

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES DE TYPE
 INTERPOLATOIRE À VITESSE DE CONVERGENCE
 OPTIMALE

par

ION PĂVĂLOIU et IOAN ȘERB

(Cluj-Napoca)

Dans cet article nous étudions une classe de méthodes itératives pour la résolution des équations de la forme :

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

où $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle d'une variable réelle et I est un intervalle de l'axe réel.

Désignons par x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , $n+1$ points distincts de l'intervalle I et par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, $n+1$ nombres naturels tels que :

$$(2) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = m + 1,$$

où $m \in \mathbb{N}$.

Il est bien connu que quels que soient les nombres y_j^i , $j=0, 1, \dots, \alpha_i-1$, $i=1, 2, \dots, n+1$, il existe un seul polynôme H_1 de degré au plus m qui vérifie les conditions :

$$(3) \quad H_1^{(j)}(x_i) = y_j^i, \quad j=0, 1, \dots, \alpha_i-1, \quad i=1, 2, \dots, n+1.$$

Le polynôme H_1 déterminé par les conditions (3) a la forme :

$$(4) \quad H_1(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} y_j^i \frac{1}{k!j!} \left[\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j-k}},$$

où

$$(5) \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x-x_i)^{\alpha_i}.$$

Si on suppose que la fonction f admet une dérivée d'ordre $m + 1$ sur l'intervalle I et si $y_i^j = f^{(j)}(x_i)$, $j = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, alors H_1 , le polynôme d'Hermite de la fonction f , relativement aux noeuds x_i , aux ordres de multiplicité α_i , vérifie l'égalité :

$$(6) \quad f(x) - H_1(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \omega(x),$$

où $\xi \in I$.

Dans ce qui suit on suppose que $f'(x) \neq 0$ quelque soit $x \in I$ et on désigne par $F = f(I)$. Il résulte que $f: I \rightarrow F$ est une fonction bijective et il existe $f^{-1}: F \rightarrow I$. La fonction inverse f^{-1} admet une dérivée d'ordre $m + 1$, pour tout $x \in F$.

La dérivée d'ordre k , $k \leq m + 1$ sur un point $y_0 = f(x_0)$, $y_0 \in F$ peut se calculer par la formule :

$$(7) \quad (f^{-1})^{(k)}(y_0) = \sum \frac{(2k - i_1 - 2)! (-1)^{k+i_1-1}}{i_2! \dots i_k! (f'(x_0))^{2k-1}} \left(\frac{f'(x_0)}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{f''(x_0)}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right)^{i_k},$$

où la somme ci-dessus est étendue à toutes les solutions entières et nonnégatives du système :

$$(8) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + \dots + (k-1)i_k = k-1 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_k = k-1. \end{cases}$$

Si on suppose que l'équation (1) a une racine dans l'intervalle I , cette racine est unique parce que $f'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in I$ et nous la désignerons par \bar{x} . Alors de $f(\bar{x}) = 0$ il résulte que $\bar{x} = f^{-1}(0)$.

Dans ce qui suit, dans l'expression du polynôme d'interpolation donnée par (4) on prendra comme noeuds d'interpolation les valeurs $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$ et comme valeurs y_i^j les valeurs des dérivées $(f^{-1})^{(j)}(y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, $j = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$. Par conséquent on obtient le polynôme d'interpolation d'Hermite pour la fonction inverse f^{-1} . Ce polynôme a alors la forme suivante :

$$(9) \quad H(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} (f^{-1})^{(j)}(y_i) \frac{1}{k! j!} \left[\frac{(y - y_i)^{\alpha_i}}{\omega(y)} \right]_{y=y_i}^{(k)} \frac{\omega(y)}{(y - y_i)^{\alpha_i - j - k}},$$

où

$$(10) \quad \omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)^{\alpha_i}.$$

De (6) il résulte l'égalité

$$f^{-1}(y) - H(y) = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!} \omega(y),$$

où $\eta \in F$.

Si $y = 0$, alors $\bar{x} = f^{-1}(0)$ et

$$(11) \quad \bar{x} - H(0) = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\eta_1)}{(m+1)!} \omega(0),$$

où η_1 est un point du plus petit intervalle contenant les points :

$$0, f(x_1), \dots, f(x_{n+1}).$$

Si on désigne par F_1 cet intervalle et par

$$M_{m+1} = \sup_{y \in F_1} |(f^{-1})^{(m+1)}(y)|,$$

alors

$$|\bar{x} - H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |\omega(0)|.$$

De (10) et du fait que $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$ on déduit

$$(12) \quad |\bar{x} - H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |f(x_1)|^{\alpha_1} \cdot |f(x_2)|^{\alpha_2} \dots |f(x_{n+1})|^{\alpha_{n+1}}.$$

De l'inégalité (12) il résulte que si x_1, x_2, \dots, x_{n+1} sont dans un voisinage suffisamment petit de \bar{x} , alors $\prod_{i=1}^{n+1} |f(x_i)|^{\alpha_i}$ se trouvera dans un voisinage donné d'avance de 0. En conséquence, nous pouvons supposer que $H(0)$ est un approximant de la racine \bar{x} de l'équation (1).

Si $|\bar{x} - H(0)|$ n'est pas suffisamment petit, alors, par des itérations successives on peut obtenir des approximations meilleures. Désignons par x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , $n + 1$ approximations initiales de la racine \bar{x} de (1). Soit $x_{n+2} = H(0) = H(y_1, \alpha_1; \dots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; 0)$, où $H(y_1, \alpha_1; y_2, \alpha_2; \dots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; y)$ est le polynôme d'interpolation d'Hermite (9) de la fonction f^{-1} relatif aux noeuds y_1, y_2, \dots, y_{n+1} aux ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ et $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Si nous considérons maintenant le nouveau système de noeuds $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}$ on obtient une nouvelle approximation $x_{n+3} = H(y_2, \alpha_1; y_3, \alpha_2; \dots; y_{n+2}, \alpha_{n+1}; 0)$ et ainsi de suite.

Mais, si nous rangeons les noeuds x_1, x_2, \dots, x_{n+2} dans l'ordre $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$, on obtient une nouvelle suite d'approximations de \bar{x} , donnée par les formules

$$(13) \quad \begin{cases} x_{n+2} = H(y_{i_1}, \alpha_{i_1}; y_{i_2}, \alpha_{i_2}; \dots; y_{i_{n+1}}, \alpha_{i_{n+1}}; 0) = H(0) \\ x_{n+s+2} = H(y_{i_{s+1}}, \alpha_{i_{s+1}}; \dots; y_{i_n}, \alpha_{i_n}; y_{n+2}, \alpha_{i_{n+2-s}}; \dots; y_{n+s+1}, \alpha_{i_{n+1}}; 0) \\ s = 1, 2, \dots, n, \\ x_{n+s+2} = H(y_{s+1}, \alpha_{i_1}; y_{s+2}, \alpha_{i_2}; \dots; y_{n+s+1}, \alpha_{i_{n+1}}; 0), \\ s = n + 1, n + 2, \dots, \end{cases}$$

où $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$.

Pour chaque permutation des nombres 1, 2, ..., n + 1 on obtient une suite d'approximations de \bar{x} donnée par (13). En tout, il y a (n + 1)! suites d'approximations de \bar{x} .

On pose la question de choisir parmi ces (n + 1)! suites, celle qui assure la vitesse de convergence maximale.

Pour résoudre ce problème, on considère les équations suivantes

$$(14) \quad P(t) = t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \dots - a_2 t - a_1 = 0,$$

$$(15) \quad Q(t) = t^{n+1} - a_1 t^n - a_2 t^{n-1} - \dots - a_n t - a_{n+1} = 0,$$

$$(16) \quad R(t) = t^{n+1} - a_{i_1} t^n - \dots - a_{i_n} t - a_{i_{n+1}} = 0,$$

où $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in R$ vérifient les relations

$$(17) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} > 1, \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

$$(18) \quad a_{n+1} \geq a_n \geq \dots \geq a_2 \geq a_1,$$

et i_1, i_2, \dots, i_{n+1} est une permutation quelconque de 1, 2, ..., n + 1.

LEMME Si a_1, a_2, \dots, a_{n+1} vérifient la relation (17), alors chaque équation de la forme (16) a une seule racine plus grande que l'unité. Si, de plus, a_1, a_2, \dots, a_{n+1} vérifient la condition (18) et si a, b, c sont respectivement les racines positives des équations (14), (15) ou (16), alors on a les inégalités

$$(19) \quad 1 < b \leq c \leq a.$$

Démonstration. On désigne par s le plus grand nombre pour lequel $a_i \neq 0$. Alors $a_{i_{s+1}} = a_{i_{s+2}} = \dots = a_{i_n} = a_{i_{n+1}} = 0, a_i \neq 0$. Désignons par ψ la fonction définie par $\psi(t) = R(t)/t^{n-s+1}$. On a $\psi(1) = 1 - a_{i_1} - \dots - a_{i_s} < 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$, donc l'équation $\psi(t) = 0$ admet une racine plus grande que l'unité. Alors, l'équation $R(t) = 0$ a une racine plus grande que 1. L'unicité de cette racine résulte immédiatement en considérant la fonction $f(t) = -t^{n+1} R(1/t)$ qui vérifie la condition $f'(t) > 0$ pour $t > 0$.

Pour prouver les inégalités (19) il suffit de montrer que $R(b) \leq 0$ et $R(a) \geq 0$. En effet

$$\begin{aligned} R(b) &= R(b) - Q(b) = (a_1 - a_{i_1})b^n + (a_2 - a_{i_2})b^{n-1} + \dots + \\ &+ (a_n - a_{i_n})b + a_{n+1} - a_{i_{n+1}} = (b - 1)[(a_1 - a_{i_1})b^{n-1} + \\ &+ (a_1 + a_2 - a_{i_1} - a_{i_2})b^{n-2} + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - a_{i_1} - \\ &- a_{i_2} - \dots - a_{i_{n-1}})b + a_1 + \dots + a_n - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_n}] \leq 0, \end{aligned}$$

parce que $b > 1$ et de (18) il résulte

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_i} \leq 0, \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, n.$$

De manière analogue on montre que $R(a) \geq 0$.

Soit maintenant i_1, i_2, \dots, i_{n+1} une permutation des nombres 1, 2, ..., n + 1, pour laquelle les nombres naturels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ qui vérifient la relation (2) peuvent se ranger en ordre croissant

$$(20) \quad \alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \dots \leq \alpha_{i_n} \leq \alpha_{i_{n+1}}.$$

La suite correspondante des noeuds est $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$ et la suite correspondante des approximations successive de \bar{x} est donnée par (13). Si nous désignons par

$$(21) \quad a_s = \alpha_{i_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n + 1,$$

et par

$$(22) \quad u_s = x_{i_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n + 1,$$

alors la suite d'approximations (13) devient $(u_n)_{n=1}^\infty$ où

$$(23) \quad x_{n+s+2} = H(y_{s+1}, a_1; y_{s+2}, a_2; \dots; y_{s+n+1}, a_{n+1}; 0),$$

$s = 0, 1, \dots$, où $y_i = f(u_i), i = 1, 2, \dots$.

L'inégalité (12) devient

$$(24) \quad |\bar{x} - H(0)| = |\bar{x} - u_{n+2}| \leq \frac{M}{(m+1)!} |f(u_1)|^{\alpha_1} \dots |f(u_{n+1})|^{\alpha_{n+1}},$$

où $M = \sup_{y \in I} |(f^{-1})^{(m+1)}(y)|$. Si nous désignons par $\beta = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ alors de (23) et (24) on obtient

$$(25) \quad |\bar{x} - u_{n+2}| \leq \frac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_1|^{\alpha_1} \dots |\bar{x} - u_{n+1}|^{\alpha_{n+1}}.$$

En général, si les éléments de la suite $(u_n)_{n=1}^\infty$ sont dans l'intervalle I, alors

$$(26) \quad |\bar{x} - u_{n+s+1}| \leq \frac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_s|^{\alpha_1} \dots |\bar{x} - u_{s+n}|^{\alpha_{n+1}},$$

$s = 1, 2, \dots$. Si nous écrivons $\rho_i = \beta \sqrt[m]{\frac{\beta M}{(m+1)!}} |\bar{x} - u_i|, i = 1, 2, \dots$, alors de (26) on obtient

$$(27) \quad \rho_{n+s+1} \leq \rho_{n+s}^{\alpha_{n+1}} \rho_{n+s-1}^{\alpha_n} \dots \rho_{s+1}^{\alpha_2} \rho_s^{\alpha_1},$$

$s = 1, 2, \dots$.

Nous supposons maintenant qu'il existe un nombre $d, 0 < d < 1$ tel que

$$(28) \quad \rho_i \leq d^{\omega_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

où ω est l'unique racine positive de l'équation

$$(29) \quad t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \dots - a_2 t - a_1 = 0.$$

Si on suppose que pour un s fixé $s \geq 2$ nous avons

$$(30) \quad \rho_{n+s} \leq d^{n+s},$$

alors de (27), (28) et (29) il résulte immédiatement que

$$(31) \quad \begin{aligned} \rho_{n+s+1} &\leq d^{a_{n+1}\omega^{n+s}} \cdot d^{a_n\omega^{n+s-1}} \cdot \dots \cdot d^{a_2\omega^{s+1}} \cdot d^{a_1\omega^s} = \\ &= d^{a_{n+1}\omega^{n+s} + a_n\omega^{n+s-1} + \dots + a_2\omega^{s+1} + a_1\omega^s} = d^{\omega^{n+s+1}}, \end{aligned}$$

et par induction il résulte que

$$(32) \quad \rho_n \leq d^{\omega^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solution ω de l'équation (29) s'appelle l'ordre de convergence de la méthode itérative (23). On a

$$(33) \quad |\bar{x} - u_n| \leq \frac{1}{\beta \sqrt[m]{\frac{M\beta}{(m+1)!}}} d^{\omega^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

d'où il résulte que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \bar{x}$.

On remarque que l'ordre de convergence des méthodes (13) dépend de la racine positive ω de l'équation (29).

En tenant compte du lemme et des considérations ci-dessus on obtient le théorème suivant :

THÉOREME. Soit i_1, i_2, \dots, i_{n+1} une permutation de $1, 2, \dots, n+1$ et $M(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ la méthode itérative (13) correspondante. Si $\alpha_i \leq \alpha_{i_2} \leq \dots \leq \alpha_{i_{n+1}}$, où α_i est l'ordre de multiplicité du noeud $y_i = f(x_i)$, $j = 1, 2, \dots, n+1$, alors dans les conditions (28) $M(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ assure l'ordre de convergence ω maximal, parmi les $(n+1)!$ méthodes itératives de la forme (13).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ostrowski, M. A. *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, New-York and London, 1960.
- [2] Păvăloiu, I., *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Ed. DACIA, 1981.
- [3] Păvăloiu, I., Iancu, C., *La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite*, Seminar of functional analysis and numerical methods, „Babeș-Bolyai” University, Reserch Seminars, Preprint Nr. 4, (1981), 72–84.

Recu le 5.III.1983.

Institutul de calcul
al Universității Babeș-Bolyai
Str. Republicii 37
3400 Cluj-Napoca