

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS  
QUASI-CONVEXES (I)

par

ELENA POPOVICIU

(Cluj-Napoca)

1. La propriété d'allure ou le comportement des objets mathématiques qu'on rencontre dans n'importe quel problème peuvent être fondamentés, de point de vue théorique, en parcourant des diverses voies. Le terme d'„allure” est, souvent, utilisé pour exprimer la monotonie, la convexité ou la convexité d'ordre supérieur d'une fonction. On utilise des locutions : „allure de monotonie”, „allure de convexité” etc. Sans faire des affirmations risquantes, on peut dire que, dans la plus part des situations, ces comportements ont été découverts après avoir comparé les objets considérés avec leurs images obtenues à l'aide d'un procédé d'interpolation habituel ou généralisé. Pour en donner des exemples il suffit de nous nous rappeler la définition de la propriété de convexité d'un certain ordre d'une fonction, à l'aide des différences divisées d'ordre correspondant. Nous essayerons maintenant à présenter une construction un peu plus générale des notions d'allure dont nous venons de parler. On est conduit à faire une telle construction si on veut préciser la liaison entre la convexité d'ordre supérieur et la quasi-convexité d'ordre supérieur.

2. Soit  $A$  un ensemble et  $B$  un sous-ensemble non vide de  $A$ ,  $B \neq A$ . Supposons qu'on a fait une partition de l'ensemble  $B$ ,  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ ,  $k \geq 2$ ,  $B_i \cap B_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ . Soit  $U$  un opérateur,  $U : A \rightarrow B$ .

DÉFINITION 2.1. Nous disons que l'élément  $x \in A$  a l'allure  $(B_j, U)$  si  $U(x) \in B_j$ .

Considérons maintenant un ensemble  $\mathcal{U}$  non vide d'opérateurs  $U : A \rightarrow B$ .

DÉFINITION 2.2. Nous disons que l'élément  $x \in A$  a l'allure  $(B_j, \mathcal{U})$  si pour chaque  $U \in \mathcal{U}$  il a l'allure  $(B_j, U)$ .

Dans la théorie de l'approximation, on rencontre souvent un cas particulier très important. Il s'agit de la présence des conditions :

$$(2.1) \quad \text{si } x \in B \text{ alors } U(x) = x, \text{ pour chaque } U \in \mathcal{U}$$

$$(2.2) \quad \text{si } x \in B_j \text{ alors } U(x) \in B_j, \text{ pour chaque } U \in \mathcal{U}.$$

La condition (2.1) est étroitement liée avec l'interpolation. La condition (2.2), plus faible que (2.1), est satisfaite par certains procédés d'interpolation généralisés remarquables.

Si la condition (2.1) est remplie, alors, pour l'image  $x^* = U(x)$ , comptenant du fait que  $x^* \in B$ , on a  $U(x^*) = x^*$ . Si la condition (2.2) est satisfaite alors, si  $x^* = U(x)$  et  $x^* \in B_j$ , on a  $U(x^*) \in B_j$ , c'est à dire  $U(x)$  et  $U(x^*)$  appartiennent à la même classe  $B_j$ .

La présence d'une au moins des conditions (2.1) ou (2.2) justifie la

**DÉFINITION 2.3.** Nous disons que l'élément  $x \in A$  est comparable par  $\mathcal{U}$  avec les éléments de la classe  $B_j$  s'il a l'allure  $(B_j, \mathcal{U})$ .

Nous allons donner des exemples. Pour l'entier  $n \geq 0$  fixé, désignons par  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à  $n + 1$ . Soit  $X \subseteq \mathbf{R}$  où  $\text{card } X \geq n + 2$  et

$$(2.3) \quad x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$$

des points distincts de l'ensemble  $X$ . Soit  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ . L'opérateur de Lagrange

$$(2.4) \quad L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; \cdot)$$

transforme la fonction  $f$  en

$$(2.5) \quad L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f).$$

Pour chaque système (2.3) de points de l'ensemble  $X$  on peut considérer l'opérateur (2.4) de Lagrange, correspondant. Désignons par  $\mathcal{L}_{n+1}$  l'ensemble de ces opérateurs.

Les éléments de l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  sont des combinaisons linéaires de la forme  $\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i e_i$  où  $e_i: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  pour  $i = 0, 1, \dots, n + 1$  et  $e_i(x) = x^i$  pour  $x \in \mathbf{R}$  et  $i = 0, 1, 2, \dots, n + 1$ . Les  $\alpha_i$  sont de nombres réels. Pour l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  on peut considérer la partition

$$(2.6) \quad \mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_{n+1}^+ \cup \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_{n+1}^-.$$

On a désigné par  $\mathcal{P}_{n+1}^+$  la classe des éléments  $\sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i e_i$  avec  $\alpha_{n+1} > 0$  et  $\mathcal{P}_{n+1}^-$  désigne la classe des éléments avec  $\alpha_{n+1} < 0$ .

Comme nous nous sommes fixé à une fonction  $f$  définie sur l'ensemble  $X$ , nous considérons pour les éléments de  $\mathcal{P}_{n+1}$  qui interviendront, leurs restrictions à l'ensemble  $X$ , sans introduire une nouvelle notation au lieu de  $\mathcal{P}_{n+1}$ . Si  $A = \{f|f: X \rightarrow \mathbf{R}\}$  et  $B = \mathcal{P}_{n+1}$ , on peut appliquer les définitions que nous venons de donner.

Si  $L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$  alors la fonction  $f$  a l'allure  $(\mathcal{P}_{n+1}^+, L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; \cdot))$ . Si pour chaque système (2.3) de points distincts de  $X$  on a  $L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$  alors la fonction  $f$  a l'allure  $(\mathcal{P}_{n+1}^+, \mathcal{L}_{n+1})$ , c'est à dire elle est comparable par  $\mathcal{L}_{n+1}$  avec les éléments de  $\mathcal{P}_{n+1}^+$ . On remarque que l'allure  $(\mathcal{P}_{n+1}^+, L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; \cdot))$  se réduit à la convexité d'ordre  $n$  sur les points (2.3). L'allure  $(\mathcal{P}_{n+1}^+, \mathcal{L}_{n+1})$  est l'allure de convexité d'ordre  $n$  sur l'ensemble  $X$ . En effet, la condition  $L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f) \in \mathcal{P}_{n+1}^+$  implique  $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] > 0$ , c'est à dire la convexité d'ordre  $n$  sur les points (2.3).

Les fonctions  $f$  qui ont l'allure  $(\mathcal{P}_{n+1}^-, L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; \cdot))$  sont concaves d'ordre  $n$  sur les points (2.3) et celles qui ont l'allure  $(\mathcal{P}_{n+1}^-, \mathcal{L}_{n+1})$  sont concaves d'ordre  $n$  sur  $X$ . Les fonctions  $f$  qui ont l'allure  $(\mathcal{P}_n, L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; \cdot))$  sont polynômes d'ordre  $n$  sur les points (2.3) et celles qui ont l'allure  $(\mathcal{P}_n, \mathcal{L}_{n+1})$  sont polynômes d'ordre  $n$  sur l'ensemble  $X$ .

Nous revenons maintenant, encore une fois, à l'interprétation du terme „comparable” introduit par la définition 2.3. Dans le cas  $A = \{f|f: X \rightarrow \mathbf{R}, \text{card } X \geq n + 2\}$  et  $B = \mathcal{P}_{n+1}$ , la propriété d'une fonction  $f \in A$  d'être comparable par  $\mathcal{L}_{n+1}$  avec les éléments de la classe  $\mathcal{P}_{n+1}^+$  s'exprime aussi par la positivité de toutes les différences divisées  $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$ , les points (2.3) étant choisis de toutes les manières possibles dans  $X$ . Mais ça signifie aussi qu'en supposant

$$(2.7) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2},$$

l'on a

$$(2.8) \quad f(x_{n+2}) - L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) = (x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2) \dots (x_{n+2} - x_{n+1})[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] > 0.$$

La condition (2.8), dans le cas (2.7), est satisfaite par toute  $f \in \mathcal{P}_{n+1}^+$ . C'est encore une justification de la terminologie „ $f$  est comparable par  $\mathcal{L}_{n+1}$  avec les éléments de  $\mathcal{P}_{n+1}^+$ ”. La même remarque peut être faite pour la comparabilité avec les éléments de la classe  $\mathcal{P}_{n+1}^-$ . Pour les notations et pour les propriétés qui découlent de la condition (2.8) on peut consulter [2].

Les exemples que nous avons donnés plus haut ont une grande importance dans la théorie de la convexité. En même temps ils mettent en évidence la possibilité de considérer pour l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  encore d'autres partitions et de définir les allures qui en correspondent.

Au lieu de l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  on peut considérer un ensemble interpolatoire quelconque et on obtient les allures qui s'y rattachent. En ce qui concerne la condition (2.2),  $A$  étant l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'intervalle  $[0,1]$  et  $B = \mathcal{P}_{n+1}$ ,  $n \geq 1$ , on peut construire un exemple remarquable à l'aide des opérateurs de S. N. BERNSTEIN, avec une partition convenable de l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  et compte tenant du fait, bien



connu, que ces opérateurs conservent les propriétés de convexité de divers ordres.

Nous soulignons, encore, que les définitions 2.1 et 2.2 donnent la possibilité de construire des nouveaux exemples d'allures en choisissant d'une façon convenable les opérateurs  $U$ .

Concernant les opérateurs de Lagrange  $L(\mathcal{P}_n; x_1, x_1, \dots, x_{n+1}; \cdot)$ , il faut préciser que la voie qui nous conduit jusqu'à l'image  $L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)$  de la fonction  $f$  est assez compliquée. En effet, pour obtenir le polynôme de Lagrange  $L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)$  on passe de  $f$  à la restriction  $g$  de  $f$  sur les points  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Le polynôme de Lagrange s'obtient en utilisant seulement la restriction  $g$ . Ici intervient donc une première transformation qui nous conduit de  $f$  à sa restriction  $g$  et puis  $g$  est transformée par l'opérateur  $L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \cdot)$  et ainsi on obtient  $L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; g)$  qui est évidemment égal à  $L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)$ . On rencontre cette construction toujours quand on considère au lieu de l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  un ensemble interpolatoire quelconque.

3. Soit, maintenant,  $n \geq 0$  fixé et  $X \subseteq \mathbf{R}$  où  $\text{card } X \geq n + 3$ . Soit  $f$  une fonction réelle définie sur l'ensemble  $X$ . Dans notre travail [3], nous avons introduit la notion de quasi-convexité d'ordre supérieur. Considérons les points

$$(3.1) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{n+3}$$

de l'ensemble  $X$ . En [3] nous avons donné la

**DÉFINITION 3.1.** Nous disons que la fonction  $f$  est quasi-convexe d'ordre  $n$  sur l'ensemble  $X$  si pour chaque système (3.1) de points de l'ensemble  $X$  l'on a

$$(3.2) \quad [x_2, x_3, \dots, x_{n+2}; f] \leq \max \{ [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f], [x_3, x_4, \dots, x_{n+3}; f] \}.$$

**DÉFINITION 3.2.** Nous disons que la fonction  $f$  est strictement quasi-convexe d'ordre  $n$  sur l'ensemble  $X$  si pour chaque système (3.1) de points de l'ensemble  $X$  l'on a

$$(3.3) \quad [x_2, x_3, \dots, x_{n+2}; f] < \max \{ [x_1, x_3, \dots, x_{n+1}; f], [x_3, x_4, \dots, x_{n+3}; f] \}.$$

Si  $n = 0$ , alors on obtient, au sens de la définition 3.1 les fonctions  $f$  pour lesquelles

$$(3.4) \quad f(x_2) \leq \max \{ f(x_1), f(x_3) \},$$

pour chaque système de trois points

$$(3.5) \quad x_1 < x_2 < x_3$$

de l'ensemble  $X$  et au sens de la définition 3.2, les fonctions  $f$  pour lesquelles

$$(3.6) \quad f(x_2) < \max \{ f(x_1), f(x_3) \},$$

pour chaque système (3.5) de points de l'ensemble  $X$ .

Les fonctions pour lesquelles la condition (3.4) est satisfaite ont été considérées pour la première fois dans la littérature mathématique par TIBERIU POPOVICIU [4], pour  $X = [a, b]$  mais pas sous le nom de fonctions quasi-convexes. Dans le travail [4] ces fonctions sont intervenues dans l'étude de la décomposition de l'ensemble de définition d'une fonction d'ordre  $m$  en sous-ensembles sur lesquels la fonction est d'ordre  $m - k$ ,  $1 \leq k \leq m - 1$ . On a démontré, par exemple, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse décomposer l'intervalle  $[a, b]$  en au plus deux sous-intervalles consécutifs tel que sur chacun la fonction  $f$  soit monotone, la monotonie étant de sens opposés sur les deux sous-intervalles, est que  $f$  ou  $-f$  satisfait l'inégalité (3.4). On peut prendre au lieu de  $[a, b]$  un ensemble  $X \subseteq \mathbf{R}$  quelconque, avec  $\text{card } X \geq 3$ .

On remarque, donc, que si  $f$  est convexe (nonconcave) du premier ordre sur  $[a, b]$  alors elle est strictement quasi-convexe (quasi-convexe) d'ordre zéro sur  $[a, b]$ . Mais la réciproque de cette proposition n'est pas vraie. Une fonction quasi-convexe d'ordre zéro peut avoir des restrictions convexes d'ordre 1 et aussi des restrictions concaves d'ordre 1. Comme la convexité et la concavité du premier ordre sont des propriétés exprimées avec le comportement par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_1$ , d'une manière naturelle se pose le problème d'examiner le comportement d'une fonction quasi-convexe (ou bien strictement quasi-convexe) d'ordre zéro, par rapport à un ensemble  $\mathcal{P}_k$  où  $k \neq 1$ .

**LEMME 3.1.** Si la fonction  $f$  est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur  $X$  alors elle prend les valeurs d'un polynôme quelconque de degré zéro sur au plus 2 points distincts de  $X$ .

**LEMME 3.2.** Si la fonction  $f$  est quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$  alors elle peut prendre les valeurs d'un polynôme quelconque de degré zéro sur au plus deux points distincts ou sur une réunion d'au plus deux sous-intervalles de  $[a, b]$  fermés et disjoints.

La démonstration du lemme 3.1 est immédiate. La fonction  $f$  étant strictement quasi-convexe d'ordre zéro, l'ensemble  $X$  se décompose en au plus deux sous-ensembles consécutifs  $X_1, X_2$  sur lesquels  $f$  est monotone, étant décroissante sur  $X_1$  et croissante sur  $X_2$ . Donc, quel que soit  $P \in \mathcal{P}_0$  on peut avoir  $P(x) = f(x)$  sur au plus deux points distincts de  $X$ .

Dans les hypothèses du lemme 3.2, la fonction  $f$  peut avoir des restrictions constantes mais elle peut avoir au plus deux telles restrictions de valeurs égales. Si  $X$  ne se réduit pas à un intervalle, cette affirmation n'est pas vraie.

Pour les fonctions strictement quasi-convexes d'ordre supérieur, on a le

**LEMME 3.3.** Si la fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  est strictement quasi-convexe d'ordre  $n > 0$  sur  $[a, b]$  alors elle peut prendre les valeurs d'un polynôme  $P \in \mathcal{P}_0$  sur au plus  $n + 2$  points distincts de  $[a, b]$ .

Nous avons donné ce résultat dans le travail [3].



4. En examinant le comportement d'une fonction  $f$  strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$  et continue sur  $[a, b]$ , par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_2$ , on obtient les résultats qui suivent.

**THÉORÈME 4.1.** *Si  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$  et  $f$  est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$ , alors quel que soient les points  $x_1 < x_2$  de l'intervalle  $[a, b]$  pour lesquels  $f(x_1) = f(x_2)$ , on a  $L(\mathcal{P}_2; x_1, x^*, x_2; f) \in \mathcal{P}_2^+$ , pour chaque  $x^* \in ]x_1, x_2[$  et on a donc  $[x_1, x^*, x_2; f] > 0$ .*

La démonstration du théorème 4.1 s'obtient à l'aide du lemme 3.1 et compte tenant de la condition (3.6). Si\*)  $f(x_1) = f(x_2)$ , pour  $x_1 < x^* < x_2$  on a  $f(x^*) \neq f(x_1)$ ,  $f(x^*) \neq f(x_2)$ . Donc, il faut avoir  $f(x^*) < f(x_1)$ ,  $f(x^*) < f(x_2)$  et ainsi le polynôme  $L(\mathcal{P}_2; x_1, x^*, x_2; f)$  est convexe et on a  $[x_1, x^*, x_2; f] > 0$ .

Se pose maintenant la question si, sous les hypothèses  $f \in C[a, b]$  et  $f(a) = f(b)$  la condition  $L(\mathcal{P}_2; x_1, x^*, x_2; f) \in \mathcal{P}_2^+$  pour  $f(x_1) = f(x_2)$  et  $x_1 < x^* < x_2$  implique la quasi-convexité stricte de la fonction  $f$ , sur l'intervalle  $[a, b]$ . Ici, il est importante à remarquer qu'on suppose  $L(\mathcal{P}_2; x_1, x^*, x_2; f) \in \mathcal{P}_2^+$  seulement pour les points  $x_1 < x_2$  pour lesquels  $f(x_1) = f(x_2)$  c'est à dire pour lesquels  $f$  prend les valeurs d'un polynôme  $P \in \mathcal{P}_0$ .

Considérons maintenant l'ensemble  $\tilde{\mathcal{L}}_2$  des opérateurs de Lagrange  $L(\mathcal{P}_2; x_1, x_2, x_3; \cdot)$  où  $x_1 < x_2 < x_3$  sont des points de l'intervalle  $[a, b]$  et on a  $f(x_1) = f(x_3)$ . Dans les hypothèses du théorème 4.1, la fonction  $f$  a l'allure  $(\mathcal{P}_2^+, \tilde{\mathcal{L}}_2)$ ,  $A = C[a, b]$  et  $B = \mathcal{P}_2$ .

L'ensemble  $A$  étant maintenant  $C[a, b]$  et  $B = \mathcal{P}_2$ , on peut énoncer le

**THÉORÈME 4.2.** *Si  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$  et  $f$  a l'allure  $(\mathcal{P}_2^+, \tilde{\mathcal{L}}_2)$ , alors elle est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur l'intervalle  $[a, b]$ .*

Pour démontrer le théorème 4.2, remarquons que la présence de l'allure  $(\mathcal{P}_2^+, \tilde{\mathcal{L}}_2)$  a comme conséquence l'inégalité (3.6) pour  $f(x_1) = f(x_3)$  et  $x_1 < x_2 < x_3$ . Supposons maintenant que pour un triplet  $x_1 < x < x_3$  pour lequel  $f(x_1) \neq f(x_3)$  l'on ait  $f(x) > \max\{f(x_1), f(x_3)\}$ . Considérons le cas  $f(x_1) < f(x_3)$ . Compte tenant de la continuité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , il existe un point  $x_1^* \in ]x_1, x[$  et un point  $x_2^* \in ]x, x_3[$  ainsi que  $f(x_1^*) = f(x_2^*) < f(x)$ . Ça signifie que  $L(\mathcal{P}_2; x_1^*, x, x_2^*; f) \notin \mathcal{P}_2^+$ . Mais c'est en contradiction avec l'allure  $(\mathcal{P}_2^+, \tilde{\mathcal{L}}_2)$  qui a été incluse dans l'hypothèse. On obtient la même contradiction si l'on suppose  $f(x_1) < f(x_3) = f(x)$ , pour  $x_1 < x < x_3$ . En effet, sur l'intervalle  $[x_1, x_2]$ , trois situations peuvent se présenter. La fonction  $f$  soit constante sur  $[x, x_2]$ . Mais, alors,  $L(\mathcal{P}_2; x, x^*, x_2; f) \in \mathcal{P}_1$ , pour chaque  $x^* \in ]x, x_2[$ , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Supposons que pour un  $x^* \in ]x, x_2[$  l'on a  $f(x^*) > f(x) = f(x_2)$ , alors nous sommes dans le cas traité plus haut, ayant  $L(\mathcal{P}_2; x, x^*, x_2; f) \in \mathcal{P}_2^-$  et  $f(x) = f(x_2)$ , ce qui est en contradiction avec les hypothèses. En fin, si  $f$  prend sur un point  $x^* \in$

\* la condition  $f(a) = f(b)$  assure l'existence des points  $x_1 < x_2$  pour lesquels  $f(x_1) = f(x_2)$ .

$\in ]x, x_2[$  une valeur plus petite que  $f(x) = f(x_2)$ , alors à cause de la continuité de  $f$ , on peut trouver deux points  $x_1^* \in ]x_1, x[$ ,  $x_2^* \in ]x, x_2[$  pour lesquels  $f(x_1^*) = f(x_2^*) < f(x)$ . On a donc  $L(\mathcal{P}_2; x_1^*, x, x_2^*; f) \in \mathcal{P}_2^-$ , qui est aussi en contradiction avec l'hypothèse.

Le cas  $f(x_1) > f(x_2)$  ne présente rien de nouveau. Le théorème est démontré.

Avant de considérer le cas  $f(a) \neq f(b)$  et le cas dans lequel  $f$  peut avoir des discontinuités, il faut remarquer que dans l'énoncé du théorème 4.1, l'ensemble  $\tilde{\mathcal{L}}_2$  ne peut pas être enrichi avec d'autres éléments de l'ensemble  $\mathcal{L}_2$ . C'est une conséquence immédiate du fait que nous avons souligné plus haut, qu'une fonction quasi-convexe (strictement ou non) d'ordre zéro peut avoir des restrictions convexes du premier ordre et aussi des restrictions concaves du premier ordre. Mais en même temps, comme il résulte du théorème 4.2, la simple allure  $(\mathcal{P}_2^+, \mathcal{L}_2)$  assure la quasi-convexité stricte, dans les hypothèses précisées dans l'énoncé.

**THÉORÈME 4.3.** *Si  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$  et  $f$  est quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$ , alors  $[x_1, x^*, x_2; f] \geq 0$  quel que soient les points  $x_1 < x^* < x_2$  de l'intervalle  $[a, b]$ , pour lesquels  $f(x_1) = f(x_2)$ .*

La démonstration est immédiate comme dans le cas du théorème 4.1.

**THÉORÈME 4.4.** *Si  $f \in C[a, b]$ ,  $f(a) = f(b)$  et  $[x_1, x^*, x_2; f] \geq 0$  quels que soient les points  $x_1 < x^* < x_2$  de l'intervalle  $[a, b]$  pour lesquels  $f(x_1) = f(x_2)$ , alors la fonction  $f$  est quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$ .*

La démonstration suit la même voie que dans le cas du théorème 4.2.

5. Pour étudier le comportement des fonctions quasi-convexes qui ont des discontinuités, nous commençons avec certaines propriétés que nous allons faire intervenir.

Considérons le graph  $G_f$  d'une fonction  $f \in C[a, b]$ , dans le cas  $f(a) \neq f(b)$ . Soit par exemple  $f(a) < f(b)$ . Désignons par  $I_a$  l'ensemble  $\{(a, y) \mid f(a) \leq y \leq f(b)\}$ . La réunion  $G_f \cup I_a$  sera appelée le graphe complété de la fonction  $f$  et nous le désignerons par  $\tilde{G}_f$ . Par analogie on fait la construction pour  $I_b$  et  $G_f \cup I_b$  dans le cas  $f(a) > f(b)$ , sans en utilisant une autre notation pour  $G_f \cup I_b$ .

Si  $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ , on peut considérer les polynômes de Lagrange\*).

$$(5.1) \quad L(\mathcal{P}_2; x_1, x, x_2; f(x_1), f(x), f(x_2)),$$

pour  $x_1 \neq a, x_2 \neq b$

$$(5.2) \quad L(\mathcal{P}_2; a, x, x_2; y, f(x), f(x_2)),$$

pour  $x_1 = a$  où  $y \in I_a$  et

$$(5.3) \quad L(\mathcal{P}_2; x_1, x, b; f(x_1), f(x), y)),$$

pour  $x_2 = b$  et  $y \in I_b$ .

\* la notation est celle que nous avons utilisée en [2].



Le coefficient de  $e_2$  dans la combinaison linéaire  $\sum_{i=0}^2 \alpha_i e_i$ , qui représente le polynôme (5.2) sera désigné par

$$(5.4) \quad [a, x, x_2; y, f(x), f(x_2)]$$

ou plus simple, par

$$(5.5) \quad [(a, y), x, x_2; f]_{\text{ext}}$$

et dans le cas du polynôme (5.3), par

$$(5.6) \quad [x_1, x, b; f(x_1), f(x), y]$$

ou plus simple, par

$$(5.7) \quad [x_1, x, (b, y); f]_{\text{ext}},$$

les nouvelles différences divisées recevant le nom de différences divisées par extension, sur les points  $(a, y)$ ,  $x_1, x_2$  respectivement  $x_1, x, (b, y)$ . Pour chaque  $y \in I_a$  nous aurons une différence divisée par extension, de la forme (5.5) et pour chaque  $y \in I_b$  une différence divisée par extension, de la forme (5.7).

Par analogie nous désignons

$$(5.8) \quad L(\mathcal{P}_2; (a, y), x, x_2; f)_{\text{ext}} = L(\mathcal{P}_2; a, x, x_2; y, f(x), f(x_2))$$

respectivement

$$(5.9) \quad L(\mathcal{P}_2; x_1, x, (b, y); f)_{\text{ext}} = L(\mathcal{P}_2; x_1, x, b; f(x_1), f(x), y)$$

et nous appelons (5.8) une extension du polynôme de Lagrange de la fonction  $f$ , sur les points  $(a, y)$ ,  $x, x_2$ , respectivement (5.9) une extension du polynôme de Lagrange de la fonction  $f$ , sur les points  $x_1, x, (b, y)$ . Les notations qui interviennent dans le deuxième membre de (5.8) et (5.9) sont celles de [2].

Une construction similaire peut être considérée pour les points de discontinuité de la première espèce d'une fonction  $f$ . Si  $f_o(x_0)$  et  $f_a(x_0)$  sont les limites à gauche respectivement à droite sur  $x_0$ , de la fonction  $f$ , on peut utiliser les notations

$$(5.10) \quad \alpha = \min \{f(x_0), f_o(x_0), f_a(x_0)\}$$

$$(5.11) \quad \beta = \max \{f(x_0), f_o(x_0), f_a(x_0)\}.$$

Désignons aussi

$$(5.12) \quad \mathcal{J}_{x_0} = \{(x_0, y) | \alpha \leq y \leq \beta\}.$$

Si  $x_0 = a$  (respectivement  $b$ ), alors on considère seulement la limite  $f_a(a)$  (respectivement  $f_o(b)$ ). Supposons qu'on a construit tous les  $\mathcal{J}_{x_\gamma}$ , pour une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$ ,  $\gamma$  appartenant à un ensemble au plus dénom-

brable.  $D$ . On considère la réunion  $\bigcup_{\gamma \in D} \mathcal{J}_{x_\gamma}$  et si  $a$  et  $b$  ou bien  $a$  ou  $b$  ne sont pas des points de discontinuité on considère aussi, pour  $f(a) \neq f(b)$   $(\bigcup_{\gamma \in D} \mathcal{J}_{x_\gamma}) \cup I_a$  ou  $(\bigcup_{\gamma \in D} \mathcal{J}_{x_\gamma}) \cup I_b$ .

Soit maintenant  $\mathcal{Q}_f$  le graphe de la fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  qui a des discontinuités de la première espèce. On désigne par  $\tilde{\mathcal{Q}}_f$  la réunion de  $\mathcal{Q}_f$  avec les  $\mathcal{J}_{x_\gamma}$ ,  $\gamma \in D$  et avec  $I_a$  ou  $I_b$  si  $f(a) \neq f(b)$  et les points  $a$  et  $b$  ne sont pas des points de discontinuité.

6. Considérons maintenant une fonction  $f \in C[a, b]$ . L'intersection du graphe d'un polynôme  $P \in \mathcal{P}_0$  avec  $\tilde{\mathcal{G}}_f$  sera un ensemble de points  $(x, y)$  avec les  $y$  égaux. Un tel  $y$  peut appartenir ou non à l'ensemble des valeurs de la fonction  $f$ . Si  $f(a) \neq f(b)$ , alors pour certains  $P \in \mathcal{P}_0$ ,  $y$  n'appartient pas à cet ensemble, si  $x = a$  (quand  $f(a) < f(b)$ ) ou bien si  $x = b$  (quand  $f(b) < f(a)$ ). Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  a des discontinuités de la première espèce, alors l'intersection du graphe d'un polynôme  $P \in \mathcal{P}_0$  avec  $\tilde{\mathcal{Q}}_f$ , a aussi les propriétés décrites plus haut, cette intersection étant un peu plus compliquée à cause de la présence des points  $(x_\gamma, y)$ , ou  $x_\gamma$  est un point de discontinuité et dans ce cas  $y \in \mathcal{J}_{x_\gamma}$ .

THÉORÈME 6.1. Si la fonction  $f \in C[a, b]$  est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors chaque extension du polynôme de Lagrange

$$(6.1) \quad L(\mathcal{P}_2; (a, y), x, x_2; f)_{\text{ext}}, \quad a < x < x_2,$$

où  $f(a) < f(b)$  et  $y \in I_a$ , satisfaisant l'égalité

$$(6.2) \quad y = f(x_2)$$

et

$$(6.3) \quad L(\mathcal{P}_2; x_1, x, (b, y); f)_{\text{ext}}, \quad x_1 < x < b,$$

où  $f(b) < f(a)$  et  $y \in I_b$ , satisfaisant l'égalité

$$(6.4) \quad y = f(x_1)$$

et chaque polynôme de Lagrange

$$(6.5) \quad L(\mathcal{P}_2; x_1, x, x_2; f), \quad x_1 < x < x_2$$

où  $f(x_1) = f(x_2)$ , appartiennent à  $\mathcal{P}_2^+$  et donc les différences divisées  $[(a, y), x, x_2; f]_{\text{ext}}$ ,  $[x_1, x, (b, y); f]_{\text{ext}}$  et  $[x_1, x, x_2; f]$  sont positives.

La démonstration du théorème 6.1 est analogue à celle que nous avons donnée pour le théorème 4.1, compte tenant du fait que le point  $x$  qui intervient en (6.1), (6.3) et (6.5) est toujours différent de  $a$  et de  $b$ . Nous n'aurons pas donc des complications à cause du fait que l'ensemble  $\tilde{\mathcal{Q}}_f$  n'est plus le graphe d'une fonction (d'une fonction univoque). Ainsi, la condition (3.6) implique l'appartenance des polynômes (6.1), (6.3) et



(6.5) à l'ensemble  $\mathcal{P}_2^+$ , ayant toujours  $f(x) < \max \{f(a), f(x_2)\}$  respectivement  $f(x) < \max \{f(x_1), f(b)\}$ , pour  $f(a) < f(b)$  respectivement  $f(b) < f(a)$ .

THÉORÈME 6.2. Si  $f \in C[a, b]$  et les extensions des polynômes de Lagrange (6.1), (6.3) respectivement les polynômes (6.5) appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{P}_2^+$ , alors la fonction  $f$  est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$ .

Pour la démonstration, on considère les cas qui suivent.

1° Dans l'intervalle  $[a, b]$  se trouvent des points  $x_1 < x_2$  pour lesquels  $f(x_1) = f(x_2)$ . Pour le sous-intervalle  $[x_1, x_2]$  on peut appliquer le raisonnement qu'on a fait dans le cas du théorème 4.2. Soit maintenant  $[a_1, b_1]$  le sous-intervalle maximal pour lequel  $f(a_1) = f(b_1)$ . L'existence d'un tel sous-intervalle est assurée par la condition imposée aux polynômes (6.5) d'appartenir à l'ensemble  $\mathcal{P}_2^+$ . Si  $a_1 = a, b_1 = b$ , alors on n'a rien à démontrer. Supposons, donc, qu'on a  $a_1 \neq a$  ou  $b_1 \neq b$ . Une autre situation n'est pas possible. Pour fixer les idées, soit  $b_1 \neq b$ . On a donc  $a_1 = a$ . Dans ce cas, la restriction  $f_1$  de la fonction  $f$  à l'intervalle  $[b_1, b]$  prend les valeurs de n'importe quel  $P \in \mathcal{P}_0$  sur au plus un point de  $[b_1, b]$ . Comme  $f_1$  est continue sur  $[b_1, b]$ , de cet comportement par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_0$  il résulte qu'elle est monotone sur  $[b_1, b]$ . La condition concernant les polynômes (6.1) d'appartenir à l'ensemble  $\mathcal{P}_2^+$  étant satisfaite,  $f_1$  est croissante sur  $[b_1, b]$ . Si  $b_1 = b$  et donc  $a_1 \neq a$ , la restriction  $f_2$  de  $f$  à l'intervalle  $[a, a_1]$  est monotone et à cause de la condition imposée aux polynômes (6.3), elle est décroissante. Dans les deux dernières situations, la strictement quasi-convexité d'ordre zéro de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[a_1, b_1]$  est assurée. Mais cette propriété est assurée aussi sur  $[a, b]$ ,  $f_1$  et  $f_2$  étant monotones.

2° Si dans l'intervalle  $[a, b]$  n'existent pas des points  $x_1 < x_2$  pour lesquels  $f(x_1) = f(x_2)$ , alors la fonction  $f$  prend les valeurs d'un polynôme quelconque  $P \in \mathcal{P}_0$  sur au plus un point de  $[a, b]$  et, donc, elle étant continue sur  $[a, b]$ , elle est monotone. Si  $f(a) < f(b)$ , les conditions imposées aux polynômes (6.1) impliquent que  $f$  soit croissante et dans le cas  $f(b) < f(a)$ , les conditions imposées aux polynômes (6.3) impliquent que  $f$  soit décroissante, sur  $[a, b]$ . Dans chacune des situations,  $f$  est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$ .

On peut énoncer aussi les analogues des théorèmes 4.3 et 4.4.

THÉORÈME 6.3. Si la fonction  $f \in C[a, b]$  est quasi-convexe d'ordre zéro sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors

$$(6.7) \quad [(a, y), x^*, x_2; f]_{\text{ext}} \geq 0, \text{ pour } a < x^* < x_2$$

où  $f(a) < f(b)$ ,  $y \in I_a$ ,  $y = f(x_2)$ ,

$$(6.8) \quad [x_1, x^*, (b, y); f]_{\text{ext}} \geq 0, \text{ pour } x_1 < x^* < b$$

où  $f(b) < f(a)$ ,  $y \in I_b$ ,  $y = f(x_1)$

et

$$(6.9) \quad [x_1, x^*, x_2; f] \geq 0.$$

quels que soient les points  $a \leq x_1 < x^* < x_2 \leq b$ , satisfaisant l'égalité  $f(x_1) = f(x_2)$ .

THÉORÈME 6.4. Si  $f \in C[a, b]$  et les conditions (6.7), (6.8), (6.9) sont satisfaites, alors la fonction  $f$  est quasi-convexe d'ordre zéro sur l'intervalle  $[a, b]$ .

7. Si la fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , n'est plus continue sur  $[a, b]$ , alors compte tenant du fait que l'hypothèse (3.4) ou (3.6) étant satisfaite, la construction de l'ensemble  $\tilde{Q}$ , ne fait pas intervenir des points  $x_1 < x_2 < x_3$  pour lesquels (3.4) ou (3.6) ne reste pas valable, en utilisant les extensions des polynômes de Lagrange et les différences divisées correspondantes on peut donner des théorèmes analogues aux théorèmes 6.1, 6.2, 6.3 et 6.4. Mais dans ce cas peuvent intervenir des extensions de polynôme de Lagrange de la forme

$$(7.1) \quad L(\mathcal{P}_2; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); f)_{\text{ext}}$$

où les  $y_i$  appartiennent ou bien à l'ensemble des valeurs de la fonction  $f$  ou bien à un intervalle de la forme  $\mathcal{I}_{x_\gamma}$ , ou  $I_a$  ou  $I_b$ . Si on fait la convention que dans le cas dans lequel  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ ,  $y_3 = f(x_3)$  le symbol (7.1) revient à  $L(\mathcal{P}_2; x_1, x_2, x_3; f)$ , alors on peut donner encore les théorèmes qui suivent, les points  $(x_i, y_i)$  appartenant maintenant à l'ensemble  $\tilde{Q}$ .

THÉORÈME 7.1. Si la fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors  $L(\mathcal{P}_2; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); f)_{\text{ext}} \in \mathcal{P}_2^+$  quels que soient les points  $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$  avec  $y_1 = y_3$ .

THÉORÈME 7.2. Si la fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  est quasi-convexe d'ordre zéro sur l'intervalle  $[a, b]$ , alors  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); f]_{\text{ext}} \geq 0$ , quels que soient les points  $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ , avec  $y_1 = y_3$ .

THÉORÈME 7.3. Si la fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  a seulement des discontinuités de la première espèce et  $L(\mathcal{P}_2; (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); f)_{\text{ext}} \in \mathcal{P}_2^+$  quels que soient les points  $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ , avec  $y_1 = y_3$ , alors la fonction  $f$  est strictement quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$ .

THÉORÈME 7.4. Si la fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  a seulement des discontinuités de la première espèce et  $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3); f]_{\text{ext}} \geq 0$  quels que soient les points  $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$  avec  $y_1 = y_3$ , alors la fonction  $f$  est quasi-convexe d'ordre zéro sur  $[a, b]$ .

Pour la démonstration des théorèmes 7.1 et 7.2 il faut remarque que  $f$  ne peut avoir que des discontinuité de la première espèce. Pour la démonstration des théorèmes 7.3 et 7.4, il faut se baser sur une importante conséquence de l'hypothèse faite: pour les points de discontinuité  $x_\gamma$  on a toujours  $x_\gamma \in [\min \{f_o(x_\gamma), f_d(x_\gamma)\}, \max \{f_o(x_\gamma), f_d(x_\gamma)\}]$ . Il faut encore remarquer que l'ensemble  $\tilde{Q}$ , peut avoir, dans tous les cas, au plus deux points d'intersection avec le graphe de n'importe quel polynôme  $P \in \mathcal{P}_0$  ou bien une réunion de deux intervalles fermés et disjoints ou une réunion d'un intervalle fermé avec un point.

8. Pour analyser le comportement des fonctions quasi-convexes d'ordre supérieur il faut se baser sur le lemme 3. Au lieu de l'ensemble  $\mathcal{P}_2$  interviendra l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+2}$  pour les fonctions quasi-convexes d'ordre  $n$  sur  $[a, b]$ . Au lieu des opérateurs  $L(\mathcal{P}_2; x_1, x_2, x_3; \cdot)$ , interviendront des opérateurs  $L(\mathcal{P}_{n+2}; x_1, x_2, \dots, x_{n+3}; \cdot)$  dont la construction se fait avec  $n + 2$  points sur lesquels  $f$  prend une même valeur. Nous présenterons ces résultats dans la deuxième partie de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Moldovan (Popoviciu), Elena, *Sur une généralisation des fonctions convexes*, *Mathematica (Cluj)*, 1(24), 49-80 (1959).
- [2] Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, 1972.
- [3] Popoviciu, Elena, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, *L'analyse Num. et la Th. de l'Approx.*, 11, 1-2, 129-137 (1982).
- [4] Popoviciu, Tiberiu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, *Bull. Soc. Sci. Acad. Roumaine*, 220, 45-49 (1938).
- [5] Popoviciu, Tiberiu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

Reçu le 17.III.1983.

Str. Dorobanților 40  
3400 Cluj-Napoca