ist die Familie $\mathcal{A}$ nicht lokal beschränkt, dann ist die Menge $S_{\mathcal{A}}$ superdicht.*

B e w e i s. Die Funktion f sei wie im Beweis des Satzes 4.1 definiert. Sie ist quasikonvex und halbstetig nach unten. Auf Grund von Satz 2.10 folgt, dass $S(f) = S_{\mathcal{A}}$ der Durchschnitt abzählbar vieler offener und in X dichter Mengen ist. Weil X ein vollständiger metrischer Raum ist (bezüglich der durch die Norm von Z erzeugten Metrik), der keine isolierten Punkte besitzt, ist $S_{\mathcal{A}}$ superdicht (vgl. diesbezüglich [5], S. 103).

LITERATUR

[1] Beckenbach, E. F., *Generalized Convex Functions*, Bull. Am. Math. Soc., **43**, 363–371 (1937).

[2] Breckner, W. W., *Eine Verallgemeinerung des Prinzips der gleichmässigen Beschränktheit*, Mathematica—Revue Anal. Numer. Theorie Approx., Ser. L'Analyse Numer. Theorie Approx. **9**, 1, 11–18 (1980).

[3] Cech, E., *Topological spaces*, Prague: Academia, 1966.

[4] Kolumbán, I., *Das Prinzip der Kondensation der Singularitäten präkonvexer Funktionen*, Mathematica — Revue Anal. Numer. Theorie Approx., Ser. L'Analyse Numer. Theorie Approx. **9**, 1, 59–63 (1980).

[5] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[6] Šulman, V. S., *Odna teorema o nepodvižnoj točke*, Funkcionalnyj analiz i ego prilož. **13**, 1, 88–89 (1979).

[7] Walter, R., *Konvexität in riemannschen Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der D. M. V. **83**, 1, 1–31 (1981).

Eingegangen 10.I.1982

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de matematică
3400 *Cluj-Napoca*
str. Kogălniceanu 1