MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N° 1 — 2, 1982, pp. 7 — 14

En signe d'hommage à l'Académicien CAIUS IACOB à l'occasion de son 70-ème anniversaire.

APPLICATIONS DE LA METHODE DE S.A. TCHAPLIGUINE A L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS AVEC CIRCULATION, DANS LE CAS DE L'OBSTACLE CIRCULAIRE

par
DORIN BENA
(București)

1. Conditions aux limites

Supposons que l'on ait à étudier le mouvement plan, permanent, avec circulation d'un fluide compressible en présence de cercle $|z| = 1$. Le fluide este animé à l'infini d'une vitesse de module V_∞ qui fait avec Ox l'angle α. L'écoulement este supposé subsonique.

On connait [1] que la méthode de Tchapliguine consiste à approximer le mouvement compressible d'un fluide réel par celui d'un fluide fictif, autour du même obstacle. La loi de compressibilité de Tchapliguine revient donc à admettre que, la courbe adiabatique — isentropique du plan $\left(\frac{1}{\rho}, p\right)$ est remplacée par une droite.

On peut former des écoulements compressibles avec circulation du fluide fictif dans le plan $z = x + iy$, ayant un écoulement incompressible dans le plan de base $\zeta = \xi + i\eta$ et ayant une fonction $h(\zeta)$, holomorphe et sans zéros dans le $|\zeta| > 1$.

Soit $f = f(\zeta) = \varphi + i\psi$ le potentiel complexe de l'écoulement du plan de base et $\widetilde{\rho}_0$ la valeur de la masse spécifique du fluide incompressible.

Donc :

$$f(\zeta) = \lambda V_\infty \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta \tag{1.1}$$

où la circulation est choisie ainsi que le point d'arrêt soit situé sur la circonférence, donc :

$$\Gamma = 4\pi\lambda V_\infty \sin \sigma_0 \tag{1.2}$$

Nous prennons pour $h(\zeta)$ l'expression :

$$h(\zeta) = \lambda e^{i\alpha} h_1(\zeta) \tag{1.3}$$

où $h_1(\infty) = 1$; $h_1(\zeta) \neq 0$ pour $|\zeta| > 1$.

Le développement de $h(\zeta)$ au voisinage du point à l'infini est :

$$h_1(\zeta) = 1 + \frac{A_1}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{A_n}{\zeta^n} + \ldots \tag{1.4}$$

Une fois $f(\zeta)$ et $h(\zeta)$ choisies, passons au plan physique de l'écoulement par la formule :

$$dz = C_1 h(\zeta) + C_2 \overline{\left(\frac{df}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{h(\zeta)}} \tag{1.5}$$

La relation (1.5) est une généralisation de la relation IACOB — TSIEN pour le cas des mouvements avec circulation [2]. La transformation définie par (1.5) doit être homéomorphe, en particulier, pour un contour fermé dans le plan ζ, on doit avoir un contour fermé dans le plan z.

Pour cela il *est nécessaire* d'avoir :

$$C_1 \oint h(\zeta) d\zeta + C_2 \oint \left(\frac{dl}{d\zeta}\right)^2 \frac{d}{h(\zeta)} = 0 \tag{1.6}$$

et

$$\left| \frac{1}{h(\zeta)} \frac{df}{d\zeta} \right| < \sqrt{\frac{C_1}{|C_2|}} \quad \text{pour } |\zeta| = 1 \tag{1.7}$$

Le résidu de $h(\zeta)$ à l'infini est donné par :

$$A_1 = i \frac{C_2 V_\infty \Gamma \tilde{\rho}_\infty}{\pi \lambda \tilde{\rho}_0} \tag{1.8}$$

L'académicien C. IACOB [3] a énoncé une condition suffisante qui assure la réversibilité globale de la transformation (1.5).

Posons :

$$\frac{df}{d\zeta} = e^{-i\omega_0(\xi)} \tag{1.9}$$

où

$$\omega_0(\zeta) = \theta_0 + i\sigma_0 = i \log \frac{df}{d\zeta} \tag{1.10}$$

et désignons par $V^{(0)} = \left|\frac{df}{d\zeta}\right|$ le module de la vitesse dans le plan de base ζ. On aura V et ρ, au moyen des relations :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{V} = \dfrac{C_1}{V^{(0)}} |h(\zeta)| + C_2 \dfrac{V^{(0)}}{|h(\zeta)|} \\ \dfrac{\tilde{\rho}_0}{\rho V} = \dfrac{C_1}{V^{(0)}} |h(\zeta)| - C_2 \dfrac{V^{(0)}}{|h(\zeta)|} \end{cases} \tag{1.11}$$

On observe immédiatement que dans le plan z l'écoulement a les caractéristiques désirées.

Posons :

$$h_1(\zeta) = e^{i\omega(\xi)} \tag{1.12}$$

où

$$\omega(\zeta) = \theta + i\tau \tag{1.13}$$

avec $\omega(\infty) = 0$

Si β est l'angle fait par la tangente au contour avec Ox, nous aurons

$$\beta = \theta + \frac{\pi}{2} + \sigma + \alpha \tag{1.14}$$

Compte tenu de la condition de monogénéité :

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = -\frac{d\sigma}{dn} \tag{1.15}$$

et

$$\left|\frac{d\beta}{\sigma}\right| = 1$$

nous obtiendrons la condition à la limite qui doit être satisfaite par la fonction armonique $\tau = \tau(\xi, \eta)$ pour $|\zeta| = 1$

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \lambda[C_1 e^{-\tau} + 4C_2 V_\infty^2 (\sin\sigma - \sin\sigma_0)^2] \tag{1.16}$$

avec

$$\tau(\infty) = 0$$

Une telle condition à la limite a été considérée par I. FILIMON [4].

2. Aproximation de la solution

L'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1.16) ont été démontrées par C. IACOB [5] qui a indiqué aussi une manière d'approximation que nous suivons.

Nous négligerons constamment les termes en M_∞^6. Nous poserons donc :

$$\lambda = \lambda_0 + M_\infty^2 \lambda_1 + M_\infty^4 \lambda_2 + \dots \tag{2.1}$$

$$\tau = \tau_0 + M_\infty^2 \tau_1 + M_\infty^4 \tau_2 + \dots \tag{2.2}$$

$$\omega = \omega_0 + M_\infty^2 \omega_1 + M_\infty^4 \omega_2 + \dots \tag{2.3}$$

et

$$C_1 = 1 + \frac{1}{4} M_\infty^2 + A M_\infty^4 + \dots \tag{2.4}$$

$$C_2 V_\infty^2 = -\frac{1}{4} M_\infty^2 - A M_\infty^4 + \dots \tag{2.5}$$

où le nombre A prend les valeurs

$$A = \frac{1+2\gamma}{16}; \quad A = \frac{2-\gamma}{16}; \quad A = \frac{3}{16}$$

suivant qu'on choisit la variante de Tchapliguine — Demtchenko, celle de Caius Jacob ou celle de KÁRMÁN — TSIEN [6].

Pour e^τ et $e^{-\tau}$ nous avons les développements :

$$e^\tau = e^{\tau_0}\left[1 + M_\infty^2 \tau_1 + M_\infty^4 \left(\frac{\tau_1^2}{2} + \tau_2\right)\right] + \dots \tag{2.6}$$

$$e^{-\tau} = e^{-\tau_0}\left[1 - M_\infty^2 \tau_1 + M_\infty^4 \left(\frac{\tau_1^2}{2} - \tau_2\right)\right] + \dots \tag{2.7}$$

Après substitution de ces développements dans (1.16) et en identifiant les coefficients des puissances de M_∞^2 et M_∞^4, on trouve les conditions au

limites ci-dessous, ce qui nous permettra de déterminer les fonctions harmoniques $\tau_0(\xi, \eta)$; $\tau_1(\xi, \eta)$; $\tau_2(\xi, \eta)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau_0}{dn} = 1 - \lambda_0 e^{-\tau_0} \\ \tau_0(\infty) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \tau_0(\sigma) d\sigma = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau_1}{dn} = -\lambda_0\left[e^{-\tau_0}\left(\dfrac{1}{4} - \tau_1\right) - e^{\tau_0}(\sin\sigma - \sin\sigma_0)^2\right] - \lambda_1 e^{-\tau_0} \\ \tau_1(\infty) = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

(2.10)

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau_2}{dn} = -\lambda_0\left[\left(A - \dfrac{\tau_1}{4} + \dfrac{\tau_1^2}{2} - \tau_2\right)e^{-\tau_0} - e^{\tau_0}(4A + \tau_1)(\sin\sigma - \sin\sigma_0)^2\right] - \\ \quad - \lambda_1\left[e^{-\tau_0}\left(\dfrac{1}{4} - \tau_1\right) - e^{\tau_0}(\sin\sigma - \sin\sigma_0)^2\right] - \lambda_2 e^{-\tau_0} \\ \tau_2(\infty) = 0 \end{cases}$$

La solution du problème (2.8) est [1], [4], [5] :

$$\tau_0 = 0 \text{ et } \lambda_0 = 1$$

La solution $\tau_1(\infty) = 0$ est équivalente à:

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} + \sin^2\sigma_0 \tag{2.11}$$

Alors la première condition (2.9) devient :

$$\frac{d\tau_1}{dn} = \tau_1 - \frac{\cos 2\sigma}{2} - 2\sin\sigma_0 \sin\sigma \tag{2.9'}$$

Si $\omega_1 = \theta_1 + i\tau_1$, alors l'écuation (2.9') est equivalente à :

$$Im\left(\zeta_1 \frac{d\omega_1}{d\zeta} - \omega_1\right) = Im\left(\frac{-i}{2\zeta^2} + \frac{2\sin\sigma_0}{\zeta}\right) \tag{2.9''}$$

Mais les fonctions

$$\left(\zeta_1 \frac{d\omega_1}{d\zeta} - \omega_1\right) \text{ et } \left(\frac{-i}{2\zeta^2} + \frac{2\sin\sigma_0}{\zeta}\right)$$

sont holomorphes dans $|\zeta| > 1$; la condition (2.9'') impose qu'elles ne puissent différer que par une constante réelle, que sera nulle parce que $\omega_1(\infty) = 0$. Donc :

$$\omega_1(\zeta) = \frac{i}{6\zeta^2} - \frac{\sin\sigma_0}{\zeta} \tag{2.12}$$

et :

$$\theta_1 = \frac{\sin 2\sigma}{6} - \sin\sigma_0 \cos\sigma \tag{2.13}$$

$$\tau_1 = \frac{\cos 2\sigma}{6} + \sin\sigma_0 \sin\sigma \tag{2.14}$$

En substituant dans (2.10) les valeurs trouvées pour $\lambda_0, \lambda_1, \tau_0, \tau_1$, et compte tenu de la condition $\tau_2(\infty) = 0$, on trouve :

$$\lambda_2 = A + \frac{1}{72} + \sin^4\sigma_0 + 4A\sin^2\sigma_0 - \frac{3}{4}\sin^2\sigma_0 \tag{2.15}$$

L'équation satisfaite par τ_2 est :

$$\frac{d\tau_2}{dn} = \tau_2 + A_1 \sin\sigma + B_1 \sin 3\sigma + C_1 \cos 2\sigma + D_1 \cos 4\sigma \tag{2.16}$$

où :

$$\begin{cases} A_1 = (\sin\sigma_0)(1 - 8A) \\ B_1 = -\frac{1}{2}\sin\sigma_0 \\ C_1 = \frac{1}{24} - 2A + \frac{13}{12}\sin^2\sigma_0 \\ D_1 = -\frac{7}{144} \end{cases} \tag{2.17}$$

Par un procédé analogue à celui relatif à l'équation (2.9) on trouve :

$$\omega_2(\zeta) = \theta_2 + i\tau_2 = \frac{A_1}{2\zeta} - \frac{C_1 i}{3\zeta^3} + \frac{B_1}{4\zeta^3} - \frac{D_1 i}{5\zeta^4} \tag{2.18}$$

D'ici, nous avons sur l'obstacle :

$$\tau_2(\sigma) = \frac{8A - 1}{2}\sin\sigma_0 \sin\sigma + \left(\frac{2A}{3} - \frac{1}{72} - \frac{13}{36}\sin^2\sigma_0\right)\cos 2\sigma + \\ + \frac{\sin\sigma_0}{8}\sin 3\sigma + \frac{7}{720}\cos 4\sigma \tag{2.19}$$

$$\sigma_2(\sigma) = \frac{1 - 8A}{2}\sin\sigma_0\cos\sigma - \sin 2\sigma\left(\frac{1}{72} - \frac{2A}{3} + \frac{13}{36}\sin^2\sigma_0\right) - \\ - \frac{\sin\sigma_0}{8}\cos 3\sigma + \frac{7}{720}\sin 4\sigma \tag{2.20}$$

3. La distribution des vitesses sur l'obstacle

Nous déterminons les vitesses en utilisant la première relation de (1.11) compte tenu de (1.1), (1.2) et (1.13). On trouve sur le contour ($\zeta = e^{i\sigma}$) :

$$V = \frac{2V_\infty e^\tau |\sin\sigma - \sin\sigma_0|}{C_1 + 4C_2 V_\infty^2 e^{2\tau}(\sin\sigma - \sin\sigma_0)^2} \tag{3.1}$$

Nous considérons dans ce qui suit seulement les termes jusqu'à M_∞^2. Alors, nous avons (n'importe laquelle sera la variante adoptée) :

$$e^\tau = 1 + M_\infty^2\left[\frac{\cos 2\sigma}{6} + \sin\sigma_0 \sin\sigma\right] \tag{3.2}$$

En substituant (3.2) dans (3.1) avec le degré de précision admis :

$$V = 2V_\infty|\sin\sigma - \sin\sigma_0|\left\{1 + M_\infty^2\left[\frac{3 - 4\cos 2\sigma}{12} - \right.\right. \\ \left.\left. - \sin\sigma_0\sin\sigma + \sin^2\sigma_0\right]\right\} \tag{3.3}$$

Il est intéressant d'exprimer la vitesse V en fonction de l'angle Θ, fait par la vitesse avec l'axe Ox, dans le plan du fluide fictif.
Compte tenu de (1.15), nous avons à considérer l'équation :

$$\Theta = \sigma + \beta + M_\infty^2\left[\frac{\sin 2\sigma}{6} - \sin\sigma_0\sin\sigma\right] \tag{3.4}$$

Si nous avons noté avec P_1 et P_2 les points de ramification, respectivement de fuite du courant, nous avons $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ sur l'arc de circonférence $\widehat{P_1P_2}$ et $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ sur l'arc $\widehat{P_2P_1}$ (dans le sens trigonométrique).
La formule (3.4) représente une équation du type de Kepler. En nous limitant aux termes dans M_∞^2, nous la résolvons approximativement. Nous observons que pour $\sigma = \sigma_0$, nous avons $\Theta = \Theta_0$, donc considérons d'abord l'équation :

$$\Theta_0 = \sigma_0 + \beta - M_\infty^2\frac{\sin 2\sigma_0}{3} \tag{3.5}$$

On en tire par inversion :

$$\sigma_0 = \Theta_0 - \beta + M_\infty^2\frac{\sin 2(\Theta_0 - \beta)}{3} \tag{3.6}$$

et

$$\sin\sigma_0 = \sin(\Theta_0 - \beta)\left[1 + M_\infty^2\frac{2\cos^2(\Theta_0 - \beta)}{3}\right] \tag{3.7}$$

Si on revient à la formule (3.4), on tire :

$$\Theta = \sigma + \beta + M_\infty^2 \cos \sigma \left[\frac{\sin \sigma}{3} - \sin (\Theta_0 - \beta)\right] \tag{3.8}$$

d'où, par inversion :

$$\sigma = \Theta - \beta + M_\infty^2 \cos (\Theta - \beta)\left[\sin (\Theta_0 - \beta) - \frac{\sin (\Theta - \beta)}{3}\right] \tag{3.9}$$

donc :

$$\sin \sigma = \sin (\Theta - \beta) + M_\infty^2 \cos (\Theta - \beta) \left[\sin (\Theta_0 - \beta) - \frac{\sin (\Theta - \beta)}{3}\right] \tag{3.10}$$

On trouve alors l'expression :

$$V = 2V_\infty | \cos (\Theta - \alpha) - \cos (\Theta_0 - \alpha)| \left\{1 + \frac{M_\infty^2}{12}\left[1 + 6 \cos 2(\Theta - \alpha) - 20 \cos (\Theta - \alpha) \cos (\Theta_0 - \alpha) + 4 \cos^2 (\Theta_0 - \alpha)\right]\right\} \tag{3.11}$$

Si nous posons $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = 0$, nous retrouvons la formule pour le mouvement sans circulation et l'angle d'incidence nulle, formule obtenue pour la première fois par C. IACOB [5].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Jacob, C., *Introduction mathématique à la mécanique des fluides.* — Ed. Acad. R.P.R — Gauthier — Villars, Bucarest — Paris 1957

[2] Jacob, C., *Sur les mouvements lents des fluides parfaits compressibles.* Portug. Mathem. **1**, pp. 209—257 (1939).

[3] Iacob, C., *Asupra reversibilității transformării lui Ciaplighin.* Comunicările Acad. R.P.R. **XI**, 3, pp. 289—294 (1961).

[4] Filimon, I., *Mișcări circulatorii în jurul unui profil dat. Metoda corectă a lui Ciaplighin.* Studii și cercetări matematice **19**, 6, pp. 831—844 (1967).

[5] Jacob, C., *Sur l'écoulement lent d'un fluide parfait compressible autour d'un cylindre circulaire.* Mathematica — Cluj **XVII**, pp. 1—18 (1941).

[6] Iacob, C., *Studiul comparat al variantelor metodei de aproximație a lui S. A. Ciaplîghin în problema mișcării subsonice în jurul cilindrului circular.* Bul. Științ. Acad. R.P.R., Secț. St. Matem. și Fizice **1**, 3, pp. 293—302 (1951).

Reçu le 29.IV.1982.