MATHÉMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N⁰ 1–2, 1982, pp. 167–174

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE PROGRAMMATION PSEUDO-FRACTIONNAIRE

par
ŞTEFAN ŢIGAN
(Cluj-Napoca)

Dans cette note on considère un problème de programmation pseudo-fractionnaire linéaire et on montre que la résolution de ce problème peut être réduite, par un changement de variables, à la résolution d'un problème pseudo-linéaire. On donne encore un procédé de décomposition d'un problème de programmation pseudo-fractionnaire par morceaux, en problèmes pseudo-fractionnaire linéaires. On traite aussi quelques cas d'un problème de programmation pseudo-fractionnaire homogène.

1. Le problème de programmation pseudo-fractionnaire linéaire

Soit h une fonction à valeurs réelles définie sur un ensemble $D \subseteq \mathbf{R}^2 (D \neq \emptyset)$. Concernant la fonction h, on suppose que :

i1) h est continue sur D ;

i2) h est nondécroissante par rapport à chaqune des deux variables ;

i3) $h(y_1, y_2) < h(y_1', y_2)$ si et seulement si $y_1 < y_1'$.

Sous le terme de problème de programmation pseudo-fractionnaire linéaire, en ce qui suit, on comprend le problème suivant :

PF. Déterminer

$$v = \max_x h\left(\frac{ax + e}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right) \tag{1.1}$$

sous les contraintes :

$$Ax = b, \tag{1.2}$$

$$x \geqslant 0, \; x \in \mathbf{R}^n, \tag{1.3}$$

où sont donnés les vecteurs a, c, d de $\mathbf{R}^n$ les nombres réels e, p, r, la matrice réelle A ayant les dimensions $s \times n$ et la fonction h qui vérifie les hypotheses i1)–i3).

Nous faisons la remarque que le problème de programmation pseudo-linéaire considéré en [5] est un cas particulier du problème PF.

Concernant le problème PF on fait les hypothèses suivantes :

$H1$) l'ensemble de ses solutions admissibles

$$S = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b,\ x \geqslant 0\} \tag{1.4}$$

est nonvide et borné ;

$H2$) $\left\{\left(\dfrac{ax+e}{dx+r}, \dfrac{cx+p}{dx+r}\right) \in \mathbf{R}^2 : x \in S\right\} \subseteq D$;

$H3$) $dx + r > 0,\ \forall x \in S$.

Si nous faisons le changement de variables de Charnes-Cooper [4],

$$y = tx, \quad t \geqslant 0,\ t \in \mathbf{R},$$

alors, on peut attacher au problème PF le problème de programmation pseudo-linéaire suivant :

PL. Déterminer

$$v' = \max\ h(ay + et,\ cy + p\,t)$$

sous les conditions :

$$Ay - bt = 0, \tag{1.5}$$

$$dy + rt = 1, \tag{1.6}$$

$$y \geqslant 0,\ t \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Remarque 1.1. A partir l'hypothèse $H1$), on peut montrer (voir [7]) que $t > 0$, si le couple (y, t) vérifie les contraintes (1.5)–(1.7). Ceci entraine le fait que $(ay + et,\ cy + pt) \in D$, pour tout (y, t) vérifiant les conditions (1.5)–(1.7).

Le théorème suivant établit la liaison entre le problème pseudo-fractionnaire linéaire PF et le problème pseudo-linéaire associé PL.

THÉORÈME 1. *Si les hypothèses $H1$)–$H3$) sont vérifiées et si (y'', t'') est une solution optimale pour le problème PL, alors $\dfrac{y''}{t''}$ est une solution optimale pour le problème PF.*

Démonstration : De (1.5)–(1.7), à la suite de la remarque 1.1, il résulte que $\dfrac{y''}{t''}$ est une solution admissible pour le problème PF. Supposons que

$\dfrac{y''}{t''}$ n'est pas une solution optimale pour le problème PF. Alors, il existe $x' \in S$, tel que :

$$h\left(\frac{ax'+e}{dx'+r}, \frac{cx'+p}{dx'+r}\right) > h\left(\frac{ax''+e}{dx''+r}, \frac{cx''+p}{dx''+r}\right) = \tag{1.8}$$

$$= h\left(\frac{ay''+et''}{dy''+rt''}, \frac{cy''+pt''}{dy''+rt''}\right) = h(ay''+et'',\ cy+pt''),$$

où $x'' = \dfrac{y''}{t''}$.

Soit $dx' + r = q$ et $y' = \dfrac{x'}{q}$, $t' = \dfrac{1}{q}$. On voit aisément que (y', t') est une solution admissible pour le problème PL. Mais, de (1.8), il résulte que :

$$h(ay' + et',\ cy' + pt') > h(ay'' + et'',\ cy'' + pt''),$$

ce qui contredit la supposition que (y'', t'') este une solution optimale pour le problème PL. Donc $\dfrac{y''}{t''}$ este une solution optimale pour le problème PF.

Nous mentionnons que pour la résolution du problème pseudo-linéaire PL, on peut employer les algorithmes paramétriques considérés dans [5], [6].

2. Le problème pseudo-fractionnaire par morceaux

Dans cette section nous allons considérer le problème de programmation pseudo-fractionnaire par morceaux suivant :

PSF. Déterminer

$$v = \max_x \min_{i \in M} h\left(\frac{a^i x + e^i}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right) \tag{2.1}$$

sous les contraintes :

$$Ax = b, \tag{2.2}$$

$$x \geqslant 0,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{2.3}$$

où on a :

$$M = \{1, 2, \ldots, m\},$$

et $a^i \in \mathbf{R}^n$, $e^i \in \mathbf{R}$, pour tout $i \in M$.

Les autres paramètres du problème PSF ont la même signification que dans la formulation du problème PL.

Nous notons :

$$f(x) = \min_{i \in M} h\left(\frac{a^i x + e^i}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right),\ \forall x \in S,$$

où S (voir (1.4)) dénote l'ensemble de solutions admissibles du problème PSF.

On voit facilement que le problème PSF généralise tant le problème PF formulé dans la section 1, que le problème pseudo-linéaire par morceaux considéré dans [9].

Concernant le problème PSF, on maintient les hypothèses $H1$) et $H3$) et on remplace l'hypothèse $H2$) par :

$$H2') \quad \left\{\left(\frac{a^i x + e^i}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right) \in \mathbf{R}^2 : x \in S\right\} \subseteq D, \quad \forall i \in M.$$

Par la suite nous montrons que la résolution du problème pseudo-fractionnaire par morceaux PSF peut être réduite à la résolution des „m" problèmes de programmation pseudo-fractionnaire linéaires (ou, en vertu du théorème 1, de programmation pseudo-linéaire), en y employant un procédé de décomposition similaire à celui considéré dans [9] ou [1]. Dans ce but, pour chaque $i \in M$, nous considérons le problème de programmation pseudo-fractionnaire linéaire suivant :

$PPF(i)$. Déterminer

$$v_i = \max_x \ h\left(\frac{a^i x + e^i}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right)$$

sous les conditions (2.2), (2.3) et

$$(a^i - a^k)x \leqslant e^k - e^i, \quad \forall k \in M - \{i\}. \tag{2.4}$$

On dénote par S_i l'ensemble des solutions admissibles du problème $PPF(i)$. Si $S_i = \emptyset$, on prend $v_i = -\infty$.

Le théorème suivant établit la liaison entre le problème PSF et les problèmes associés $PPF(i)$.

THÉORÈME 2. *Si la fonction h vérifie les hypothèses $i1)-i3)$, alors:*

$$v = \max_{i \in M} v_i. \tag{2.5}$$

Démonstration: Notons par S_i' l'ensemble des éléments x de S vérifiant les contraintes :

$$h\left(\frac{a^i x + e^i}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right) \leqslant h\left(\frac{a^k x + e^k}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right), \quad \forall k \in M - \{i\}. \tag{2.6}$$

Alors, on voit que :

$$f(x) = h\left(\frac{a^i x + e^i}{dx + r}, \frac{cx + p}{dx + r}\right), \quad \forall x \in S_i', \tag{2.7}$$

et aussi que :

$$S = \bigcup_{i \in M} S_i'.$$

Mais de l'hypothèse $i3$), on tire que les inégalités (2.4) sont équivalentes à (2.6). Par conséquent, on a :

$$S_i = S_i', \quad \forall i \in M,$$

d'où, en tenant compte de (2.7), il résulte l'égalité (2.5) ; ce qui achève la démonstration du théorème.

Du théorème 2 on déduit que la résolution du probléme de programmation pseudo-fractionnaire par morceaux PSF peut être faite d'après le procédé suivant : on résoud les problèmes $PPF(i)$, pour tout $i \in M$ et puis on choisit comme solution optimale du problème PSF, la solution optimale du problème $PPF(k)$, tel qu'on a :

$$v_k = \max_{i \in M} v_i.$$

Mais, en vertu du théorème 1, les problèmes pseudo-fractionnaires $PPF(i)$ $(i \in M)$ reviennent, par un changement de variables, à des problèmes de programmation pseudo-linéaire.

3. Le problème de programmation pseudo-fractionnaire homogène

Soit $S' \subseteq \mathbf{R}^n$. Nous dissons que la fonction $f: S' \to \mathbf{R}$ s'apple h o m o g è n e d'ordre $w > 0$ sur S', si pour tout $x \in S$, on a :

$$f(tx) = t^w f(x), \quad \forall\ t \geqslant 0.$$

Par la suite, nous considérons le problème pseudo-fractionnaire homogène suivant :

PFO. Déterminer

$$v = \max_x \ h\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right)$$

sous les conditions linéaires :

$$Ax = b, \quad x \geqslant 0,$$

où les fonctions f_i, g_i $(i = 1, 2)$ sont homogènes d'ordre w_i sur $S = \{x \in \mathbf{R}^n : Ax = b, \ x \geqslant 0\}$.

Notons :

$$f(x) = h\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right), \quad \forall\ x \in S.$$

En supposant que :

$$g_i(x) > 0, \quad \forall\ x \in S, \ i = 1, 2,$$

par le changement de variables $y = tx$, on peut attacher au problème PFO le problème suivant :

PA. Déterminer

$$v = \max \ h\left(f_1(y), \frac{f_2(y)}{g_2(y)}\right)$$

sous les contraintes :

$$Ay - bt = 0,$$

$$g_1(y) = 1, \ y \geqslant 0, \ t \geqslant 0.$$

Comme dans le cas du théorème 1, on peut démontrer, que si (y', t') est une solution optimale du problème PA, alors $\frac{y'}{t'}$ est une solution optimale du problème PFO.

En ce qui suit, nous donnons deux exemples de problèmes pseudo-fractionnaires homogènes.

E x e m p l e 1. Dans ce cas, on prend, pour le problème PFO, la fonction objective suivante :

$$f(x) = \frac{c'x}{\max\limits_{k \in P} d_k x} + \frac{c''x}{ex} \tag{3.1}$$

où :

$$P = \{1, 2, \ldots, p\}.$$

et c', c'', e, d_k $(k \in P)$ sont des vecteurs donnés des $\mathbf{R}^n$.

Si on suppose que :

$$\max_{k \in P} d_k x > 0, \ \forall x \in S, \tag{3.2}$$

$$ex > 0, \ \forall x \in S,$$

alors, le problème auxiliaire associé au problème PFO ayant la fonction objective f donnée par (3.1), est le suivant :

$PA1$. Déterminer

$$v' = \max \left(c'y + \frac{c''y}{ey} \right)$$

sous les contraintes :

$$Ay - bt = 0, \tag{3.3}$$

$$\max_{k \in P} d_k y = 1, \tag{3.4}$$

$$y \geqslant 0, \ t \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Mais la résolution du probléme $PA1$ se réduit à la résolution des „p” problémes de programmation linéaire et fractionnaire linéaire généralisé [8] (voir aussi [2] et [3]) désignés par $PA1(k)$, pour chaque $k \in P$.

$PA1(k)$. Déterminer

$$v_k = \max \left(c'y + \frac{c''y}{ey} \right)$$

sous les contraintes linéaires (3.3), (3.5) et

$$d_k y = 1. \tag{3.6}$$

Pour la résolution du problème $PA1(k)$, si on suppose de plus que $c'y \geqslant 0$, pour tout vecteur y vérifiant les contraintes (3.3), (3.5) et (3.6), on connait, par example, l'algorithme de TETEREV [8].

E x e m p l e 2. Cette fois, on prend comme fonction objective pour le problème PFO, la fonction pseudo-fractionnaire homogène suivante :

$$f(x) = h\left(\frac{c_1 x}{\max\limits_{k \in P} d_k x}, \ \frac{c_2 x}{\max\limits_{k \in P} d_k x} \right), \ \ \forall \ x \in S,$$

où c_i $(i = 1, 2)$ et $d_k (k \in P = \{1, 2, \ldots, p\})$ sont des éléments donnés de $\mathbf{R}^n$. De plus, on suppose que la condition (3.2) soit vérifiée.

Alors le probléme auxiliaire $PA2$, qui résulte après le changement de variables $y = tx$, est le suivant :

$PA2$. Déterminer

$$v' = \max h(c_1 y, \ c_2 y),$$

sous les conditions (3.3) — (3.5).

Mais, d'une manière semblable à l'exemple 1, on peut résoudre le probléme $PA2$, à l'aide des „p” problémes pseudo-linéaire avec des contraintes linéaires. Ainsi, pour tout $k \in P$, il faut résoudre les problemes suivants :

$PA2(k)$. Déterminer

$$v_k = \max h(c_1 y, \ c_2 y)$$

sous les conditions (3.3), (3.5) et (3.6).

Pour mettre en évidence la liaison entre les problémes originales et les problèmes associés ($PA1(k)$ ou $PA2(k)$), nous mentionnons que pour chaqun des examples considérés ci-desus, on peut énoncer un théorème similaire au théorème 2.

R E F E R E N C E S

[1] B l a u R. A., *Decomposition Techniques for the Chebyshev Problem*, Opns, Res., **21**, 1157—1163 (1971).

[2] C h a d h a S. S., **G u p t a J. M.** , *Sensitivity analysis of the solution of a generalized linear and piece-wise linear program*, Cahiers de Centre d'Etudes de Rech. Opér., **18**, 3, 309—321 (1976).

[3] C h a d h a S. S., *Duality Theorems for a Generalized Linear and Linear Fractional Program*, Cahiers du Centre d'Etudes Rech. Opér., **15**, 2, 167—173 (1973).

[4] C h a r n e s A., C o o p e r W. W., *Programming with Linear Fractional Functionals*, Nav. Res. Log. Quart., **9**, 181—186 (1962).

[5] D r a g o m i r e s c u M., M a l i ţ a M., *Programare neliniară*, Bucureşti, Editura Ştiinţifică, 1972.

[6] Geoffrion A., *Solving bi-criterion Mathematical Programs*, Opns. Res., **15**, 39–54 (1967).
[7] Lasdon L. S., *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, New-York, 1970.
[8] Teterev A. G., *Ob odnom obobşcenii lineinovo i drobno-lineinovo programmirovania*, Ekonomika i Matem. Metody, **5**, 3, 440–447 (1969).
[9] Ţigan S., *Remarques sur certains problèmes de programmation pseudo-linéaire par morceaux*, Mathematica – Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, **9**, 129–132 (1980).

Reçu le 3.II.1981.

Centrul teritorial
de calcul electronic
Cluj-Napoca