MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N° 1—2, 1982, pp. 129—137

SUR UNE ALLURE DE QUASI-CONVEXITÉ D'ORDRE SUPÉRIEUR

par
ELENA POPOVICIU
(Cluj-Napoca)

1. Dans ce travail nous présentons une nouvelle notion d'allure pour les fonctions réelles et d'une variable réelle. Il s'agit d'une propriété de quasi-convexité d'ordre supérieur.

Nous commençons en faisant la remarque que l'étude des allures de convexité d'ordre supérieur et des allures encore plus générales a comme point de départ l'analyse du comportement par rapport à l'ensemble des polynomes d'un degré donné. Le nombre entier $n \geqslant 0$ étant fixé, on désigne par $\mathfrak{L}_n$ l'ensemble des polynomes de degré au plus égal a n. Un étude des allures aux quelles nous nous sommes rapporté plus haut peut se developper en trois diréctions: mêttre en évidence un certain comportement des éléments de l'ensemble $\mathfrak{L}_{n+1}$ par rapport aux éléments de l'ensemble $\mathfrak{L}_n$, $n \geqslant 0$ et chercher les fonctions qui ne se réduissent pas aux polynomes de $n+1$-ième degré et qui ont le comportement en discution, par rapport aux éléments de $\mathfrak{L}_n$; mêttre en évidence une propriété d'intersection avec les éléments de $\mathfrak{L}_n$; étudier la décomposition de l'ensemble de définition d'une fonction ayant un comportement donné par rapport aux éléments de $\mathfrak{L}_n$, $n \geqslant 1$ fixé, en sous ensembles sur lesquels la fonction considérée a des comportements precisés par rapport aux éléments de $\mathfrak{L}_{n-k}$, pour k fixé, $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Chacune de ces trois directions conduit à la découvert de certaines allures. L'ensemble $\mathfrak{L}_n$ peut êttre remplaçer par un ensemble interpolatoire plus général.

Dans ce travail nous allons compléter nos résultats plus anciens concernant les diverses propriétés d'allure.

2. Soit $X \subseteq \mathbf{R}$. Le nombre entier $n \geqslant 0$ étant fixé, supposons que l'on a card $X \geqslant n+2$. Considérons une fonction $f: X \to \mathbf{R}$. Les points distincts

(1) $$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1}$$

où $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, étant donnés, on peut construire le polynome de n-ième degré

$$(2) \qquad P = L(\mathfrak{P}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+1};\ f)$$

qui satisfait les conditions

$$P(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

c'est à dire le polynome d'interpolation de Lagrange, de degré n, attaché à la fonction f et aux noeuds (1). Pour construire le polynome (2) on utilise seulement la restriction de la fonction f aux noeuds (1). Désignons cette restriction avec g. Le polynome (2) est *une* prolongement de g à l'ensemble $\mathbb{R}$. Mais ce prolongement présent d'interêt sur X où f est définie. En faisant une comparaison entre f et P, sur les points différents de x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, on obtient une information sur le comportement de f par rapport aux éléments de l'ensemble $\mathfrak{P}_n$. La voie la plus naturelle de comparer f avec P, sur $x_{n+2} \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, $x_{n+2} \in X$, est celle d'examiner le signe de la différence $f(x_{n+2}) - P(x_{n+2})$. Mais, évidemment, on peut réaliser cette comparaison aussi d'autre menière [2]. Si nous nous arretons à l'investigation du signe de la différence $f(x_{n+2}) - P(x)_{n+2}$, allors nous sommes conduits à utiliser la formule

$$(3) \qquad f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{P}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+1};\ f)(x_{n+2}) =$$
$$= (x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2) \ldots (x_{n+2} - x_{n+1})[x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+1},\ x_{n+2};\ f]$$

où par $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2};\ f]$ on a désigné la différence divisée de la fonction f sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}$. Si l'on a $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < x_{n+2}$, alors, dans la formule (3), le signe du premier membre est égal au signe de la différence divisée du deuxième membre. Compte tennant de cette situation, on a consideré [4] les fonctions f pour lesquelles l'une et toujours la même des cinque conditions

$$(4) \qquad f(x_{n+2}) - L(\mathfrak{P}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+1};\ f)(x_{n+2}) > 0,\ \geqslant 0,\ = 0,$$
$$\leqslant 0,\ < 0$$

est remplie, quels que soient les points

$$(5) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$$

de l'ensemble X.

DEFINITION 1. *La fonction f s'appelle convexe (nonconcave, polynomiale, nonconvexe respectivement concave) d'ordre n sur l'ensemble X, si l'on a dans* (4), > 0($\geqslant 0$, $= 0$, $\leqslant 0$ *respectivement* < 0), *toujours, quels que soient les points* (5) *de l'ensemble X* [4].

La différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\ f]$ étant simétrique par rapport aux points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, on a donnée aussi la

DEFINITION 2. *La fonction f s'appelle convexe (nonconcave, polynomiale, nonconvexe respectivement concave) d'ordre n, sur X, si l'on a toujours* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\ f] > 0$ ($\geqslant 0$, $= 0$, $\leqslant 0$ *respectivement* < 0), *quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ de l'ensemble X* [4].

Si $H \in \mathfrak{P}_{n+1}$ et $H \notin \mathfrak{P}_n$, alors, quels que soient les points x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, on a ou bien toujours $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\ H] > 0$ ou bien toujours $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\ H] < 0$. On remarque donc que le comportement introduit par les définitions 1 et 2 (elle sont équivalentes) est une généralisation du comportement des éléments de l'ensemble $\mathfrak{P}_{n+1}$ par rapport aux éléments de l'ensemble $\mathfrak{P}_n$. Cette généralisation est assez naturelle car

$$(6) \qquad [x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+2};\ f] = [x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+2};\ V]$$

où

$$(7) \qquad V = L(\mathfrak{P}_{n+1};\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+2};\ f).$$

La relation d'égalité (6) peut être le point de départ pour obtenir des nouvelles allures en remplaçant la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2};\ \cdot]$ par d'autres fonctionnelles qui gardent les propriétés les plus esentielles des différences divisées.

3. Les fonctions f pour lesquelles dans (4) on a toujours l'inégalité >0 ou bien toujours < 0, ne peuvent prendre les valeurs d'un polynome de degré n qu'au plus sur $n+1$ points distincts de l'ensemble X. Une fonction $f: X \to \mathbb{R}$ qui a cette propriété s'appelle fonction $(n+1)$ — valente par rapport à l'ensemble $\mathfrak{P}_n$, sur X. Pour plus de détails voir [4].

4. Considérons maintenant les ensembles

$$(8) \qquad \mathcal{C}(\mathfrak{P}_n,\ X,\ +) = \{f: X \to \mathbb{R} \mid [x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+2};\ f] > 0,$$

quels que soient $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$ distincts}

et

$$(9) \qquad \mathcal{C}(\mathfrak{P}_n,\ X,\ -) = \{f: X \to R \mid [x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+2};\ f] < 0,$$

quels que soient $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, distincts}.

Dans [1], nous avons considéré les ensembles

$$(10) \qquad S\begin{pmatrix} \mathfrak{P}_n; & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ & f(x_1), & f(x_2), & \ldots, & f(x_n) \end{pmatrix} =$$
$$= \{H \in \mathfrak{P}_n \mid H(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

L'ensemble (10) s'appelle épi interpolatoire d'ordre 1, de l'ensemble $\mathfrak{P}_n$, construit pour la fonction f, sur les points $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

THÉORÈME 1. *Si $x_0 > x_n$ et P_1, P_2 sont deux éléments de l'ensemble* (10) *et $P_1(x_0) < P_2(x_0)$ alors*

$$[x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ x_0;\ P_1] < [x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ x_0;\ P_2].$$

Nous avons donné cette propriété dans [1]. Elle est une propriété de monotonie, par épis, des différences divisées. Si l'on suppose que card $X \geqslant n+3$, alors on peut considérer les points

$$(11) \qquad x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$$

de l'ensemble X. Pour la fonction f on peut construire les polynomes

$$V_1 = L(\mathfrak{L}_n;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ f) \tag{12}$$

et

$$V_2 = L(\mathfrak{L}_n;\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ f). \tag{13}$$

Le théorème 1 nous permet de démontrer le

THÉORÈME 2. *Si*

$$f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_n,\ X,\ +)$$

alors

$$V_1(x_{n+3}) < V_2(x_{n+3}) \tag{14}$$

et

$$[x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ V_1] < [x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ V_2]. \tag{15}$$

Comme nous l'avons remarqué dans [2], l'inégalité (14) résulte directement de la définition 1 et de la propriété de monotonie, au sens de laquelle les inégalités (11) impliquent l'inégalité (15).

On a aussi le

THÉORÈME 3. *Si*

$$f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_n,\ X,\ -)$$

alors

$$V_1(x_{n+3}) > V_2(x_{n+3}) \tag{16}$$

et

$$[x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ V_1] > [x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ V_2]. \tag{17}$$

Les théorèmes 2 et 3 nous montrent que les propriétés de *convexité* et de *concavité* d'ordre n d'une fonction f sur un ensemble X reviennent à des propriétés de *monotonie* de certaines différences divisées.

Les différences divisées qui ont intervennu dans (15) et dans (17) peuvent être exprimées avec les différences divisées de la fonction f. En effet

$$[x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ V_1] = [x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ V_1] = \tag{18}$$

$$= [x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ f]$$

et

$$[x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ V_2] = [x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ f]. \tag{19}$$

Il en résulte qu'au lieu de (15) on peut écrire

$$[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ f] < [x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ f] \tag{20}$$

et au lieu de (17) on peut écrir

$$[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ f] > [x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ f]. \tag{21}$$

Ainsi, la convexité et la concavité d'ordre n sur X de la fonction f reviennent à une certaine propriété de monotonie des *différences divisées de la fonction* f: l'hypothèse $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_n,\ X,\ +)$ étant satisfaite, (11) implique (20) et l'hypothèse $f \in \mathfrak{C}(\mathfrak{L}_n,\ X,\ -)$ étant satisfaite, (11) implique (21).

On peut obtenir ce résultat aussi en faisant intervenir la formule de récurrence des différences divisées. Mais c'est une voie qui ne peut pas être étendue au cas dans lequel au lieu de $\mathfrak{L}_n$ on considère un ensemble interpolatoire F qui n'est pas linéaire.

5. Pour la fonction $f: X \to \mathbf{R}$, où $X \subseteq \mathbf{R}$ et card $X \geqq n+3$, on peut maintenant examiner dans l'hypothèse (11) le comportement des trois différences divisées

$$[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ f],\ [x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ f], \tag{22}$$

$$[x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{n+3};\ f]$$

DÉFINITION 3. *La fonction $f: X \to \mathbf{R}$ s'appelle quasi-convexe (respectivement strictement quasi-convexe) d'ordre n sur l'ensemble X si l'on a*

$$[x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ f] \leqq \max\{[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ f], \tag{23}$$

$$[x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{n+3};\ f]\}$$

(respectivement

$$[x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{n+2};\ f] < \max\{[x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n+1};\ f], \tag{24}$$

$$[x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_{n+3};\ f]\}).$$

Évidemment, la propriété qui est inclue dans l'énoncé de la définition 3 est étroittement liée à la propriété de monotonie des différences divisées qui a intervenu dans les théorèmes 2 et 3.

On obtient immédiatement le

THÉORÈME 4. *Si $X = [a,\ b]$, $f: [a,\ b] \to \mathbf{R}$ et l'intervalle $[a,\ b]$ se décompose en au plus deux sousintervalles $[a,\ c]$, $[c,\ b]$, la fonction f étant concave d'ordre n sur $[a,\ c]$ et convexe d'ordre n sur $[c,\ b]$, alors f est strictement quasi-convexe d'ordre n sur $[a,\ b]$.*

La démonstration du théorème 4 est une conséquence immédiate des théorèmes 2 et 3. Si $c = a$ ou $c = b$, on applique respectivement le théorème 2 ou 3.

Si nous supposons $n = 0$, alors nous obtenons les fonctions quasi-convexes (respectivement strictement quasi-convexes habituelle au sens que $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ et pour $x_1 < x_2 < x_3$, $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, 3$, on a

$$f(x_2) \leqq \max \{f(x_1), f(x_2)\} \tag{25}$$

(respectivement

$$f(x_2) < \max \{f(x_1), f(x_2)\}). \tag{26}$$

Les fonctions f ayant la proprieté (25) respectivement la propriété (26) ont été considerées pour la première fois dans le travail [3].

6. Les allures données par les définitions 1 et 2 ont été généralisées en remplaçant l'ensemble $\mathfrak{P}_n$ par un ensemble interpolatoire F quelconque [2]. Dans ce cas général, quand F n'est pas supposé linéaire des propositions analogues aux théorèmes 2 et 3 ont lieu. On peut donc étendre à ce cas la définition 3.

Une telle généralisation présente un interêt quand l'ensemble interpolatoire F a comme éléments des fonctions qui satisfont une équation différentielle d'ordre n ou un autre type d'équation fonctionnelle. Comme dans le cas d'un ensemble interpolatoire F qui n'est pas linéaire on n'a pas à la disposition des différences divisées, l'étude du comportement d'une fonction f par rapport aux éléments de l'ensemble F doit se faire en utilisant un analogue de la différence qu'on trouve dans le premier membre de la formule (3).

Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé et F un ensemble de fonctions réelles et d'une variable réelle, continues sur un intervalle $[a, b]$. Supposons que l'ensemble F est interpolatoire d'ordre n sur $[a, b]$. Il existe donc, pour chaque système de n points distincts de $[a, b]$.

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{27}$$

et pour chaque système de n nombres

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{28}$$

une fonction $\varphi \in F$ et une seule, qui satisfait les conditions

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{29}$$

Si les nombre (28) sont les valeurs de la fonction f sur les points (27), alors on utilise pour la fonction $\varphi \in F$ qui prend les valeurs $f(x_i)$ de la fonction f sur les points (27), la notation

$$L(F; x_1, x_2, \ldots, x_n; f) \tag{30}$$

Si f est définie sur un ensemble $X \subseteq [a, b]$ qui contient au moins $n + 1$ points distincts, parmi lesquels les points (27), alors on peut étudier le comportement de la fonction f par rapportau x éléments de l'ensemble F, en utilisant pour $x_{n+1} \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ la différence

$$f(x_{n+1}) - L(F; x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) \tag{31}$$

Comme on peut le trouver dans notre travail [2], l'analyse du signe de la différence (31), quand les points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \tag{32}$$

sont choisis de toutes les manières possibles dans X, nous conduit à la définition des proprietés de F-convexité, F-nonconcavité, F-polynomialité, F-nonconvexité, F-concavité de la fonction f sur X. Ces propriétés, dans cettes ordre corespondent respectivement aux inégalités

$$f(x_{n+1}) - L(F; x_1, x_2, \ldots, x_n : f)(x_{n+1}) > 0, \ \geqq 0, \ = 0, \ \leqq 0, \ < 0, \tag{33}$$

dans chacun des cas les points (32) étant choisis de toute les manières possibles dans X.

Les inégalités (32) étant satisfaites, on peut construire l'ensemble

$$S\left(F; \begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n-1} \\ f(x_1), & f(x_2), & \ldots, & f(x_{n-1}) \end{matrix}\right), \tag{34}$$

que nous avons appellé [1], épi interpolatoire d'ordre 1, de l'ensemble F.

La fonction (30) est un élément de l'epi (34) et si nous supposons que f est F-convexe sur X, alors

$$L(F; x_1, x_2, \ldots, x_n; f)(x_{n+1}) < f(x_{n+1}). \tag{35}$$

En considérant maintenant les points

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+2} \tag{36}$$

de l'ensemble X, on peut construire les fonctions

$$L(F; u_1, u_2, \ldots, u_n; f), \ L(F; u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}; f) \text{ et}$$
$$L(F; u_3, u_4, \ldots, u_{n+2}; f)$$

LEMME 1. *Si la fonction f est F-convexe sur X, alors on a les inégalités*

$$L(F; u_1, u_2, \ldots, u_n; f)(u_0) < L(F; u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}; f)(x_0) < \tag{37}$$
$$< L(F; u_3, u_4, \ldots, u_{n+2}; f)(u_0),$$

quel que soit le point $u_0 \in X$, $u_0 > u_{n+2}$.

Étant supposé (36), les inégalité (37) peuvent être considérés comme une proprieté de monotonie par épis, si l'on tient compte du fait que les fonctions

$$L(F; u_1, u_2, \ldots, u_n; f)$$

et

$$L(F; u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}; f)$$

appartiennent à l'épi

$$S\begin{pmatrix} F; & u_2, & u_3, & \ldots, & u_n \\ & f(u_2), & f(u_3), & \ldots, & f(u_n) \end{pmatrix}$$

et les fonctions

$$L(F; u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}; f)$$

et

$$L(F; u_3, u_4, \ldots, u_{n+2}; f)$$

appartiennent à l'épi

$$S\begin{pmatrix} F; & u_3, & u_4, & \ldots, & u_{n+1} \\ & f(u_3), & f(u_4), & \ldots, & f(u_{n+1}) \end{pmatrix}$$

Des remarques analogues peuvent être faites și f est supposée F-concave sur X. Alors d'une manière naturelle s'impose la.

DÉFINITION 4. *La fonction $f: X \to \mathbf{R}$ s'appelle F-quasi-convexe (respectivement F-strictement quasi-convexe) sur X si pour chaque système de points*

$$u_1 < u_2 < \ldots < u_{n+2} < u_0$$

de l'ensemble X on a

$$f(x_0) - L(F; u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}; f)(u_0) \leqq \max\{f(u_0) - L(F; u_1, u_2, \ldots, u_n; f)(u_0), (f(u_0) - L(F; u_3, u_4, \ldots, u_{n+2}; f)(u_0)\}$$

(respectivement

$$f(u_0) - L(F; u_2, u_3, \ldots, u_{n+1}; f)(u_0) < \max\{f(u_0) - L(F; u_{1,}, u_2, \ldots, u_n; f)(u_0), f(u_0) - L(F; u_3, u_4, \ldots, u_{n+2}; f)(u_0)\}).$$

THÉORÈME 5. *Si la fonction f est F-convexe sur X, alors elle est aussi F-strictement quasi-convexe sur X.*

La démonstration est une conséquance du lemme 1.

Les propriétés de quasi-convexité dont nous avons parlé sont plus générales que celles de convexité d'ordre corespondant qui ont intervenu. Mais un étude comparatif s'impose.

Quand l'ensemble interpolatoire F est linéaire, sans se réduire à l'ensemble $\mathfrak{L}_{n-1}$, les allures de quasi-convexité corespondantes peuvent être étudiées avec les différences divisées généralisées [2].

7. Il est intéressant à remarquer comme la propriété de strictement quasi-convexité d'ordre 0 sur X d'une fonction $f: X \to \mathbf{R}$ a comme conséquance la bivalence de f par rapport à l'ensemble $\mathfrak{L}_0$. En même temps une fonction qui est strictement quasi-convexe d'ordre 0 sur X peut prendre

les valeurs d'un polynome de premier degré plus de deux fois. On peut donc faire une classification des fonctions strictement quasi-convexes d'ordre 0, sur un ensemble X, d'aprez le nombre des points sur lesquels elles peuvent prendre les valeurs d'un polynome de premier degré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Moldovan (Popoviciu), Elena, *Sur une généralisation des fonctions convexes* Mathematica (Cluj), **1** (24), 49–80 (1959).

[2] Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, 1972.

[3] Popoviciu, Tiberiu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. Soc. Sci. Acad. Roumaine, **20**, 45–49 (1938).

[4] Popoviciu, Tiberiu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

Reçu le 5.VI.1981.

str. Dorobanților 40
3400 *Cluj-Napoca*