MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N° 1 – 2, 1982, pp. 35–40

INTÉGRALES ULTRASINGULIÈRES

par
PAUL COCÂRLAN
(București)

Considérons des intégrales singulières de type

$$v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x,\ \theta)}{r^{m+p}} u(y)\, dy \tag{1}$$

où x et y sont des points de l'espace euclidien m-dimensionnel E_m, $r = |y - x|$ est la distance euclidienne entre les points x et y, $\theta = \frac{y-x}{r}$ et p un nombre entier non négatif.

Le point x constitue le *pole* de l'intégrale singulière, la fonction $f(x,\ \theta)$ s'appelle *caractéristique* et $u(y)$ est la *densité* de l'intégrale (1).

Si $m > 1$ et $p = 0$ l'intégrale (1) est une intégrale singulière à singularité isolée forte ; les operateurs générés par ces intégrales ont été étudiés par F. G. TRICOMI [1], G. GIRAUD [2], S. G. MIHLIN [3], A. P. CALDERON et A. ZYGMUND [4,5], M. COTLAR [6], E. M. STEIN [7], etc.

Le cas unidimensionnel $m = 1$, $p \geqslant 0$ a été étudié par CH. FOX [8] qui a considéré des intégrales divergentes de la forme :

$$\int_a^b \frac{u(y)}{(y-x)^{1+p}}\, dy, \quad x \in (a,b) \tag{2}$$

Il définit la valeur principale de l'intégrale (2) comme :

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left[\int_a^{x-\varepsilon} \frac{u(y)}{(y-x)^{1+p}}\, dy + \int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{u(y)}{(y-x)^{1+p}}\, dy - H_{1p}(x,\varepsilon) \right] \tag{3}$$

óu

$$H_{1p}(x,\varepsilon)=\begin{cases}0, & \text{pour } p=0\\ \sum_{i=0}^{p-1}\frac{u^{(i)}(x)}{i\,!}\left\{\frac{1-(-1)^{p-i}}{(p-i)\varepsilon^{p-i}}\right\}, & \text{pour } p>0\end{cases}\tag{4}$$

Pour $p=0$, la valeur principale de l'intégrale (2), dans le sens de Ch. Fox, se réduit évidemment à la valeur principale de l'intégrale $\int\limits_a^b \frac{u(y)}{y-x}\,dy$, considérée dans le sens de Cauchy.

Dans le même ouvrage [8], on démontre que la valeur principale de (2), dans le sens proposée, existe si la fonction $u(y)$ vérifie les conditions suivantes:

i) $u(y)$ est p-fois dérivable sur l'intervalle (a, b)

ii) $u^{(p)}(y)\in \operatorname{lip}\alpha$, c'est-à-dire $u^{(p)}(y)$ est une fonction lipschitzienne sur (a, b) avec l'exponent α, $0<\alpha\leqslant 1$.

La définition de Ch. Fox vaut encore si $a=-\infty$, $b=+\infty$ avec l'hypotèse suplimentaire que $u^{(p)}(x)=0\,(|x|^{-l})$, où $0<l<1$, pour $|x|\to\infty$.

Revenant au cas $m>1$, mentionnons encore les travaux de R. L. WHIDÉEN [10] sur les intégrales hypersingulières. Dans ce qui suit, nous allons donner une définition des intégrales singulières de la forme (1),que, à cause du fait que la singularité s'accentue tandis que p croit, nous appellerons *ultrasingulières*.

Nous démontrerons un théorème concernent les conditions nécessaires et suffisantes pour l' existance, dans le sens proposé des intégrales ultrasinguliàres.

Soit, donc, l'intégrale (1) et faisons les hypothèses suivantes:

1) dans tout domaine borné de $\mathbf{E}_m$, la densité $u(x)$ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p, inclusif.

2) les dérivées partielles d'ordre p, $D^{(p)}u(x)$ sont des fonctions lipschitziennes dans tout domaine borné de $\mathbf{E}_m$ c'est-à-dire, il existe, quelque soit x et y, appartenant à un tel domaine, une constante A et un nombre α $0<\alpha\leqslant 1$, tel que

$$|D^{(p)}u(y)-D^{(p)}u(x)|\leqslant A\,r^{\alpha}$$

3) $u(x)=0\,(|x|^{\beta})$ aux grandes distances, avec $\beta<p$

4) la caractéristique $f(x,\theta)$ est une fonction bornée et, pour x fixé, est une fonction continue par rapport à θ.

DÉFINITION. *On appelle intégrale ultrasingulière la limite suivante*:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ R\to+\infty}}\left[\int\limits_{\varepsilon<r<R}\frac{f(x,\,\theta)}{r^{m+p}}\,u(y)\,dy-H_{mp}(x,\varepsilon)\right]\tag{5}$$

dans l'hypothèse qu'elle existe et soit finie,

où

$$H_{mp}(x,\varepsilon)=\begin{cases}0 & \text{pour } p=0\\ \sum_{i=0}^{p-1}\frac{1}{i\,!}\,\frac{1}{(p-i)\varepsilon^{p-i}}\int\limits_S f(x,\,\theta)\left[\frac{\partial u(x+r\theta)}{\partial r}\right]^i dS, & \text{pour } p>0\end{cases}\tag{6}$$

Dans (5) on a noté $r<\varepsilon<R$, l'ensemble des points $y\in\mathbf{E}_m$ satisfaisent à $\varepsilon<|y-x|<R$. Dans (6), S répresente la sphère-unité de l'espace $\mathbf{E}_m$, dS — l'élément d'aire de S et $\left[\frac{\partial u(x+r\theta)}{\partial r}\right]^i$ la dérivé de la fonction $u(x+r\theta)$ suivant la direction du rayon de la sphère S, levée à la pouvoir symbolique i.

Dans l'hypothèse que la limite (5) existe et est finie on la note

$$\int\limits_{\mathbf{E}_m}^{x}\frac{f(x,\,\theta)}{r^{m+p}}\,u(y)\,dy\tag{7}$$

et, parceque la définition donné est une généralisation de la définition (3), nous pourrions appeler (7) — valeur principale (de l'intégrale (1)) dans le sens de Ch. Fox.

THÉORÈME. *Si les condition 1—4 sont remplies alors pour l'existance de l'intégrale ultrasingulière* (7) *il faut et il suffit que*

$$H_{mp}^{(1)}(x)=0\tag{8}$$

où

$$H_{mp}^{(1)}(x)=\begin{cases}\int\limits_S f(x,\theta)\,dS & \text{pour } p=0\\ \frac{1}{p\,!}\int\limits_S f(x,\,\theta)\left[\frac{\partial u(x+r\theta)}{\partial r}\right]^p dS & \text{pour } p>0\end{cases}\tag{9}$$

Preuve. De (1) il suit que pour la densité $u(y)$ nous pouvons écrire la formulle de Taylor

$$u(y)=\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i\,!}\,(d^iu)\,(x)+R_p(y)\tag{10}$$

où

$$(d^iu)\,(x)=\left[\frac{\partial}{\partial y_1}(y_1-x_1)+\frac{\partial}{\partial y_2}(y_2-x_2)+\ldots+\frac{\partial}{\partial y_m}(y_m-x_m)\right]^i u(x)\tag{11}$$

este la différentielle d'ordre i de la fonction u, considérée dans le point $x\in\mathbf{E}_m$ (évidemment, $(d^0u)\,(x)=u\,(x)$). Dans (10) $R_p(y)$ est le reste de la formule de Taylor. Pour $p>0$ on peut mettre $R_p(y)$ sous la forme:

$$R_p(y)=\frac{1}{p}\,\omega\,(y)\,r^p\tag{12}$$

où

$$(13) \qquad \omega(y) = \frac{1}{r^p}\sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=p}\omega_{i_1 i_2\dots i_m}(y_1-x_1)^{i_1}(y_2-x_2)^{i_2}\dots(y_m-x_m)^{i_m}$$

avec

$$(14) \qquad \omega_{i_1 i_2\dots i_m} = \frac{p!}{i_1!\, i_2!\dots i_m!}\left[\frac{\partial^p u(\xi)}{\partial y_1^{i_1}\partial y_2^{i_2}\dots\partial y_m^{i_m}} - \frac{\partial^p u(x)}{\partial y_1^{i_1}\partial y_2^{i_2}\dots\partial y_m^{i_m}}\right]$$

ξ étant un point intermédiaire sur le ségment qui unit les points x et y.

Si $p = 0$ on considére $R_p(y) = u(y) - u(x)$.

La fonction $\omega(y)$ este continue dans le point x et égale à zero dans ce point.

On peut prouver, à l'aide de l'hypothèse (2) et des rélations (13) et (14), qu'il existe une constante $B > 0$ telle que, en tout domaine borné, on a :

$$(15) \qquad |\omega(y)| \leqslant B r^\alpha$$

quels que soit x et y dans un tel domaine.

En effet, vue que $|y_j - x_j| \leqslant r$, $j = 1,2,\dots,m$ on a :

$$(16) \qquad |\omega(y)| \leqslant \sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=p}|\omega_{i_1 i_2\dots i_m}(y)|$$

mais, conformement à (14) et 2)

$$(17) \qquad |\omega_{i_1 i_2\dots i_m}(y)| \leqslant A_{i_1 i_2\dots i_m} r_1^\alpha$$

où $A_{i_1 i_2\dots i_m}$ sont des constantes positives et $r_1 = |\xi - x|$. Parce que, $r_1 < r$ de (16) et (17) resulte immédiatément l' inégalité (15).

Maintenant, mettons la différentielle $(d^i u)(x)$ sous la forme

$$(d^i u)(x) = r^i \sum_{k_1+k_2+\dots+k_m=i}\frac{i!}{k_1!\, k_2!\dots k_m!}\,\frac{\partial^i u(x)}{\partial y_1^{k_1}\dots\partial y_m^{k_m}}\,\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}\dots\theta_m^{k_m}$$

où $\theta_j = \dfrac{y_j - x_j}{r}$, $j = 1,2,\dots,m$ sont les cosinus directeurs de la direction donnée par le vecteur $y - x$. On peut abréger l'ecriture :

$$(18) \qquad (d^i u)(x) = r^i \sum_{|k|=i}\binom{k}{i} D_k^i u(x)\,\theta^k$$

Alors, moyennenant les relations (11), (12) et (18) on peut écrire :

$$(19) \qquad \int\limits_{\varepsilon<r<R}\frac{f(x,\theta)}{r^{m+p}}u(y)\,dy = \sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}\sum_{|k|=i}\binom{k}{i}D_k^i u(x)\int\limits_{\varepsilon<r<1}\frac{f(x,\theta)\,\theta^k}{r^{m+p-i}}dy + \frac{1}{p!}\int\limits_{\varepsilon<r<1}\frac{f(x,\theta)}{r^m}\omega(y)\,dy + \int\limits_{1<r<R}\frac{f(x,\theta)}{r^{m+p}}u(y)\,dy$$

On introduit les notations suivantes :

$$(20) \qquad I_{i,k} = \int\limits_{\varepsilon<r<1}\frac{f(x,\theta)\theta^k}{r^{m+p-i}}dy$$

$$(21) \qquad J_1 = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon<r<1}\frac{f(x,\theta)}{r^m}\,\omega(y)\,dy$$

$$(22) \qquad J_2 = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{1<r<R}\frac{f(x,\theta)}{r^{m+p}}\,u(y)\,dy$$

Alors, passant aux coordonnées sphèriques du point y par rapport à x et vue que $dy = r^{m-1}\,dr dS$, les intégrales $I_{i,k}$ deviennent :

$$(23) \qquad I_{i,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-i}\left[\dfrac{1}{\varepsilon^{p-i}} - 1\right]\displaystyle\int_S f(x,\theta)\,\theta^k\,dS & \text{pour } i \neq p,\ p > 0 \\ \left(\ln\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\displaystyle\int_S f(x,\theta)\,\theta^k\,dS & \text{pour } i = p \end{cases}$$

(dans le cas $i = p = 0$, $I_{i,k} = I_{0.0} = \left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_S f(x,\theta)dS$)

Compte tenu des inégalités (15), on a :

$$\int\limits_{\varepsilon<r<1}\frac{|f(x,\theta)|}{r^m}|\omega(y)|\,dy \leqslant B\int\limits_{\varepsilon<r<1}\frac{|f(x,\theta)|}{r^{m-\alpha}}dy = B\int_S|f(x,\theta)|\,dS\int_\varepsilon^1\frac{dr}{r^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{B}{\alpha}\left((1-\varepsilon^\alpha)\int_S|f(x,\theta)|\,dS < \frac{B}{\alpha}\int_S|f(x,\theta)|\,dS\right.$$

d'où, conformement aussi à l'hypothèse (4), il suit qu'il existe et est finie la limite (21) donc que l'intégrale

$$(24) \qquad J_1 = \int\limits_{r<1}\frac{f(x,\theta)}{r^m}\,\omega(y)\,dy$$

est absolument convergente. A cause de la condition 3) on peut montrer que l'intégrale $J_2 = \int\limits_{r>1}\frac{f(x,\theta)}{r^{m+p}}\,u(y)\,dy$ (25) est convergente. Revenant la relation (19) et compte tenu des relations (23), des notations (6) et (9) et du fait que, sur la sphère-unite

$$\sum_{|k|=i}\binom{k}{i}D_k^i u(x)\,I_{i,k} = \int_S\Bigg(\sum_{k_1+k_2+\dots+k_m}\frac{i!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}\,\frac{\partial^i u(x)}{\partial y_1^{k_1}\partial y_2^{k_2}\dots\partial y_m^{k_m}}\,\cdot$$

$$\cdot\,\theta_1^{k_1}\theta_2^{k_2}\dots\theta_m^{k_m}\Bigg)f(x,\theta)\,dS = \int_S f(x,\theta)\left[\frac{\partial u(x+r\theta)}{\partial r}\right]^i dS$$

on peut écrire:

$$\int\limits_{\varepsilon<r<R} \frac{f(x,\ \theta)}{r^{m+p_1}} u(y)\, dy = H_{mp}(x,\varepsilon) - H_{mp}(x,1) + \ln\frac{1}{\varepsilon} \cdot H_{mp}^{(1)}(x) + \tag{26}$$

$$+ \frac{1}{p!} \int\limits_{\varepsilon<r<1} \frac{f_1(x,\ \theta)}{r^m} \omega(y)\, dy + \int\limits_{1<r<R} \frac{f(x,\ \theta)}{r^{m+p}} u(y)\, dy$$

Par conséquant, la limite (5) existe si et seulement si la condition (8) est satisffaite.

En effet, dans la partie droite de la relation (26) la terme $H_{mp}(x,1)$ ne dépend de ε et R et les derniers deux termes out une limite finie pour $\varepsilon \to +0$, respectivement, pour $R \to \infty$, parce que les intégrales (24) et (25), comme nous venons de le prouver, sont convergents. Ceci achève notre preuve.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Tricomi, F, G, *Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie „con asterisco"* Rend. Acad. Naz. Lincei, **3**, ser. 6-a, fasc. 9, 536–539 (1926).

[2] Giraud, G, *Equations à intégrales principales*, Ann. Sci. Ecole norm, supér., **51**, 3 et 4, 251–372 (1934).

[3] Mihlin S, G, *Mnogomernîie singuliarnîie integralî i integralnîie uravnenia*, Gos. Iz. Moskva, 1962 (en russe).

[4] Calderon, A, P, *Integrales singulares*, 2º simposium sobre alguanos problemas matematicos que estan estudiando en latino America, 319–328, Montevideo, 1954.

[5] Calderon, A, P, -Zygmund, A, *On the existence of certain singular integrales*, Acta Math, **88**, nr. 1–2, 85–139 (1952).

[6] Cotlar, M, *Condiciones de Continuidad de Operadores Potenciales y de Hilvert*, Universidad Nacional de Buenos Aires, 1956.

[7] Stein, E, M. *Intégrales singulières et fonctions différentiables de plusieurs variables*, Publication Math, L'Orsay, Oct. 1966 – Mars 1967, chap. I a VI, Avril–Mai 1968, chap. VII et VIII.

[8] Fox, Ch., *A generalisation of the Cauchy principal value*, Canad. Journ. of Math., **IX**, 1, 110–115 (1957).

[9] Hadamard, J, *Lectures on Causy's Problem in Linear Partial Diff, Eq.*, N.Y., 1952.

[10] Wheeden, R, L, *Hypersingular integrales and summability of Fourier integrals and series*, Proc. of Symp. Pure Math, X, Amer. Math. Soc., Providence, 1967

Reçu le 29.IV.1982.

Catedra de matematici II
Institutul politehnic
Splaiul Independenței 313
București