MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, Nº 1 — 2, 1982, pp. 69—74

SUR QUELQUES OPÉRATEURS LINÉAIRES OBTENUS À L'AIDE DES FORMULES DE QUADRATURE

par

I. GAVREA
(Cluj-Napoca)

Dans ce travail nous allons généraliser une méthode de L. LUPAS [4] pour obtenir des opérateurs linéaires et positifs à l'aide des formules de quadrature aux coefficients positifs.

Désignons par $C[0, 1]$ l'espace des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$; $\mathfrak{L}_n$ l'espace des polynômes de degré n; P_n le polynôme de Legendre de degré n relatif au segment $[0, 1]$, $P_n(1) = 1$.

Considérons les points

(1) $$0 \leqslant x_{0n} < x_{1n} < \ldots < x_{nn} \leqslant 1$$

et la formule de quadrature du type interpolatoire

(2) $$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_{in} f(x_{in}) + R(f)$$

où $f \in C[0, 1]$,

(3) $$A_{in} = \frac{1}{l'(x_{in})} \int_0^1 \frac{l(x)}{x - x_{in}} dx, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

et $l(x) = (x - x_{0n})(x - x_{1n}) \ldots (x - x_{nn})$.

On sait que le degré d,exactitude de la formule de quadrature (2) est au moins n.

Définition 1. *On dit que la formule* (2) *est une formule de quadrature aux coefficients positifs si* $A_{in} > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

L e m m e 1. [2]. *Si la formule de quadrature* (2) *a le degré d'exactitude* $n + s (0 \leqslant s \leqslant n+1)$, *alors il y a les nombres* α_{s+i}, $i = 1, 2, \ldots, n + 1 - s$, *tels que les points* (1) *soient les zéros du polynôme*

$$q_{n+1}(x) = P_{n+1,s}(x) + \alpha_{s+1}P_{n+1,s+1}(x) + \ldots + \alpha_{n+1}P_{n+1,n+1}(x) \tag{4}$$

où $P_{n+1,i}$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, *sont les polynômes i-ortogonaux de degré* $n + 1$ *définis par*

$$\int_0^1 x^k P_{n+1,i}(x)dx = \delta_{ik}, \quad k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Si la formule de quadrature (2) a le degré d'exactitude $n + s$ alors la relation (4) implique l'égalité

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{kn}) \frac{q_{n+1}(x)}{(x - x_{kn})q'_{n+1}(x_{kn})}, \tag{5}$$

où $L_n(f)$ est le polynôme de Lagrange prenant les valeurs $f(x_{in})$ aux points x_{in}, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Vu que $\{P_{n,i}\}_{i=\overline{1,n}}$ est base pour l'espace vectoriel $\mathfrak{P}_n$ on a la relation

$$\frac{q_{n+1}(x)}{x - x_{kn}} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{ik} P_{n,i}(x), \tag{6}$$

où

$$\lambda_{ik} = \int_0^1 \frac{t^i q_{n+1}(t)}{t - x_{kn}} dt, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

L e m m e 2. *Les relations*

$$\lambda_{ik} = x_{kn}^i \lambda_{0k}, \tag{8}$$

sont remplies pour $i = 0, 1, \ldots, s$ *et les relations*

$$\lambda_{ik} = \sum_{q=s}^{i-1} \alpha_q x_{kn}^{i-q-1} + \lambda_{0k} x_{kn}^i \tag{9}$$

où $\alpha_s = 1$, *sont remplies pour* $i = s+1, s+2, \ldots, n$.

Démonstration. Les relations

$$\lambda_{ik} = \int_0^1 \sum_{p=0}^{i-1} t^{i-p-1} x_{kn}^p q_{n+1}(t)dt + x_{kn}^i \lambda_{0k} \tag{10}$$

et (4) impliquent les égalités (8) et (9).

THÉORÈME. 1. *Si le degré d'exactitude de la formule de quadrature* (2) *est* $n + s$, *alors le polynôme de Lagrange attaché à la fonction f sur les points* (1) *peut être écrit sous la forme*

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn} f(x_{kn}) K(x, x_{kn}) + \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{i=s+1}^{n} \sum_{q=s}^{i-1} \alpha_q [x_{0n}, x_{1n}, \ldots, x_{nn}; t^{i-q-1}f] P_{n,i}(x) \tag{11}$$

où a_{n+1} *est le coefficient de* x^{n+1} *en* $\overline{q_{n+1}}$ *et*

$$K(x, x_{kn}) = \sum_{i=0}^{n} x_{kn}^i P_{n,i}(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i P_{n,i}(x_{kn}) = \sum_{i=0}^{n} (2i+1) P_i(x) P_i(x_{kn}). \tag{12}$$

Démonstration. Les relations de la a lemme 2 impliquent

$$\frac{q_{n+1}(x)}{(x - x_{kn})q_{n+1}(x_{kn})} = A_{kn} \sum_{i=0}^{n} x_{kn}^i P_{n,i}(x) + \frac{1}{q'_{n+1}(x_{kn})} \sum_{i=s+1}^{n} \left(\sum_{q=s}^{i-1} \alpha_q x_{kn}^{i-q-1} \right) P_{n,i}(x). \tag{13}$$

Les relations (5) et (13) impliquent

$$L(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn} K(x, x_{kn}) + \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{i=s+1}^{n} \sum_{q=s}^{i-1} \left(\alpha_q \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{kn}^{i-q-1} f(x_{kn})}{l'(x_{kn})} \right) P_{n,i}(x). \tag{14}$$

Tenant compte de la relation (14) et de la formule

$$[x_{0n}, x_{1n}, \ldots, x_{nn}; g] = \sum_{k=0}^{n} \frac{g(x_{kn})}{l'(x_{kn})}$$

on obtient l'égalité (11) ce qu'il fallait démontrer.

C o r o l l a i r e 1. *Si* $x_{0n}^{(s)}, x_{1n}^{(s)}, \ldots, x_{nn}^{(s)}$ *sont les zéros du polynôme* $P_{n+1,s}$ *et* $A_{0n}^{(s)}, A_{1n}^{(s)}, \ldots, A_{nn}^{(s)}$ *sont les coefficients de la formule de quadrature qui correspond à ces points, alors on obtient*

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn}^{(s)} f(x_{kn}^{(s)}) K(x, x_{kn}^{(s)}) + \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{i=s+1}^{n} [x_{0n}^{(s)}, x_{1n}^{(s)}, \ldots, x_{nn}^{(s)}; t^{i-s-1}f] P_{n,i}(x). \tag{15}$$

En particulier pour $s = n - 1,\ n,\ n + 1$ il en résulte :

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn}^{(n-1)} f(x_{kn}^{(n-1)}) K(x,\ x_{kn}^{(n-1)}) + \tag{16}$$

$$+ \frac{1}{a_{n+1,n-1}} [x_{0n}^{(n-1)},\ x_{n}^{(n-1)},\ \ldots,\ x_{nn}^{(n-1)};\ f]\ P_{n,n}(x),$$

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn}^{(n)} f(x_{kn}^{(n)}) K(x,\ x_{kn}^{(n)}), \tag{17}$$

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn}^{(n+1)} f(x_{kn}^{(n+1)}) K(x,\ x_{kn}^{(n+1)}). \tag{18}$$

Considérons les opérateurs

$$H_n : C[0,\ 1] \to C[0,\ 1]$$

définis à l'aide des égalités

$$H_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn}\ f(x_{kn}) K(x,\ x_{kn}). \tag{19}$$

La relation (19) implique

$$H_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} c_{in}(f) P_i(x) \tag{20}$$

où

$$c_{in}(f) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn} f(x_{kn})(2i + 1) P_i(x_{kn}). \tag{21}$$

Supposons $s \geqslant 2$. Le théorème 1 implique

$$H_n(e_i) = L_n(e_i) = e_i, \qquad i = 0,\ 1,\ 2, \tag{22}$$

où

$$e_i(x) = x^i.$$

La relation (21) implique

$$\frac{c_{in}(f)}{2i + 1} = \int_0^1 H_n(f)(x) P_i(x)\, dx, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{23}$$

Soit $M = [m_{in}]$ une metrice réelle triangulaire. Définissons les opérateurs

$$S_n : C[0,\ 1] \to \mathfrak{P}_n$$

à l'aide des égalités

$$S_n(f) = \sum_{i=0}^{n} c_{in}(f) m_{in} P_i(x). \tag{24}$$

Les relations (22) et (23) impliquent

$$S_n(P_i)(x) = m_{in} P(x_{in}), \qquad i = 0,\ 1,\ 2. \tag{25}$$

On peut maintenant démontrer le

THÉORÈME 2. *Si la formule* (2) *est une formule aux coefficients positifs et si* $Q_n \in \mathfrak{P}_n$ *vérifie les conditions*

(a) $$Q_n(x) \geqslant 0, \qquad (\forall) x \in [0,\ 1];$$

(b) $$\int_0^1 Q_n(x)dx = 1;$$

(c) $$m_{in} = \int_0^1 P_i(x) Q_n(x) dx, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

alors l'opérateur S_n *est linéaire, positif et de plus on a*

$$S_n(e_0) = 1, \tag{26}$$

$$S_n(e_1) = \frac{1 - m_{1n}}{2} + m_{1n} e_1,$$

$$S_n(e_2) = \frac{1 - m_{1n}}{2} + e_1(m_{1n} - m_{2n}) + \frac{m_{2n} - 1}{6} + m_{2n} e_2.$$

Démonstration. La relation (24) implique l'égalité

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{kn} f(x_{kn}) \left[\sum_{i=0}^{n} P_i(x_{kn}) \times \right.$$

$$\left. \times\ P_i(x)(2i + 1) \int_0^1 Q_n(u)\, P_i(u) du \right].$$

Compte tenu de la relation

$$\sum_{i=0}^{n} (2i + 1) P_i(x_{kn})\, P_i(x) \int_0^1 Q_n(u) P_i(u) \geqslant 0, \qquad (\forall) x \in [0,\ 1],$$

démontrée en [4], on en tire la positivité de l'operateur S_n.

Les relations (25) et les égalités

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = 2x - 1,$$
$$P_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

impliquent les relations (26). Le théorème est ainsi complètement démontré.

Soint $Q_n \in \mathfrak{L}_n$, $n = 0, 1, \ldots$ une suite de polynômes qui vérifient les conditions (a), (b) et (c) de théorème 2.

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n(f) - f \| = 0, \qquad (\forall) f \in C[0, 1]$$

est que $\lim\limits_{n\to\infty} m_{1n} = 1$.

Outre cela on obtient l'évaluation

$$\| S_n(f) - f \| \leqslant \frac{\sqrt{2}+1}{2}\, \omega(f; \sqrt{1 - m_{1n}}).$$

La demonstration de ce théorème est similaire à la démonstration du théorème 4 du travail [4].

Remarque. Dans ce travail pour $s = n + 1$ nous obtenons les résultats de LUPAS L. [4].

On peut aussi construir des formules de quadrature aux coefficients positifs (2), de n'importe quel degré d'exactitude. Les résultats de [4] correspondent à la formule de quadrature de Gauss.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gavrea, I., *Polinoame k-ortogonale* (I), Buletinul ştiinţific al Institutului Politehnic Cluj-Napoca, Seria Matematica, 15–20 (1978).

[2] Gavrea, I., *Polinoame k-ortogonale* (II), Buletinul ştiinţific al Institutului Politehnic Cluj-Napoca, Seria Matematica, (1979).

[3] Kornwinder, T., *Jacobi Polynomls, An Analitic Proof of the Product Formula*, SIAM J. Math. Analysis, **5**, 125–137 (1974).

[4] Lupaş, L., *O clasă de operatori de tip Jackson*, Seminarul itinerant de ecuaţii funcţionale, aproximare şi convexitate, Cluj-Napoca, 10–12 dec. 1981, 207–216 (1981).

Reçu le 17.XII.1981

Institutul Politehnic
3400 *Cluj-Napoca*