MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 11, N° 1 — 2, 1982, pp. 75—79

SUR UNE INÉGALITÉ DE LEVINSON-POPOVICIU

par

I. GAVREA et M. IVAN
(Cluj-Napoca)

Dans ce travail nous nous proposons de généraliser une inégalité de LEVINSON N. [2] et POPOVICIU T. [5].

Nous supposerons connues la définition et les principales propriétés des différences divisées.

Soient $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ points de l'intervalle $[0, a]$ et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nombres positifs.

THÉORÈME 1. (Levinson N.,). *Si la fonction f a une dérivée troisième non-negative sur l'intervalle $(0, 2a)$ alors*

$$(1)\qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(2a - t_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (2a - t_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right).$$

Soient x_i, x_i', $i = 1, 2, \ldots, n$ points de l'intervalle I tels que

$$(2)\qquad x_1 + x_1' = x_2' + x_2 = \ldots = x_n + x_n',$$

$$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \min\,(x_1'\; x_2', \ldots, x_n').$$

THÉORÈME 2. (Popoviciu T.). *Pour que l'inégalité*

$$(3)\qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - \mathrm{f}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i')}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - \mathrm{f}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i'}{\sum_{i=1}^{n} q_i}\right),$$

soit vérifiée pour tout entier $n > 1$, pour tout groupe de $2n$ points x_i, $x_i' \in I$, $i = 1, 2, \ldots, n$ qui vérifie (2) et pour tout groupe de n nombres positifs p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, il suffit que la fonction f et il est nécessaire que la fonction continue f soit non-concave d'ordre 2 sur l'intervalle I

Dans la suite considérons deux entiers positifs n, m et $m + n$ points de l'intervalle I, x_i, t_j, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ tels que

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m. \tag{4}$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, p_m$ nombres positifs. Posons

$$S_1(x, p, n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \tag{5}$$

$$S_2(x, p, n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

$$S_1(t, q, m) = \frac{\sum_{j=1}^{m} q_j t_j}{\sum_{j=1}^{m} q_j},$$

$$S_2(t, q, m) = \frac{\sum_{j=1}^{m} q_j t_j^2}{\sum_{j=1}^{m} q_j}.$$

Nous avons établi le

THÉORÈME 3. *Pour que l'inégalité*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} - f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{m} q_j f(t_j)}{\sum_{j=1}^{m} q_j} - f\left(\frac{\sum_{j=1}^{m} q_j t_j}{\sum_{j=1}^{m} q_j}\right) \tag{6}$$

soit vérifiée pour toute fonction f non-concave d'ordre 2 sur l'intervalle I, il faut et il suffit que les points (4) vérifient la condition

$$S_2(x, p, n) - S_1^2(x, p, n) = S_2(t, q, m) - S_1^2(t, q, m) \tag{7}$$

Démonstration. Pour démontrer la nécessité de la condition (7) écrivons l'inégalité (6) pour la fonction $f = x^2$ et puis pour $f = -x^2$.

Nous avons

$$S_2(x, p, n) - S_1^2(x, p, n) \leqslant S_2(t, q, m) - S_1^2(t, q, m), \tag{8}$$

$$-S_2(x, p, n) + S_1^2(x, p, n) \leqslant -S_2(t, q, m) + S_1^2(t, q, m),$$

ce qui implique (7).

Pour démontrer que la condition (7) est suffisante, considérons F_1, F_2, deux fonctionnelles linéaires définies sur l'ensemble des fonctions continues sur le segment $[x_1, t_m]$ à l'aide des égalités :

$$F_1(f) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i}, \tag{9}$$

$$F_2(f) = \frac{\sum_{j=1}^{m} q_j f(t_j)}{\sum_{j=1}^{m} q_j}.$$

Dans [1] et [3] on a démontré que pour toute fonction f continue sur I il existe les points $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \in [x_1, x_n]$ et $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in [t_1, t_m]$ tels que

$$F_1(f) - f(S_1(x, p, n)) = (S_2(x, p, n) - S_1^2(x, p, n))[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f], \tag{10}$$

$$F_2(f) - f(S_2(t, q, m)) = (S_2(t, q, m) - S_1^2(t, q, m))[\eta_1, \eta_2, \eta_3; f].$$

Les relations (7) et (10) impliquent la relation

$$F_1(f) - f(S_1(x, p, n)) - F_2(f) + f(S_2(t, q, m)) = \tag{11}$$

$$= ([\xi_1, \xi_2, \xi_3; f] - [\eta_1, \eta_2, \eta_3; f])(S_2(x, p, n) - S_1^2(x, p, n)).$$

On sait que

$$S_1^2(x, p, n) \leqslant S_2(x, p, n) \tag{12}$$

et que pour toute fonction f non-concave d'ordre 2 și $\max(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \leqslant \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ on a

$$[\xi_1, \xi_2, \xi_3; f] \leqslant [\eta_1, \eta_2, \eta_3; f]. \tag{13}$$

Les relations (11), (12) et (13) impliquent la relation

$$F_1(f) - F_1(S_1(x, p, n)) \leqslant F_2(f) - F_2(S_1(t, q, m))$$

qui est une autre forme de (6).

Le théorème est démontré.

Remarque. *Pour $m = n$ tout groupe de points qui vérifie (2) vérifie aussi (7) et on obtient l'inégalité de Popoviciu T.*

Supposons $x_i > 0$, $t_j > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, et posons

$$G(x, p, n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}},$$

$$G(t, q, m) = \left(\prod_{j=1}^{m} t_j^{q_j}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} q_j}},$$

$$H(x, p, n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{x_i}}$$

$$H(t, q, m) = \frac{\sum_{j=1}^{m} q_j}{\sum_{j=1}^{m} \frac{q_j}{t_j}}$$

Corollaire. *Si les points positifs x_i, t_j, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ vérifient la condition (7) alors on a*

$$\frac{G(x, p, n)}{S_1(x, p, n)} \leqslant \frac{G(t, q, m)}{S_1(t, q, m)}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{H(t, q, m)} - \frac{1}{H(x, p, n)} \leqslant \frac{1}{S_1(t, q, m)} - \frac{1}{S_1(x, p, n)}. \tag{15}$$

Démonstration. On obient les relations (15) et (16) de l'inégalité (6) respectivement pour $I = (0, \infty)$, $f(x) = \ln x$ et pour $I = (0, \infty)$, $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Remarque. *L'inégalité* (14) *est une généralisation de l'inégalité de Ky Fan* (Cf. [4], p. 363) :

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \frac{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right)^n}$$

$$0 < x_i \leqslant \frac{1}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gavrea, I., *Teoreme de medie pentru funcționale liniare și monotone*, Seminarul intinerant de ecuații funcționale, aproximare și convexitate, Cluj-Napoca, 131–135 (1981).

[2] Levinson, N., *Generalization of an Inequality of Ky Fan*, J. Math. Analysis and Applications, **8**, 133–134 (1964).

[3] Lupaș, A., *Contribuție la teoria aproximării prin operatori liniari*, Teză de doctorat, Cluj-Napoca, 1975.

[4] Mitrinović, D. S., (in cooperation with Vasic P. M.), *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag 1970.

[5] Popoviciu, T., *Sur une inégalité de N. Levinson*, Mathematica, **6** (29), 301–306 (1964).

Reçu le 2.XII.1981.

Institutul Politehnic
3400 *Cluj-Napoca*