

SUR QUELQUES MÉTHODES ITÉRATIVES DE TYPE  
INTERPOLATOIRE À VITESSE DE CONVERGENCE  
OPTIMALE

par

ION PĂVĂLOIU et IOAN ȘERB

(Cluj-Napoca)

Dans cet article nous étudions une classe de méthodes itératives pour la résolution des équations de la forme :

$$(1) \quad f(x) = 0,$$

où  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction réelle d'une variable réelle et  $I$  est un intervalle de l'axe réel.

Désignons par  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ,  $n+1$  points distincts de l'intervalle  $I$  et par  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ ,  $n+1$  nombres naturels tels que :

$$(2) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = m + 1,$$

où  $m \in \mathbb{N}$ .

Il est bien connu que quels que soient les nombres  $y_j^i$ ,  $j=0, 1, \dots, \alpha_i-1$ ,  $i=1, 2, \dots, n+1$ , il existe un seul polynôme  $H_1$  de degré au plus  $m$  qui vérifie les conditions :

$$(3) \quad H_1^{(j)}(x_i) = y_j^i, \quad j=0, 1, \dots, \alpha_i-1, \quad i=1, 2, \dots, n+1.$$

Le polynôme  $H_1$  déterminé par les conditions (3) a la forme :

$$(4) \quad H_1(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} y_j^i \frac{1}{k!j!} \left[ \frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\omega(x)} \right]_{x=x_i}^{(k)} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i-j-k}},$$

où

$$(5) \quad \omega(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x-x_i)^{\alpha_i}.$$

Si on suppose que la fonction  $f$  admet une dérivée d'ordre  $m + 1$  sur l'intervalle  $I$  et si  $y_i^j = f^{(j)}(x_i)$ ,  $j = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ , alors  $H_1$ , le polynôme d'Hermite de la fonction  $f$ , relativement aux noeuds  $x_i$ , aux ordres de multiplicité  $\alpha_i$ , vérifie l'égalité :

$$(6) \quad f(x) - H_1(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \omega(x),$$

où  $\xi \in I$ .

Dans ce qui suit on suppose que  $f'(x) \neq 0$  quelque soit  $x \in I$  et on désigne par  $F = f(I)$ . Il résulte que  $f: I \rightarrow F$  est une fonction bijective et il existe  $f^{-1}: F \rightarrow I$ . La fonction inverse  $f^{-1}$  admet une dérivée d'ordre  $m + 1$ , pour tout  $x \in F$ .

La dérivée d'ordre  $k$ ,  $k \leq m + 1$  sur un point  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_0 \in F$  peut se calculer par la formule :

$$(7) \quad (f^{-1})^{(k)}(y_0) = \sum \frac{(2k - i_1 - 2)! (-1)^{k+i_1-1}}{i_2! \dots i_k! (f'(x_0))^{2k-1}} \left(\frac{f'(x_0)}{1!}\right)^{i_1} \left(\frac{f''(x_0)}{2!}\right)^{i_2} \dots \left(\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right)^{i_k}$$

où la somme ci-dessus est étendue à toutes les solutions entières et nonnégatives du système :

$$(8) \quad \begin{cases} i_2 + 2i_3 + \dots + (k-1)i_k = k-1 \\ i_1 + i_2 + \dots + i_k = k-1. \end{cases}$$

Si on suppose que l'équation (1) a une racine dans l'intervalle  $I$ , cette racine est unique parce que  $f'(x) \neq 0$  quel que soit  $x \in I$  et nous la désignerons par  $\bar{x}$ . Alors de  $f(\bar{x}) = 0$  il résulte que  $\bar{x} = f^{-1}(0)$ .

Dans ce qui suit, dans l'expression du polynôme d'interpolation donnée par (4) on prendra comme noeuds d'interpolation les valeurs  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n + 1$  et comme valeurs  $y_i^j$  les valeurs des dérivées  $(f^{-1})^{(j)}(y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$ . Par conséquent on obtient le polynôme d'interpolation d'Hermite pour la fonction inverse  $f^{-1}$ . Ce polynôme a alors la forme suivante :

$$(9) \quad H(y) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \sum_{k=0}^{\alpha_i-j-1} (f^{-1})^{(j)}(y_i) \frac{1}{k! j!} \left[ \frac{(y - y_i)^{\alpha_i}}{\omega(y)} \right]_{y=y_i}^{(k)} \frac{\omega(y)}{(y - y_i)^{\alpha_i - j - k}},$$

où

$$(10) \quad \omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)^{\alpha_i}.$$

De (6) il résulte l'égalité

$$f^{-1}(y) - H(y) = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!} \omega(y),$$

où  $\eta \in F$ .

Si  $y = 0$ , alors  $\bar{x} = f^{-1}(0)$  et

$$(11) \quad \bar{x} - H(0) = \frac{(f^{-1})^{(m+1)}(\eta_1)}{(m+1)!} \omega(0),$$

où  $\eta_1$  est un point du plus petit intervalle contenant les points :

$$0, f(x_1), \dots, f(x_{n+1}).$$

Si on désigne par  $F_1$  cet intervalle et par

$$M_{m+1} = \sup_{y \in F_1} |(f^{-1})^{(m+1)}(y)|,$$

alors

$$|\bar{x} - H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |\omega(0)|.$$

De (10) et du fait que  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n + 1$  on déduit

$$(12) \quad |\bar{x} - H(0)| \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} |f(x_1)|^{\alpha_1} \cdot |f(x_2)|^{\alpha_2} \dots |f(x_{n+1})|^{\alpha_{n+1}}.$$

De l'inégalité (12) il résulte que si  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  sont dans un voisinage suffisamment petit de  $\bar{x}$ , alors  $\prod_{i=1}^{n+1} |f(x_i)|^{\alpha_i}$  se trouvera dans un voisinage donné d'avance de 0. En conséquence, nous pouvons supposer que  $H(0)$  est un approximant de la racine  $\bar{x}$  de l'équation (1).

Si  $|\bar{x} - H(0)|$  n'est pas suffisamment petit, alors, par des itérations successives on peut obtenir des approximations meilleures. Désignons par  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ,  $n + 1$  approximations initiales de la racine  $\bar{x}$  de (1). Soit  $x_{n+2} = H(0) = H(y_1, \alpha_1; \dots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; 0)$ , où  $H(y_1, \alpha_1; y_2, \alpha_2; \dots; y_{n+1}, \alpha_{n+1}; y)$  est le polynôme d'interpolation d'Hermite (9) de la fonction  $f^{-1}$  relatif aux noeuds  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$  aux ordres de multiplicité respectifs  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  et  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ . Si nous considérons maintenant le nouveau système de noeuds  $x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}$  on obtient une nouvelle approximation  $x_{n+3} = H(y_2, \alpha_1; y_3, \alpha_2; \dots; y_{n+2}, \alpha_{n+1}; 0)$  et ainsi de suite.

Mais, si nous rangeons les noeuds  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$  dans l'ordre  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$ , on obtient une nouvelle suite d'approximations de  $\bar{x}$ , donnée par les formules

$$(13) \quad \begin{cases} x_{n+2} = H(y_{i_1}, \alpha_{i_1}; y_{i_2}, \alpha_{i_2}; \dots; y_{i_{n+1}}, \alpha_{i_{n+1}}; 0) = H(0) \\ x_{n+s+2} = H(y_{i_{s+1}}, \alpha_{i_{s+1}}; \dots; y_{i_n}, \alpha_{i_n}; y_{n+2}, \alpha_{i_{n+2-s}}; \dots; y_{n+s+1}, \alpha_{i_{n+1}}; 0) \\ s = 1, 2, \dots, n, \\ x_{n+s+2} = H(y_{s+1}, \alpha_{i_1}; y_{s+2}, \alpha_{i_2}; \dots; y_{n+s+1}, \alpha_{i_{n+1}}; 0), \\ s = n + 1, n + 2, \dots, \end{cases}$$

où  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

Pour chaque permutation des nombres  $1, 2, \dots, n + 1$  on obtient une suite d'approximations de  $\bar{x}$  donnée par (13). En tout, il y a  $(n + 1)!$  suites d'approximations de  $\bar{x}$ .

On pose la question de choisir parmi ces  $(n + 1)!$  suites, celle qui assure la vitesse de convergence maximale.

Pour résoudre ce problème, on considère les équations suivantes

$$(14) \quad P(t) = t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \dots - a_2 t - a_1 = 0,$$

$$(15) \quad Q(t) = t^{n+1} - a_1 t^n - a_2 t^{n-1} - \dots - a_n t - a_{n+1} = 0,$$

$$(16) \quad R(t) = t^{n+1} - a_{i_1} t^n - \dots - a_{i_n} t - a_{i_{n+1}} = 0,$$

où  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in R$  vérifient les relations

$$(17) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} > 1, \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

$$(18) \quad a_{n+1} \geq a_n \geq \dots \geq a_2 \geq a_1,$$

et  $i_1, i_2, \dots, i_{n+1}$  est une permutation quelconque de  $1, 2, \dots, n + 1$ .

LEMME Si  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  vérifient la relation (17), alors chaque équation de la forme (16) a une seule racine plus grande que l'unité. Si, de plus,  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  vérifient la condition (18) et si  $a, b, c$  sont respectivement les racines positives des équations (14), (15) ou (16), alors on a les inégalités

$$(19) \quad 1 < b \leq c \leq a.$$

Démonstration. On désigne par  $s$  le plus grand nombre pour lequel  $a_i \neq 0$ . Alors  $a_{i_{s+1}} = a_{i_{s+2}} = \dots = a_{i_n} = a_{i_{n+1}} = 0, a_i \neq 0$ . Désignons par  $\psi$  la fonction définie par  $\psi(t) = R(t)/t^{n-s+1}$ . On a  $\psi(1) = 1 - a_i - \dots - a_{i_s} < 0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$ , donc l'équation  $\psi(t) = 0$  admet une racine plus

grande que l'unité. Alors, l'équation  $R(t) = 0$  a une racine plus grande que 1. L'unicité de cette racine résulte immédiatement en considérant la fonction  $f(t) = -t^{n+1} R(1/t)$  qui vérifie la condition  $f'(t) > 0$  pour  $t > 0$ .

Pour prouver les inégalités (19) il suffit de montrer que  $R(b) \leq 0$  et  $R(a) \geq 0$ . En effet

$$\begin{aligned} R(b) &= R(b) - Q(b) = (a_1 - a_{i_1})b^n + (a_2 - a_{i_2})b^{n-1} + \dots + \\ &+ (a_n - a_{i_n})b + a_{n+1} - a_{i_{n+1}} = (b - 1)[(a_1 - a_{i_1})b^{n-1} + \\ &+ (a_1 + a_2 - a_{i_1} - a_{i_2})b^{n-2} + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} - a_{i_1} - \\ &- a_{i_2} - \dots - a_{i_{n-1}})b + a_1 + \dots + a_n - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_n}] \leq 0, \end{aligned}$$

parce que  $b > 1$  et de (18) il résulte

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_s} \leq 0, \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, n.$$

De manière analogue on montre que  $R(a) \geq 0$ .

Soit maintenant  $i_1, i_2, \dots, i_{n+1}$  une permutation des nombres  $1, 2, \dots, n + 1$ , pour laquelle les nombres naturels  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  qui vérifient la relation (2) peuvent se ranger en ordre croissant

$$(20) \quad \alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \dots \leq \alpha_{i_n} \leq \alpha_{i_{n+1}}.$$

La suite correspondante des noeuds est  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$  et la suite correspondante des approximations successive de  $\bar{x}$  est donnée par (13). Si nous désignons par

$$(21) \quad a_s = \alpha_{i_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n + 1,$$

et par

$$(22) \quad u_s = x_{i_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n + 1,$$

alors la suite d'approximations (13) devient  $(u_n)_{n=1}^\infty$  où

$$(23) \quad x_{n+s+2} = H(y_{s+1}, a_1; y_{s+2}, a_2; \dots; y_{s+n+1}, a_{n+1}; 0),$$

$s = 0, 1, \dots$ , où  $y_i = f(u_i), i = 1, 2, \dots$ .

L'inégalité (12) devient

$$(24) \quad |\bar{x} - H(0)| = |\bar{x} - u_{n+2}| \leq \frac{M}{(m+1)!} |f(u_1)|^{\alpha_1} \dots |f(u_{n+1})|^{\alpha_{n+1}},$$

où  $M = \sup_{y \in I} |(f^{-1})^{(m+1)}(y)|$ . Si nous désignons par  $\beta = \sup_{x \in I} |f'(x)|$  alors de (23) et (24) on obtient

$$(25) \quad |\bar{x} - u_{n+2}| \leq \frac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_1|^{\alpha_1} \dots |\bar{x} - u_{n+1}|^{\alpha_{n+1}}.$$

En général, si les éléments de la suite  $(u_n)_{n=1}^\infty$  sont dans l'intervalle  $I$ , alors

$$(26) \quad |\bar{x} - u_{n+s+1}| \leq \frac{M\beta^{m+1}}{(m+1)!} |\bar{x} - u_s|^{\alpha_1} \dots |\bar{x} - u_{s+n}|^{\alpha_{n+1}},$$

$s = 1, 2, \dots$ . Si nous écrivons  $\rho_t = \beta \sqrt[m]{\frac{\beta M}{(m+1)!}} |\bar{x} - u_t|, i = 1, 2, \dots$ , alors de (26) on obtient

$$(27) \quad \rho_{n+s+1} \leq \rho_{n+s}^{\alpha_{n+1}} \rho_{n+s-1}^{\alpha_n} \dots \rho_{s+1}^{\alpha_2} \rho_s^{\alpha_1},$$

$s = 1, 2, \dots$ .

Nous supposons maintenant qu'il existe un nombre  $d, 0 < d < 1$  tel que

$$(28) \quad \rho_t \leq d^{\omega^t}, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1,$$

où  $\omega$  est l'unique racine positive de l'équation

$$(29) \quad t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \dots - a_2 t - a_1 = 0.$$

Si on suppose que pour un  $s$  fixé  $s \geq 2$  nous avons

$$(30) \quad \rho_{n+s} \leq d^{n+s},$$

alors de (27), (28) et (29) il résulte immédiatement que

$$(31) \quad \begin{aligned} \rho_{n+s+1} &\leq d^{a_{n+1}\omega^{n+s}} \cdot d^{a_n\omega^{n+s-1}} \cdot \dots \cdot d^{a_2\omega^{s+1}} \cdot d^{a_1\omega^s} = \\ &= d^{a_{n+1}\omega^{n+s} + a_n\omega^{n+s-1} + \dots + a_2\omega^{s+1} + a_1\omega^s} = d^{\omega^{n+s+1}}, \end{aligned}$$

et par induction il résulte que

$$(32) \quad \rho_n \leq d^{\omega^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

La solution  $\omega$  de l'équation (29) s'appelle l'ordre de convergence de la méthode itérative (23). On a

$$(33) \quad |\bar{x} - u_n| \leq \frac{1}{\beta \sqrt[m]{\frac{M\beta}{(m+1)!}}} d^{\omega^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

d'où il résulte que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \bar{x}$ .

On remarque que l'ordre de convergence des méthodes (13) dépend de la racine positive  $\omega$  de l'équation (29).

En tenant compte du lemme et des considérations ci-dessus on obtient le théorème suivant :

**THÉOREME.** Soit  $i_1, i_2, \dots, i_{n+1}$  une permutation de  $1, 2, \dots, n+1$  et  $M(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$  la méthode itérative (13) correspondante. Si  $\alpha_i \leq \alpha_{i_2} \leq \dots \leq \alpha_{i_{n+1}}$ , où  $\alpha_i$  est l'ordre de multiplicité du noeud  $y_i = f(x_i)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n+1$ , alors dans les conditions (28)  $M(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$  assure l'ordre de convergence  $\omega$  maximal, parmi les  $(n+1)!$  méthodes itératives de la forme (13).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ostrowski, M. A. *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, New-York and London, 1960.
- [2] Păvăloiu, I., *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Ed. DACIA, 1981.
- [3] Păvăloiu, I., Iancu, C., *La résolution des équations par interpolation inverse de type Hermite*, Seminar of functional analysis and numerical methods, „Babeș-Bolyai” University, Reserch Seminars, Preprint Nr. 4, (1981), 72–84.

Recu le 5.III.1983.

Institutul de calcul  
al Universității Babeș-Bolyai  
Str. Republicii 37  
3400 Cluj-Napoca