MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
**L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 14, N° 1, 1985, pp. 33—57**

К ВОПРОСУ О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Л. Г. ЛАБСКЕР
(Москва)

1. Пусть E — вещественное банахово пространство и E^* — сопряжённое с ним пространство. Рассматривается следующая задача: при каких условиях на множества $D \subset E$ и $F \subset E^*$ всякая последовательность функционалов $f_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, с ограниченными в совокупности нормами, сходящаяся на каждом элементе $x \in D$ к числу α_x, сходится слабо к некоторому функционалу $f \in E^*$, и каким образом этот предельный функционал f выражается в зависимости от множеств D, F и чисел α_x, $x \in D$?

Совершим экскурс в историю решений этой задачи, останавливаясь, в основном, лишь на тех из них, которые содержатся в литературе в явном виде. Если числа α_x, $x \in D$, задаются как значения $\varphi(x)$, $x \in D$, функционала φ из некоторого наперёд заданного множества $\Phi \subset E^*$, то многие известные решения рассматриваемой задачи удобно формулировать единым образом в терминах множеств Коровкина для множеств F и Φ.

Множество D назовём *множеством Коровкина для множеств* F *и* Φ, короче, (F, Φ) — *множеством Коровкина*, если для любой последовательности функционалов $f_n \in F$, $n=1,2,\ldots$, с ограниченными в совокупности нормами и любого функционала $\varphi \in \Phi$ из справедливости равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varphi(x)$ для каждого элемента $x \in D$ следует его справедливость для каждого $x \in E$.

Введённые Ю. А. Шашкиным [1] конечные системы Коровкина для множества линейных положительных операторов и одноэлементного множества, состоящего из тождественного оператора, в пространстве $C(Q)$ вещественных непрерывных на метрическом компакте Q функций с чебышёвской нормой представляют собой конечные множества Коровкина для операторов.

Если D является (F, Φ) — множеством Коровкина, то совокупность множеств D, F, чисел $\alpha_x = \varphi(x)$, $x \in D$, где $\varphi \in \Phi$, и функционала $f = \varphi$ суть решение рассматриваемой задачи в пространстве E.

Хорошо известно классическое решение Банаха — Штейнхауза этой задачи ([2], теорема 2, с. 212): всякое фундаментальное множество D, т.е. такое, что замыкание $\overline{\text{lin}\ D}$ линейной оболочки lin D множества D совпадает с E, является (E^*, E^*) — множеством Коровкина. Оказывается, что для некоторых множеств $F \neq E^*$ условия на D можно значительно ослабить. Множество D в этом случае может быть даже конечным. На это впервые обратил внимание П. П. Коровкин [3] в случае сходимости линейных положительных функционалов и линейных положительных операторов к тождественному в пространстве непрерывных на отрезке функций. Для некоторых специальных последовательностей операторов аналогичные ситуации рассматривались в работах Т. Поповичу [4] и Г. Бомана [5].

Для множеств $A \subset E$ и $\Gamma \subset \mathbb{R}$ пусть $E^*(A\,;\,\Gamma)=\{f \in E^* \mid f(A) \subset \Gamma\}$. Если Γ одноэлементно: $\Gamma = \{\gamma\}$, либо $A = \{x\}$ и $\Gamma = \{\gamma\}$ одноэлементны, то вместо $E^*(A\,;\,\Gamma)$ будем писать соответственно $E^*(A\,;\,\gamma)$ либо $E^*(x\,;\,\gamma)$. Пусть $K \subset E = C(Q)$ — множество всех неотрицательных функций, а $K^* = E^*(K\,;\,[0\,;\,\infty[)$ — множество всех неотрицательных на K функционалов из $E^* = C^*(Q)$, δ_q, $q \in Q$, — дельта-функция точки q, т.е. $\delta_q(x) = x(q)$, $X \in C(Q)$, — функционал вычисления в точке q.

П. П. Коровкин ([3], теорема 1, с. 12) показал, что в пространстве $E = C(Q)$, где $Q = [a\,;\,b]$, множество $D = \{x_0, x_1\}$, состоящее из двух функций $x_0(t) = (t-q)^2$, $q \in [a\,;\,b]$ и $x_1(t) \equiv 1$, является (F, Φ) — множеством Коровкина, где $F = K^*$, а $\Phi = \{\delta_q\}$ — одноэлементное множество, состояще из функционала δ_q.

Функции $y_0, y_1, \dots, y_n \in C[a\,;\,b]$ называют ([6], с. 51) системой Чебышёва порядка n на отрезке $[a\,;\,b]$, если для любых различных точек $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n \in [a\,;\,b]$ определитель $\det(y_i(\tau_j))_{i,j=0}^n$ отличен от нуля. Пусть $\Delta = \{\delta_q \mid q \in Q\}$.

П. П. Коровкин доказал также ([3], теорема 7, с. 51), что в $C[a\,;\,b]$ система Чебышёва второго порядка на $[a\,;\,b]$ является (K^*, Δ) — множеством Коровкина. Это утверждение было обобщено Ч. А. Микчелли ([7], теорема 1), показавшим, что система Чебышёва порядка $k \in \mathbb{N}$ на $[a\,;\,b]$ является (K^*, Φ_k^+) — множеством Коровкина в $C[a\,;\,b]$, где множество $\Phi_k^+ \subset C[a\,;\,b]$ определяется следующим образом. Индексом $\varepsilon(t)$ точки $t \in [a\,;\,b]$ называется ([6], стр. 55) число, равное 1, если $t \in \{a, b\}$, и равное 2, если $t \in\,]a\,;\,b[$. Функционал $f \in \Phi_k^+$ тогда и только тогда, когда для f найдутся число $\rho \in \mathbb{N}$, различные точки $\tau_1, \dots, \tau_p \in [a\,;\,b]$, удовлетворяющие условию $\varepsilon(\tau_1) + \dots + \varepsilon(\tau_p) \leqslant k$, и положительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ такие, что $f = \lambda_1\delta_{\tau_1} + \dots + \lambda_p\delta_{\tau_p}$. Автором ([8], лемма 6) для нечётного $k \geqslant 1$ было построено конкретное (K^*, Φ_k^+) — множество Коровкина в $C[a\,;\,b]$, состоящее из $3(k+1)/2$ функций, не являющееся системой Чебышёва ([8], леммы 4,5).

В работе [9] П. П. Коровкин ввёл в рассмотрение множество $S_m \subset C^*[a\,;\,b]$, $m \geqslant 0$ — целое. Приведём соответствующее определение. Кратностью изолированного нуля t функции $y \in C[a\,;\,b]$ назовём число, равное 2, если $t \in\,]a\,;\,b[$ и при переходе через него функция y не меняет своего знака, и равное 1 во всех остальных случаях (включая и случай $t \in \{a, b\}$). Функционал $f \in C^*[a\,;\,b]$ принадлежит классу S_m тогда и только тогда, когда для f найдётся функция $y \in C[a\,;\,b]$, сумма кратностей нулей которой не превосходит m, такая, что $f(x) \geqslant 0$ для всякой функции $x \in C[a\,;\,b]$, для которой $\operatorname{sign} x(t) = \operatorname{sign} y(t)$, $t \in [a\,;\,b]$. Множество $D \subset E$ назовём [10] отличающим множества F и Φ функционалов из E^*, или короче (F, Φ) — отличающим, если для любой пары различных функционалов $f \in F$ и $\varphi \in \Phi$ найдётся элемент $y \in D$ такой, что $f(y) \neq \varphi(y)$. Эквивалентным образом, множество D является (F, Φ) — отличающим

тогда и только тогда, когда для любой пары функционалов $f \in F$ и $\varphi \in \Phi$ из равенства $f(x) = \varphi(x)$, $x \in D$, следует $f = \varphi$. Если в определении множества Φ_k^+ снять условия положительности на числа $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, то полученное множество будем обозначать через Φ_k [10]. Пусть Δ_k, $k \in \mathbb{N}$, — множество функционалов, каждый из которых представим линейной комбинацией дельта-функций не более, чем k произвольных различных точек отрезка $[a\,;\,b]$ [11].

В [10] (см. также [11]) автором приведены три критерия (S_m, Φ) — множества Коровкина в $C[a\,;\,b]$ для произвольного $\Phi \subset C^*[a\,;b]$. В частности, показано ([10], теорема 1), что (S_m, Φ) — отличающее множество в $C[a\,;\,b]$ эквивалентно (S_m, Φ) — множеству Коровкина. Доказано также ([10], теоремы 4,1), что система Чебышёва порядка не меньше $m + k$ на $[a\,;\,b]$ является (S_m, Φ_k) — множеством Коровкина. В [12] для каждой пары целых чисел $m \geqslant 0$ и $k \geqslant 1$ построено конкретное (S_m, Φ_k) — множество Коровкина ([12], лемма 1, и [11], теорема 1), состоящее из $m + 2[k/2] + 3$ функций, где $[k/2]$ — целая часть числа $k/2$, не являющееся системой Чебышёва ([12], леммы 2,3). А. М. Кудрявцева и Г. И. Кудрявцев [13] показали, что $(S_m, \{\theta\})$ — отличающее множество в $C[a\,;\,b]$ является $(S_m, \{\theta\})$ — множеством Коровкина([13], теорема 1), а $(S_{m+2k}, \{\theta\})$ — отличающее множество является (S_m, Δ_k) — множеством Коровкина ([13], теорема 2), где θ — нулевой функционал. Эти результаты представляют собой частный случай теоремы 1 из [10]. В работе [11] сформулированы два критерия конечных (S_m, Δ_k) — множеств Коровкина в $C[a\,;\,b]$, один из которых (теорема 1, лемма 2) аналогичен критериям А. Л. Гаркави [14] и Р. М. Миньковой ([15], теорема 4), а другой (теорема 1, лемма 3) — критериям Ю. А. Шашкина ([1], теорема 2) и Р. М. Миньковой и Ю. А. Шашкина [16]. Из теоремы 1 работы [11] и теоремы 1 работы [17] следует, что условие $(B_{m,k})$, рассмотренное в [17], является достаточным признаком (S_m, Δ_k) — множества Коровкина, состоящего из не менее $m + 2k + 1$ функций.

П. П. Коровкин получил решение указанной задачи и в пространстве $C(Q)$, когда метрический компакт Q — окружность, доказав ([3], теорема 2, стр. 14), что множество $D = \{x_0, x_1\}$, где $x_0(t) = \sin^2 \dfrac{t-q}{2}$, $q \in Q$, $x_1(t) \equiv 1$, является $(K^*, \{\delta_q\})$ — множеством Коровкина.

Мощность множества X будем обозначать через $|X|$. Пусть $Z(x)$ — множество всех (различных) нулей функции $x \in C(Q)$.

В случае пространства $C(Q)$, где Q — ограниченная замкнутая область в двумерном пространстве, решение обсуждаемой задачи найдено В. И. Волковым ([18], лемма 1). Он показал, что всякое множество $D \subset C(Q)$, $|D| = 4$, обладающее свойством, что для любой точки $q_0 \in Q$ существует функция $x_{q_0} \in K \cap \operatorname{lin} D$ такая, что $Z(x_{q_0}) = \{q_0\}$, является (K^*, Δ) — множеством Коровкина.

Для пространства $C(Q)$, где Q — произвольный конечномерный метрический компакт, существенные результаты, обобщающие и дополняющие приведённые результаты П. П. Коровкина и В. И. Волкова, были получены Ю. А. Шашкиным в работе [1], в которой доказаны несколько критериев (K^*, Δ)—множеств Коровкина в аналитической и геометрической формах. В частности показано ([1], лемма 1), что конечное

(K^*, Δ) — отличающее множество в $C(Q)$ является (K^*,Δ) — множеством Коровкина.

Х. Беренс и Дж. Дж. Лоренц в работе [19], в которой развивается геометрический подход Ю. А. Шашкина к этим вопросам, установили ([19], предложение 2) эквивалентность (F, Δ) — множества Коровкина и (F, Δ) — отличающего множества в $C(Q)$, когда F — одно из множеств K^*, B_1^* — единичный шар в $C^*(Q)$, $K^* \cap B_1^*$. А. С. Каваретта [29] определил пространство Коровкина порядка $n \in \mathbb{N}$, как конечномерное подпространство $B \subset C(Q)$, обладающее свойством, что для любого натурального $k \leqslant n$ и различных точек $q_1, \ldots, q_k \in Q$ существует функция $x \in K \cap B$ такая, что $Z(x) = \{q_1, \ldots, q_k\}$, и определил функцию $x_0 \in C(Q)$ квазигладкости порядка $k \in \mathbb{N}$ как функцию со свойством $\dim \operatorname{lin} (K^* \cap E^*(x_0, 0)) = k$. В этих терминах А. С. Каваретта дал ([20], теорема 1) следующее решение рассматриваемой задачи: $D = B \cup \{x_0\}$, где B — пространство Коровкина порядка n, а x_0 — функция квазигладкости порядка $k \leqslant n$, $F = K^*$, $f = \lambda_1 \delta_{\tau_1} + \ldots + \lambda_k \delta_{\tau_k}$, где $Z(x_0) = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$, а положительные коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ определённым образом выражаются через α_x, $x \in D$. Эти результаты А. С. Каваретта были стимулированы исследованиями Ю. А. Шашкина [21] по конечно-определённым операторам (см. при этом примечание в реферате [22]). Базис пространства Коровкина порядка n (в смысле А. С. Каваретта) есть понятие, обобщающее множество D в вышеупомянутом решении В. И. Волкова. Точки квазигладкости порядка k (которые хотя так и не назывались) в этом круге вопросов были использованы ранее автором [23] в более общем случае произвольных банаховых пространств. Б. О. Фергюсон и М. Д. Раск [24] рассмотрели более общее пространство $C(Q)$, где Q — компактное хаусдорфово пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности, и показали ([24], теорема 1.1), что (F, F) — отличающее множество для произвольного замкнутого в $*$ — слабой топологии множества F является (F, F) — множеством Коровкина.

Новый подход к решению рассматриваемой задачи, основанный на концепции супремальных генераторов, был предложен С. С. Кутателадзе и А. М. Рубиновым [25]. Так, С. С. Кутателадзе ([26], теорема 2) доказал, что в пространстве $C(Q)$, где Q — компактное топологическое пространство, решением данной задачи является совокупность: D — конус (выпуклый, замкнутый), супремально порождающий пространство $C(Q)$ (т.е. для любой функции $x \in C(Q)$ найдётся подмножество $X \subset D$ такое, что $x = \sup X$); $F = K^*$; $\alpha_x \geqslant \delta_q(x)$, где $q \in Q$; $f = \delta_q$. Им же [27] с этих позиций было получено аналогичное решение, в котором $F = B_1^*$ — единичный шар в $C^*(Q)$.

В. С. Климов, М. А. Красносельский и Е. А. Лифшиц [28] исследовали данную задачу в случае, когда E — произвольное вещественное банахово пространство с конусом K. Конусом K в вещественном банаховом пространстве E называется ([29], стр. 16) замкнутое множество такое, что $\lambda K + \mu K \subset K$, $\lambda, \mu \geqslant 0$, и $K \cap (-K) = \{\theta\}$, где θ — нуль пространства E. Точку $x_0 \in K$, $x_0 \neq \theta$, называют ([28], стр. 56) точкой гладкости конуса K, если существует единственный с точностью до нормы ненулевой функционал $f \in K^* \cap E^*(x_0; 0)$. Точки гладкости конуса несколько более общего вида рассматривались в [30], а их обобщения, представляющие собой точки квазигладкости порядка k, — в [23]. Пусть и в

случае произвольного конуса $K \subset E$, $K^* = E^*(K; [0; \infty[)$. В. С. Климов, М. А. Красносельский и Е. А. Лифшиц показали ([28], теорема 2), что если у конуса K существуют точки гладкости, то множество $D - \{x_0, x_1\}$, где x_0 — точка гладкости конуса K, а точка $x_1 \in E$ такова, что $\varphi(x_1) \neq 0$, где $\varphi \in K^* \cap E^* (x_0; 0)$; $F = K^*$; $\{\alpha_{x_0} = 0, \alpha_{x_1}\}$; $f = \alpha_{x_1} [\varphi(x_1)]^{-1} \varphi$, составляют решение данной задачи. Более общая ситуация, допускающая и случай конуса, не имеющего точек гладкости, рассматривалась автором [23]. Отметим, что упоминавшиеся выше результаты Ч. А. Миккелли ([7], теорема 1) и А. С. Каваретта ([20], теорема 1) следуют из ([23], теорема 3). В ([31], предложение 1) доказано, что если E — произвольное вещественное банахово пространство, множества $A \subset E$, $B \subset E$, $F \subset E^*$, $\Phi \subset E^* (A; \gamma)$ непусты и F замкнуто в $*$-слабой топологии, то для того чтобы $D = A \cup B$ было (F, Φ) -множеством Коровкина, необходимо и достаточно, чтобы B было $(F \cap E^*(A; \gamma), \Phi)$ -отличающим. Это предложение может быть ([31], предложение 2) сформулировано в другой эквивалентной форме, обобщающей приведённые выше решения Банаха — Штейнхауза ([2], стр. 212) и Б. О. Фергюсона и М. Д. Раска ([24], теорема 1.1). Аналогичные решения даны в ([31], предложения 3,4) и для сепарабельного банахова пространства E. Сформулированы также ([31], предложение 5) условия, достаточные для того, чтобы конечное множество $D = A \cup B$ было $(E^*(G; \Gamma), E^*(G; \Gamma) \cap E^* (x_0; \gamma))$ -множсетвом Коровкина, где $A = \{x_0\}$, $G \subset E$ и $\Gamma \subset \mathbb{R}$-замкнуто. Рассмотрены специальный случай ([31], предложение 6) $G = B_1$ -единичный шар в E, $\Gamma = [-r, r]$, $r > 0$, приводящий к конечным $(B_r^*, B_r^* \cap E^*(x_0; \gamma))$ -множествам Коровкина, где B_r^* — шар радиуса r в E^*, и некоторые достаточные признаки ([31], предложение 13, следствия 4, 5, 6) таких множеств в пространстве $C[a; b]$.

Отметим, что имеются решения обсуждаемой задачи и для пространств E, не являющихся необходимо вещественными банаховыми пространствами. Так, Х. Чода и М. Ечиго ([32], теорема 3) рассматривали эту задачу в коммутативной B^*-алгебре с единицей. Обобщение полученного ими результата для C^*-алгебры с единицей было дано С. Такахаси ([33], теорема 2.2). Р. Л. Джеймс [34] рассмотрел случай, когда Q — локально компактное, σ—компактное, хаусдорфово пространство, а $C(Q)$ наделено топологией равномерной сходимости на компактных множествах, и показал ([34], теорема 2.2), что каждое множество $D \subset C(Q)$ является $((K^*, \Delta(D))$-множеством Коровкина, где $\Delta(D)$ есть наибольшее по включению подмножество среди подмножеств $H \subset \Delta$, обладающих тем свойством, что D является (K^*, H)-отличающим. В этом случае $C(Q)$ локально выпукло. В общем локально выпуклом пространстве для решения этой задачи А. М. Рубинов [35] (см. также [25]) использовал введённое им понятие обобщённого супремального генератора и получил решение ([35], теорема 1), обобщающее результаты из [28] и [23], о которых говорилось выше.

Настоящая статья состоит из четырёх параграфов. В § 2 формулируется (предложение 1) решение данной задачи для произвольного вещественного банахова пространства E и произвольных множеств $D \subset E$ и $F \subset E^*$, связанных между собой определённым соотношением, при этом даётся формула выражения предельного функционала f через α_x, $x \in D$. В частности множество D может быть и конечным. В доказательстве предложения 1 используется решение рассматриваемой задачи в терминах множеств Коровкина, полученное в предложении 2. Изучаются некоторые свойства множества D (предложения 4, 5, 6). Наконец, приводится теорема существования множеств Коровкина (предложение 7). В § 3 изучаются ситуации, в которых выполняются условия предложения 1 в случае банахова пространства с конусом. § 4 посвящён рассмотрению пространства $C[a;b]$ со специальным конусом, обобщающим конус неотрицательных функций. Некоторые из результатов этого параграфа в несколько менее общем виде и без доказательств были анонсированы в [36] и [23].

2. Пусть E — вещественное банахово пространство, а E^* — сопряжённое с ним пространство. Через $\bar{F}^w$ будем обозначать замыкание множества $F \subset E^*$ в $*$-слабой топологии. Для элементов $x_1, \ldots, x_m \in E$, функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_m \in E^*$ и чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ пусть

$$\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m\\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\psi_1(x_1) & \psi_m(x_1)\\ \ldots & \ldots\\ \psi_1(x_m) \ldots & \psi_m(x_m)\end{vmatrix}$$

$$\Delta_i = \begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m\\ x_1 \ldots x_m\\ \alpha_1 \ldots \alpha_m\end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

— определитель, получающийся из определителя $\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m\\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}$ заменой его i-того столбца столбцом $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть множества $A \subset E$, $F \subset E^*$ и число γ таковы, что*

$$\dim \operatorname{lin} (\bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)) = m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

и пусть элементы множества $B = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset E$ удовлетворяют условию

$$\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m\\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix} \neq 0 \tag{2}$$

для некоторого множества функционалов $\psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subset \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$.

Если последовательность функционалов $f_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, с ограниченными в совокупности нормами обладает свойствами:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \gamma, \quad x \in A, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_j) = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

то существует функционал $f \in \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in E, \tag{5}$$

причём, если функционалы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$ линейно независимы и

$$\gamma\left[\Delta\begin{pmatrix}\varphi_1 \ldots \varphi_m\\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^m \Delta_i\begin{pmatrix}\varphi_1 \ldots \varphi_m\\ x_1 \ldots x_m\\ \alpha_1 \ldots \alpha_m\end{pmatrix}\right] = 0, \tag{6}$$

то

$$f = \left[\Delta\begin{pmatrix}\varphi_1 \ldots \varphi_m\\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}\right]^{-1} \sum_{i=1}^m \Delta_i\begin{pmatrix}\varphi_1 \ldots \varphi_m\\ x_1 \ldots x_m\\ \alpha_1 \ldots \alpha_m\end{pmatrix}\varphi_i. \tag{7}$$

Заметим, что в случае $\gamma \neq 0$ из условия (6) следует равенство

$$\left[\Delta\begin{pmatrix}\varphi_1 \ldots \varphi_m\\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}\right]^{-1} \sum_{i=1}^m \Delta_i\begin{pmatrix}\varphi_1 \ldots \varphi_m\\ x_1 \ldots x_m\\ \alpha_1 \ldots \alpha_m\end{pmatrix} = 1,$$

которое, в силу (7), означает, что предельный функционал f принадлежит аффинной оболочке aff $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ множества $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$.

В доказательстве предложения 1 будет использовано нижеследующее предложение 2, имеющее и самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если множества $A \subset E$, $F \subset E^*$ и число γ таковы, что выполняется (1), и элементы множества $B = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset E$ удовлетворяют условию (2) для некоторого множества функционалов $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subset \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$, то $A \cup B$ является $(F, \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma))$-множеством Коровкина.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним прежде, что множество $\Psi \subset E^*$ называется [31] линейно независимым на множестве $D \subset E$, если для любого натурального числа $m \leqslant |\Psi|$ и m произвольных различных функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \Psi$ из равенства $\lambda_1\psi_1(x) + \ldots + \lambda_m\psi_m(x) = 0$, $x \in D$, следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$. Нетрудно видеть, что условие (2) эквивалентно линейной независимости множества Ψ на множестве B. Но тогда очевидно функционалы $\psi_1, \ldots, \psi_m$ линейно независимы. Отсюда, из включения $\Psi \subset \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$ и условия (1) получаем: $\bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma) \subset \operatorname{lin} \Psi$. Поэтому ([31], лемма 3) множество B является $(\bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma), \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma))$-отличающим. Следовательно, ([31], предложение 1 и замечание после леммы 2) объединение $A \cup B$ является $(F, \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma))$-множеством Коровкина. ∎

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. В силу ограниченности последовательности $(\|f_n\|)_{n=1}^\infty$ и результата Л. Алаоглу ([37], или [38], стр. 459) о компактности в $*$-слабой топологии шара в E^*, существует функционал $f \in E^*$, являющийся предельной в $*$-слабой топологии точкой последовательности $(f_n)_{n=1}^\infty$. Тогда из принадлежности $f_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, следует, что $f \in \bar{F}^w$. Из (3), соответственно (4), будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \gamma, \quad x \in A, \tag{8}$$

соответственно

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_j) = f(x_j) = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{9}$$

Из (8) вытекает, что $f \in E^*(A;\gamma)$. Таким образом, последовательность функционалов $f_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, с ограниченными в совокупности нор- мами сходится к функционалу $f \in \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$ на множестве $A \cup B$. Но множество $A \cup B$, по предложению 2, является $(F, \bar{F}^\omega \cap E^*(A;\gamma))$-множеством Коровкина. А потому справедливо (5).

Так как $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, f \in \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ линейно независимы, то, в силу (1), найдутся числа $\lambda_1 \ldots, \lambda_m$ такие, что

$$f = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m. \tag{10}$$

Из (10) и (8) получаем совокупность равенств $\lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x) = \gamma$, $x \in A$, которая, в силу принадлежности $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E^*(A;\gamma)$, эквивалентна равенству $\lambda_1\gamma + \ldots + \lambda_m\gamma = \gamma$. Из (10) и (9) имеем: $\lambda_1\varphi_1(x_j) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_j) = \alpha_j$, $j = 1, \ldots, m$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \lambda_1\gamma + \ldots + \lambda_m\gamma = \gamma \\ \lambda_1\varphi_1(x_j) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_j) = \alpha_j, \ j = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{11}$$

$m + 1$ линейных уравнений с m неизвестными $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Если $\gamma = 0$, то отбросив первое уравнение системы (11), получим равносильную систему

$$\lambda_1\varphi_1(x_j) + \ldots + \lambda_m\varphi_m(x_j) = \alpha_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Пусть теперь $\gamma \neq 0$. Тогда расширенная матрица системы (11) эквивалентна матрице

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \varphi_1(x_1) & \ldots & \varphi_m(x_1) & \alpha_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_m) & \ldots & \varphi_m(x_m) & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы системы (11). Из принадлежности $\psi_1, \ldots, \psi_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$ и линейной независимости функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_m$ следует существование чисел $(\mu_{ij})_{i,j=1}^m$ таких, что $\varphi_i = \mu_{i1}\psi_1 + \ldots + \mu_{im}\psi_m$, $i = 1, \ldots, m$. Используя это, нетрудно показать, что

$$\Delta\begin{pmatrix} \varphi_1 \ldots \varphi_m \\ x_1 \ldots x_m \end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix} \psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m \end{pmatrix} \cdot \det(\mu_{ij})_{i,j=1}^m. \tag{13}$$

Так как $\det(\mu_{ij})_{i,j=1}^m$ суть определитель матрицы перехода от линейно независимой системы $\psi_1, \ldots, \psi_m$ к линейно независимой системе $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, то он отличен от нуля. Тогда из (13) и (2) получаем, что $\Delta\begin{pmatrix} \varphi_1 \ldots \varphi_m \\ x_1 \ldots x_m \end{pmatrix} \neq 0$, и, следовательно, ранг основной матрицы системы (11) равен m.

Теперь вычислим ранг расширенной матрицы системы (11). Разложив $\det M$ по элементам первой строки и в каждом i-том $(i = 1, \ldots, m)$ слагаемом определителе переставив столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ последовательно $m - i$

раз с соседним слева столбцом, получим

$$\det M = (-1)^{m+1}\sum_{i=1}^m \Delta_i\begin{pmatrix} \varphi_1 \ldots \varphi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \alpha_1 \ldots \alpha_m \end{pmatrix} + (-1)^m\Delta_i\begin{pmatrix} \varphi_1 \ldots \varphi_m \\ x_1 \ldots x_m \end{pmatrix}.$$

Но тогда из (6) с учётом того, что $\gamma \neq 0$, получаем: $\det M = 0$. Следовательно, ранг расширенной матрицы системы (11) также равен m.

Таким образом, по критерию Кронекера — Капелли, система (11) при $\gamma \neq 0$ также является определённой. При этом она равносильна системе (12).

Решение системы (12) можно выразить по формулам Крамера

$$\lambda_i = \left[\Delta\begin{pmatrix} \varphi_1 \ldots \varphi_m \\ x_1 \ldots x_m \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \Delta_i\begin{pmatrix} \varphi_1 \ldots \varphi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \alpha_1 \ldots \alpha_m \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, m.$$

Подставив эти значения λ_i, $i = 1, \ldots, m$ в (10), получим равенство (7) ∎

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть множества $A \subset E$, $F \subset E^*$ и число γ удовлетворяют условию* (1). *Пусть $B = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset E$ и $\Psi = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subset \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$ -биортогональные системы. Если последовательность функционалов $f_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, с ограниченными в совокупности нормами удовлетворяет условиям* (3) *и* (4), *где $\gamma\left(1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i\right) = 0$, то*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i\,\psi_i(x), \ x \in E.$$

Доказательство. Так как

$$\Delta\begin{pmatrix} \psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m \end{pmatrix} = 1, \quad \Delta_i\begin{pmatrix} \psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \alpha_1 \ldots \alpha_m \end{pmatrix} = \alpha_i, \ i = 1, \ldots, m,$$

то требуемое следует из предложения 1 при $\varphi_i = \psi_i$, $i = 1, \ldots, m$ ∎

Аналог предложения 1, допускающий случай бесконечномерной линейной оболочки $\mathrm{lin}\,(\bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma))$ и бесконечных множеств Ψ и B можно сформулировать следующим образом:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть множества $A, B \subset E$, F, $\Phi \subset E^*$ и число γ таковы, что $\bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma) \subset \mathrm{lin}\,\Psi$ и Ψ линейно независимо на B. Если последовательность функционалов $f_n \in F$, $n = 1, 2, \ldots$, с ограниченными в совокупности нормами обладает свойством* (3) *и* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \alpha_x$, $x \in B$, *то существует функционал $f \in \bar{F}^w \cap E^*(A;\gamma)$, для которого выполняется* (5).

Доказательство аналогично доказательству соответствующей части предложения 1 ∎

В следующих трёх простых предложениях содержится полезная информация о свойствах множеств A и B, фигурирующих в формулировках предложений 1 и 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть E — линейное пространство, $A \subset E$, $\gamma \neq 0$ и $E^*(A\,;\gamma) \neq \varnothing$. Тогда $\theta \notin A$, любые два элемента из A линейно независимы и A либо линейно независимо, либо аффинно зависимо.*

Доказательство. Пусть $f \in E^*(A\,;\gamma)$. Если бы $\theta \in A$, то $0 = f(\theta) = \gamma \neq 0$ противоречие! Если бы нашлись линейно зависимые элементы $y_0, y_1 \in A$ $(y_0 \neq y_1)$, то $y_0 = \lambda y_1$, откуда $f(y_0) = \lambda f(y_1)$ или $\gamma = \lambda\gamma$. Отсюда, в силу $\gamma \neq 0$, получили бы $\lambda = 1$, что означало бы $y_0 = y_1$ — противоречие! Если A линейно зависимо, то найдутся $k \in \mathbb{N}$, элементы $y_0, y_1, \ldots, y_k \in A$ и числа $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ такие, что $y_0 = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k$. Тогда $f(y_0) = \lambda_1 f(y_1) + \ldots + \lambda_k f(y_k)$ или $\gamma = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)\gamma$, откуда $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$. Значит, y_0 есть аффинная комбинация элементов $y_1, \ldots, y_k$, и, следовательно, A аффинно зависимо ∎

Отметим, что для конечномерного пространства E последнее утверждение предложения 4 представляет интерес лишь когда $|A| \leqslant 1 + \dim E$, ибо в противном случае множество A всегда аффинно зависимо.

Условие $E^*(A\,;\gamma) \neq \varnothing$ $(\gamma \neq 0)$ в предложении 4 выполняется при выполнении условия (1) $(\gamma \neq 0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть E — линейное пространство. Если $x_1, \ldots, x_m \in E$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m \in E^*$ удовлетворяют условию (2), то $x_1, \ldots x_m$ линейно независимы.*

Доказательство. В допущении противного найдутся $j \in \{1, \ldots, m\}$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_m$ такие, что $x_j = \sum\limits_{i=1}^{m}{}' \lambda_i x_i$, где штрих у знака суммы обозначает отсутствие в ней слагаемого, соответствующего номеру $i = j$. Тогда

$$\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ \psi_1 \ldots \psi_m\end{pmatrix} = \Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_{j-1} & \psi_j & \psi_{j+1} \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_{j-1} & \sum\limits_{i=1}^{m}{}' \lambda_i x_i & x_{j+1} \ldots x_m\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m}{}' \lambda_i \Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_{j-1} & \psi_j & \psi_{j+1} \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_{j-1} & x_i & x_{j+1} \ldots x_m\end{pmatrix}.$$

Поскольку $i \neq j$, то в каждом i-том слагаемом суммы в правой части последнего равенства определитель содержит равные i-тую и j-тую строки, и, следовательно, равен нулю. Стало быть, $\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \cdots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix} = 0$, что противоречит (2) ∎

Пусть $P_\gamma A = \lim A$, если $\gamma = 0$, и $P_\gamma A = \operatorname{aff} A$, если $\gamma \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть E-линейное пространство, $A \subset E$ непусто и $\gamma \in \mathbb{R}$. Пусть элементы множества $B = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset E$ и функционалы $\psi_1, \ldots, \psi_m \in E^*(A\,;\gamma)$ удовлетворяют условию (2). Тогда пересечение $(P_\gamma A) \cap \lim B)$ либо пусто, либо состоит из единственного элемента*

$$\tilde{x} = \left[\Delta^T\begin{pmatrix}\psi_1 \cdots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{m} \Delta_i^T\begin{pmatrix}\psi_1 \cdots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \gamma \ldots \gamma\end{pmatrix} x_i,$$

где $\Delta^T\begin{pmatrix}\psi_1 \cdots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}$ - транспонированный определитель $\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \cdots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}$, а $\Delta_i^T\begin{pmatrix}\Psi_1 \ldots \Psi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \gamma \ldots \gamma\end{pmatrix}$-определитель, получающийся из определителя $\Delta^T\begin{pmatrix}\psi_1 \cdots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}$ заменой его i-того столбца столбцом $\begin{pmatrix}\gamma \\ \vdots \\ \gamma\end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть $x \in (P_\gamma A) \cap \lim B)$. Тогда $x \in \lim B$. Следовательно, найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться в том, что $E^*(A\,;\gamma) = E^*(P_\gamma A\,;\gamma)$. Отсюда, из принадлежностей $\psi_1, \ldots, \psi_m \in E^*\ (A\,;\ \gamma)$ $x \in P_\gamma A$, и из (14) получаем систему

$$\lambda_1 \psi_j(x_1) + \ldots + \lambda_m \psi_j(x_m) = \gamma, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{15}$$

m уравнений с m неизвестными $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Определитель этой системы $\Delta^T\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}$ в силу (2), отличен от нуля. А потому система (15) имеет единственное решение, выражающееся по формулам Крамера:

$$\lambda_i = \left[\Delta^T\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}\right]^{-1} \Delta_i^T\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \gamma \ldots \gamma\end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Подставив (16) в (14), получим, что $x = \tilde{x}$ ∎

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть выполнены условия предложения 6. Тогда*
1) если $\gamma = 0$ и A линейно независимо, то $A \cup B$ линейно независимо,
2) если $A = \{x_0\}$, где $x_0 \neq \tilde{x}$, то $A \cup B$ линейно независимо,
3) если A аффинно независимо, $|A| \geqslant 2$ и $\tilde{x} \notin \operatorname{aff} B$, то $A \cup B$ аффинно независимо.

Доказательство. 1) Допустим противное: $A \cup B$ линейно зависимо. Тогда найдутся $k \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_k \in A \cup B$ и числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \theta$. Пусть для определённости $u_1 \ldots, u_p \in A$, $u_{p+1}, \ldots, u_k \in B$. В таком случае $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = -\lambda_{p+1} u_{p+1} - \ldots - \lambda_k u_k$, где $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \in \lim A$, $-\lambda_{p+1} u_{p+1} - \ldots - \lambda_k u_k \in \lim B$. Так как $\gamma = 0$, то $\tilde{x} = \theta$, и, по предложению 6, $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p = \theta$ и $-\lambda_{p+1} u_{p+1} - \ldots - \lambda_k u_k = \theta$. Тогда, в силу линейной независимости множеств A и B, получим $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$ — противоречие!

2) Из условия $x_0 \neq \tilde{x}$, по предложению 6, следует, что $x_0 \notin \lim B$.

3) Пусть $y \in A$ и $A' = (A - y) \diagdown \{\theta\}$, $B' = B - y$. Очевидно $\psi_1, \ldots, \psi_m \in E^*(A'\,;0)$. Если бы $\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 & \ldots \psi_m \\ x_1 - y \ldots & x_m - y\end{pmatrix} = 0$, то, поскольку можно показать, что

$$\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 & \ldots & \psi_m \\ x_1 - y & \ldots & x_m - y\end{pmatrix} = \Delta^T\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{m} \Delta_i^T\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \gamma \ldots \gamma\end{pmatrix},$$

имели бы

$$\left[\Delta^T\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{m} \Delta_i^T\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m \\ \gamma \ldots \gamma\end{pmatrix} = 1,$$

откуда $\tilde{x} \in \operatorname{aff} B$ — противоречие! Значит, $\Delta\begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \\ x_1 - y & \dots & x_m - y \end{pmatrix} \neq 0$. Итак, для множеств A', B' и числа $\gamma = 0$ выполнены условия предложения 6. К тому же A' линейно независимо, ибо A аффинно независимо. Тогда, по доказанному утверждению 1 настоящего следствия, множество $A' \cup B'$ линейно независимо. Стало быть, $A \cup B$ аффинно независимо $\blacksquare$

Утверждение 2) следствия 2 при $\gamma = 0$ было отмечено в [23].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть* $A \subset E$, $F \subset E^*$, γ *удовлетворяют условию* (1) и $\dim \operatorname{lin} A = l$, $l \in \mathbb{N}$. *Тогда существует* $(F, \bar{F}^w \cap E^*(A\,;\gamma))$*-множество Коровкина, состоящее либо из* $l + m - 1$, *либо из* $l + m$ *элементов.*

Доказательство. Из (1) следует существование m линейно независимых функционалов $\psi_1, \dots, \psi_m \in \bar{F}^w \subset E^*(A\,;\gamma)$. Для этих функционалов найдётся система $B = \{x_1, \dots, x_m\} \subset E$, например, биортогональная ([2], стр. 210), удовлетворяющая условию (2). Тогда, по предложению 2, $A \cup B$ будет $(F, \bar{F}^w \cap E^*(A\,;\gamma))$-множеством Коровкина. Из условия $\dim \operatorname{lin} A = l$ вытекает существование линейно независимого множества $Y = \{y_1, \dots, y_l\} \subset A$. Очевидно $Y \cup B$ является $(F, \bar{F}^w \cap E^*(A\,;\gamma))$-множеством Коровкина. В случае $Y \cap \operatorname{lin} B = \emptyset$, множество $Y \cup B$ состоит из $l + m$ элементов. В случае $Y \cap \operatorname{lin} B \neq \emptyset$, из предложения 6 получаем, что $Y \cap \operatorname{lin} B = \{\tilde{x}\}$. Следовательно, если $\tilde{x} \in B$, то $|Y \cup B| = l + m - 1$; если же $\tilde{x} \notin B$, то $(Y \setminus \{\tilde{x}\}) \cup B$ является $(F, \bar{F}^w \cap E^*(A\,;\gamma))$-множеством Коровкина и $|(Y \setminus \{\tilde{x}\}) \cup B| = l + m - 1$ $\blacksquare$

Предложения 2 и 7 в случае, когда A одноэлементно, а $F = E^*(G\,;\Gamma)$, где $G \subset E$ и $\Gamma \subset \mathbb{R}$ замкнуто, были сформулированы в ([31], предложение 5 и следствие 3).

Заметим, что если E — сепарабельное пространство, то в формулировках предложений 1,2,3,7 и следствия 1 можно заменить $\bar{F}^w$ на секвенциальное замыкание множества E в $*$-слабой топологии. При этом в доказательстве предложения 2 вместо предложения 1 и замечания после леммы 2 из [31] используется достаточная часть предложения 3 из [31], а в доказательстве предложения 1 вместо теоремы Алаоглу используется секвенциальная компактность в $*$-слабой топологии шара в E^*, имеющая место при условии сепарабельности E ([39], стр. 50).

3. В этом параграфе мы рассмотрим вещественное банахово пространство E с конусом K. Легко видеть, что $K^* = E^*(K\,;[0\,;\infty[)$ замкнуто в $*$-слабой топологии. Поэтому, если $F = K^*$, то и $\bar{F}^w = K^*$.

Положив в предложениях 1,2,3,7 и следствии 1 $F = K^*$ и заменив $\bar{F}^w$ на K^*, мы получим соответствующие предложения для функционалов из K^*. Приведём, например, получающееся из предложения 1

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть конус* $K \subset E$, *множество* $A \subset E$ *и число* γ *таковы, что* $\dim \operatorname{lin} (K^* \cap E^*(A\,;\gamma)) = m$, $m \in \mathbb{N}$. *Пусть* $x_1, \dots, x_m \in E$ *и* $\psi_1, \dots, \psi_m \in K^* \cap E^*(A\,;\gamma)$ *удовлетворяют условию* (2). *Если функционалы* $f_n \in K^*$, $n = 1, 2, \dots$, *с ограниченными в совокупности нормами удовлетворяют условиям* (3) *и* (4), *то существует функционал* $f \in K^* \cap E^*(A\,;\gamma)$ *такой что имеет место* (5), *причём, если* $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in K^* \cap E^*(A\,;\gamma)$ *линейно независимы и справедливо* (6), *то справедливо и* (7).

Предложение 8 в случае, когда множество A состоит из единственного элемента $x_0 \in K$, $x_0 \neq \theta$, $\gamma = 0$, $\varphi_i = \psi_i$, $i = 1, 2, \dots$, превращается в теорему 3 из [23]. Если к тому же ограниченность последовательности норм $\|f_n\|$, $n = 1, 2, \dots$, заменить более сильным (при условии (4)) требованием: $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathring{K} \neq \emptyset$, где $\mathring{K}$ — внутренность конуса K, то предложение 8 превращается в теорему 1 из [23].

В связи с предложением 8 представляет интерес выяснение условий, при которых $1 \leqslant \dim \operatorname{lin} (K^* \cap E^*(A\,;\gamma))$. Мы здесь проанализируем случай одноэлементного множества $A = \{x_0\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть* $\gamma \neq 0$. *Для того чтобы*

$$1 \leqslant \dim \operatorname{lin} (K^* \cap E^*(x_0\,;\gamma)), \tag{17}$$

необходимо и достаточно, чтобы $-\gamma x_0 \notin K$.

Доказательство. Необходимость. Допустим противное: $-\gamma x_0 \in K$. Из условия (17) следует существование функционала $f \in K^* \cap E^*(x_0\,;\gamma)$, для которого $0 \leqslant f(-\gamma x_0) = -\gamma f(x_0) = -\gamma^2$. Отсюда $\gamma^2 \leqslant 0$, и, следовательно, $\gamma = 0$. Но это противоречит условию.

Достаточность. Пусть $-\gamma x_0 \notin K$. Тогда, в силу замкнутости K, расстояние элемента $-\gamma x_0$ до K положительно. Следовательно, ([29], теорема 1.3), найдётся функционал $\varphi \in K^*$ такой, что $-\gamma\varphi(x_0) = \varphi(-\gamma x_0) < 0$. Отсюда заключаем, что $\varphi(x_0) \neq 0$ и γ одного знака. Стало быть, функционал $f = \gamma[\varphi(x_0)]^{-1}\varphi \in K^* \cap E^*(x_0\,;\gamma)$ $\blacksquare$

Отметим, что в условиях предложения 9 $x_0 \neq \theta$, ибо в противном случае $E^*(x_0\,;\gamma) = \emptyset$, что противоречит (17) и условию $-\gamma x_0 \notin K$.

В предложении 9 условия выполнения неравенства (17) сформулированы в терминах конуса $K \subset E$, элемента $x_0 \in E$ и числа γ. В следующем очевидном предложении соответствующие условия выражаются в терминах, относящихся к сопряжённому пространству E^*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Пусть* $\gamma \neq 0$. *Для того чтобы имело место* (17), *необходимо и достаточно, чтобы множество* K^* *было расположено по обе стороны от гиперплоскости* $E^*(x_0\,;\gamma)$, $x_0 \neq \theta$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $\gamma > 0$, ибо в противном случае мы задали бы гиперплоскость $E^*(x_0;\gamma)$ элементом $-x_0$ и числом $-\gamma$, которое было бы уже положительным.

Необходимость. Пусть $f \in K^* \cap E^*(x_0\,;\gamma)$. Пусть $0 < \lambda < 1$ и $\mu > 1$. Так как $f \in K^*$, то $\varphi = \lambda f \in K^*$ и $\psi = \mu f \in K^*$. Так как $f \in E^*(x_0\,;\gamma)$, то $\varphi(x_0) = \lambda f(x_0) = \lambda\gamma < \gamma < \mu\gamma = \mu f(x_0) = \psi(x_0)$.

Достаточность. Найдутся функционалы φ, $\psi \in K^*$ такие, что $\varphi(x_0) < \gamma < \psi(x_0)$. Отсюда $[\gamma - \varphi(x_0)][\psi(x_0)]^{-1} > 0$. А потому $f = [\gamma - \varphi(x_0)][\psi(x_0)]^{-1}\psi + \varphi \in K^* \cap E^*(x_0\,;\gamma)$, откуда следует (17). $\blacksquare$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Пусть* $\gamma \neq 0$. *Для того чтобы множество* K^* *располагалось по одну сторону от гиперплоскости* $E^*(x_0\,;\gamma)$, $x_0 \neq \theta$, *необходимо и достаточно, чтобы* $-\gamma x_0 \in K$.

Доказательство необходимости соответственно достаточности представляет собой последовательное применение предложений 10 и 9 соответственно предложений 9 и 10 $\blacksquare$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для того чтобы гиперплоскость* $E^*(x_0\,;\gamma)$, $x_0 \neq \theta$, *была опорной к множеству* K^* *необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma = 0$ *и* $x_0 \in K \cup (-K)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть гиперплоскость $E(x_0\,;\gamma)$ опорна к K^*. Тогда $K^* \cap E^*(x_0\,;\gamma) \neq \varnothing$ и K^* лежит по одну сторону от $E^*(x_0\,;\gamma)$. Если бы $\gamma \neq 0$, то, по предложению 9, $-\gamma x_0 \notin K$, а, по следствию 3, $-\gamma x_0 \in K$. Полученное противоречие доказывает, что $\gamma = 0$.

Если $f(x_0) \geqslant 0$ соответственно $f(x_0) \leqslant 0$ для каждого $f \in K^*$, то ([29], следствие 1.3) $x_0 \in K$ соответственно $x_0 \in (-K)$.

Достаточность. Если $x_0 \in K$ соответственно $x_0 \in (-K)$, то для каждого $f \in K^*$ имеем: $f(x_0) \geqslant 0$ соответственно $f(x_0) \leqslant 0$. Это означает, что K^* лежит по одну сторону от гиперплоскости $E^*(x_0\,;0)$. А так как к тому же $K^* \cap E^*(x_0\,;0) \neq \varnothing$, ибо нулевой функционал $\theta \in K^* \cap E^*(x_0\,;0)$, то гиперплоскость $E^*(x_0\,;0)$ опорна к K^*. ▮

Предложения 9 и 10 относятся к случаю $\gamma \neq 0$. Рассмотрим случай $\gamma = 0$.

Элемент $x \in K$ называется [28] квазивнутренним элементом конуса K, если $f(x) > 0$ для любого ненулевого функционала $f \in K^*$. Множество всех квазивнутренних элементов конуса K назовём [30] его квазивнутренностью и обозначим через $\overset{[0]}{K}$. Конус K называется квазителесным, если $\overset{[0]}{K} \neq \varnothing$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Пусть конус K квазителесен. Для справедливости* (17) *при $\gamma = 0$ необходимо, а если выполняется условие*

(1°) *Существует зависящая от K и x_0 постоянная $\delta > 0$, обладающая тем свойством, что для любых $u \in K$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ найдётся элемент $x \in K$ такой, что $u - x \in \operatorname{lin}\{x_0\}$ и $\|u + \lambda x_0\| \geqslant \delta \max\{\|x\|, \|u + \lambda x_0 - x\|\}$, то и достаточно, чтобы $x_0 \notin \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть выполняется (17) при $\gamma = 0$. Тогда существует функционал $f \in K^* \cap E^*(x_0\,;0)$, $f \neq \theta$. Если бы $x_0 \in \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})$, то либо $x_0 \in \overset{[0]}{K}$, либо $-x_0 \in \overset{[0]}{K}$. Отсюда, в силу того, что $f \in K^*$ и $f \neq \theta$, получили бы: либо $f(x_0) > 0$, либо $f(x_0) < 0$. А это противоречило бы принадлежности $f \in E^*(x_0\,;0)$.

Достаточность. Покажем, что

$$\overset{[0]}{K} \cap \operatorname{lin}\{x_0\} = \varnothing. \tag{18}$$

Допустим противное, т.е. допустим существование элемента $x_1 \in \overset{[0]}{K} \cap \operatorname{lin}\{x_0\}$. Так как $x_1 \in \operatorname{lin}\{x_0\}$, то найдётся число η такое, что $x_1 = \eta x_0$. Поскольку $x_1 \in \overset{[0]}{K}$, то $x_1 \neq \theta$, а потому $\eta \neq 0$, и, следовательно, $x_0 = \eta^{-1}x_1$. Из принадлежности $x_1 \in \overset{[0]}{K}$ следует также, что $x_1 \in K$, и, стало быть, $x_0 \in K$, если $\eta > 0$, и $-x_0 \in K$, если $\eta < 0$. Более того, если $\eta > 0$ соответственно $\eta < 0$, то для любого функционала $f \in K^*$, $f \neq \theta$, будем иметь: $f(x_0) = \eta^{-1}f(x_1) > 0$ соответственно $f(-x_0) = -\eta^{-1}f(x_1) > 0$. Следовательно, $x_0 \in \overset{[0]}{K}$ соответственно $-x_0 \in \overset{[0]}{K}$, т.е. $x_0 \in \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})$. Полученное противоречие доказывает (18).

Пусть $z \in K + \operatorname{lin}\{x_0\}$. Тогда $z = u + \lambda x_0$, где $u \in K$, $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу условия (1°), найдётся элемент $x \in K$ такой, что $u - x = \mu x_0$. Следовательно, $z = x + y$, где $y = (\lambda + \mu)x_0$, причём, $\|x\|, \|y\| \leqslant \delta^{-1}\|z\|$. Отсюда, из (18) и квазителесности конуса K следует ([40], теорема 2.2)

существование функционала $f \in K^* \cap E^*(x_0\,;0)$, $f \neq \theta$. А это эквивалентно (17) при $\gamma = 0$. ▮

Пару (X, Y) множеств $X, Y \subset E$ назовём *нормальной*, если существует (зависящая от них) постоянная $\delta > 0$ такая, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ справедливо неравенство $\|x + y\| \geqslant \delta \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Пары (X, Y) и (Y, X) одновременно нормальны или нет. Множество $X \subset E$ назовём нормальным если пара (X, X) нормальна. Это определение нормального множества в случае, когда $X = K$ — конус, совпадает с определением нормального конуса ([29], стр. 18).

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если конус K-квазителесный, пара $(K, \operatorname{lin}\{x_0\})$ нормальна и $x_0 \notin \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})$, то справедливо неравенство* (17) *при $\gamma = 0$.*

Доказательство. Нормальность пары $(K, \operatorname{lin}\{x_0\})$ влечёт выполнимость условия (1°) при $x = u$. А потому требуемое следует из достаточной части предложения 11 ▮

Конус K называется телесным, если его внутренность $\overset{0}{K} \neq \varnothing$.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Пусть конус K телесный. Для справедливости неравенства* (17) *при $\gamma = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \notin \overset{0}{K} \cup (-\overset{0}{K})$.*

Доказательство. Необходимость следует из необходимости предложения 11, ибо квазивнутренность телесного конуса совпадает с его внутренностью ([29], следствие 1.4).

Достаточность. Равенство (18) в случае телесного конуса превращается в равенство $\overset{0}{K} \cap \operatorname{lin}\{x_0\} = \varnothing$. Тогда ([29], следствие 1.2) существует функционал $f \in K^* \cap E^*(x_0\,;0)$, $f \neq \theta$. ▮

Необходимая часть предложения 10 при $\gamma = 0$, как нетрудно видеть, не имеет места. Достаточная же часть предложения 10 при $\gamma = 0$ справедлива в предположении, что K^* — конус в E^*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Пусть K^*-конус в E^*, расположенный по обе стороны от гиперплоскости $E^*(x_0\,;0)$, $x_0 \neq \theta$. Тогда справедливо неравенство* (17) *при $\gamma = 0$.*

Доказательство. Повторив дословно доказательство достаточности предложения 10 при $\gamma = 0$, мы построим функционал $f = -\varphi(x_0)[\psi(x_0)]^{-1}\psi + \varphi \in K^* \cap E^*(x_0\,;0)$, где $\varphi, \psi \in K^*$ и $\varphi(x_0) < 0 < \psi(x_0)$. Остаётся показать, что $f \neq \theta$. Допустив противное, получим: $-\varphi = -\varphi(x_0)[\psi(x_0)]^{-1}\psi \in K^*$. Отсюда, так как $\varphi \in K^*$, будем иметь: $\varphi = \theta$. Следовательно, $\varphi(x_0) = 0$, что противоречит неравенству $\varphi(x_0) < 0$ ▮

Отметим, что множество K^* является конусом, например, если конус K квазителесен. Некоторые другие условия, достаточные для того, чтобы множество K^* было конусом, отмечены в ([41], стр. 37).

В следующем предложении сформулированы условия (при некоторых предположениях относительно K^*), необходимые для справедливости равенства

$$\dim \operatorname{lin}(K^* \cap E^*(x_0\,;\gamma)) = m,\ m \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

где K — конус в E.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *Пусть K — конус в E и выполняется* (19). *Если* $\dim \operatorname{lin} K^* > m$, *то* $\gamma = 0$ *и* $x_0 \notin \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})\{\theta\}$. *Если* $\dim \operatorname{lin} K^* > m+1$, *то* $\gamma = 0$, *и* $x_0 \in [K \cup (-K)] \setminus [\overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K}) \cup \{\theta\}]$.

Доказательство. Пусть $\dim \operatorname{lin} K^* > m$. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — линейно независимые функционалы, принадлежащие $K^* \cap E^*(x_0; \gamma)$, существование которых обеспечено условием (19). В силу неравенства $\dim \operatorname{lin} K^* > m$ найдётся функционал $f \in K^*$ такой, что $f_1, \ldots, f_m, f$ линейно независимы. Допустим, что $\gamma \neq 0$. Положим $f_{m+1} = f + f_1$, если $f(x_0) = 0$; $f_{m+1} = \gamma[f(x_0)]^{-1}f$, если $\gamma f(x_0) > 0$; $f_{m+1} = -\gamma[f(x_0)]^{-1}f + 2f_1$, если $\gamma f(x_0) < 0$. Нетрудно видеть, что $f_{m+1} \in K^* \cap E^*(x_0; \gamma)$ и $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}$ линейно независимы. А это противоречит (19). Таким образом, доказано, что $\gamma = 0$.

Если конус K не является квазителесным, т.е. если $\overset{[0]}{K} = \varnothing$, то непринадлежность $x_0 \notin \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})$ тривиальна. Если K — квазительсный конус, то, поскольку из (19) вытекает (17) при $\gamma = 0$, указанная непринадлежность справедлива в силу предложения 11.

Если бы $x_0 = \theta$, то $E^*(x_0; \gamma) = E^*(\theta; 0) = E^*$ и $\dim \operatorname{lin} (K^* \cap E^*(x_0; \gamma)) = \dim \operatorname{lin} K^* > m$, что противоречило бы равенству (19). Итак, $x_0 \neq \theta$.

Пусть теперь $\dim \operatorname{lin} K^* > m+1$. Тогда, по уже доказанному, $\gamma = 0$, $x_0 \notin \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})$ и $x_0 \neq \theta$. В силу последнего, $E^*(x_0; 0)$ — гиперподпространство. Покажем, что K^* расположено по одну сторону от $E^*(x_0; 0)$. Допустим противное. Из (19) следует существование линейно независимых функционалов $f_1, \ldots, f_m \in K^* \cap E^*(x_0; 0)$. Так как $\dim \operatorname{lin} K^* > m+1$, то найдутся функционалы f, $\varphi \in K^*$ такие, что $f_1, \ldots, f_m, f, \varphi$ линейно независимы. Возможен один из следующих трёх случаев: 1) $f(x_0)\,\varphi(x_0) = 0$, 2) $f(x_0)\,\varphi(x_0) < 0$, 3) $f(x_0)\,\varphi(x_0) > 0$.

В случае 1) $f(x_0) = 0$ или $\varphi(x_0) = 0$. Пусть для определённости $f(x_0) = 0$. Тогда $f \in K^* \cap E^*(x_0; 0)$ и функционалы $f_1, \ldots, f_m, f$ линейно независимы, что противоречит (19).

В случае 2) $-\varphi(x_0)\,[f(x_0) - \varphi(x_0)]^{-1} > 0$ и $f(x_0)[f(x_0) - \varphi(x_0)]^{-1} > 0$. Тогда $f_{m+1} = [f(x_0) - \varphi(x_0)]^{-1}[f(x_0)\varphi - \varphi(x_0)f] \in K^* \cap E^*(x_0; 0)$ и $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}$ линейно независимы, что опять же противоречит (19).

Наконец, рассмотрим случай 3). Числа (fx_0) и $\varphi(x_0)$ одного знака. Положим для определённости, что $f(x_0) > 0$ и $\varphi(x_0) > 0$. В силу допущения о расположенности K^* по обе стороны от $E^*(x_0; 0)$, найдётся функционал $\psi \in K^*$ такой, что $\psi(x_0) < 0$. Покажем, что

$$\psi \notin \operatorname{lin} \{f_1, \ldots, f_m, f\} \cap \operatorname{lin} \{f_1, \ldots, f_m, \varphi\}. \tag{20}$$

Пусть это не так. Тогда $\psi = \mu_1 f_1 + \ldots + \mu_m f_m + \mu_{m+1} f = \eta_1 f_1 + \ldots + \eta_m f_m + \eta_{m+1}\varphi$. Отсюда

$$(\mu_1 - \eta_1)f_1 + \ldots + (\mu_m - \eta_m)f_m + \mu_{m+1}f - \eta_{m+1}\varphi = \theta. \tag{21}$$

Имеем: $\psi(x_0) = \mu_1 f_1(x_0) + \ldots + \mu_m f_m(x_0) + \mu_{m+1} f(x_0) = \mu_{m+1} f(x_0)$, откуда $\mu_{m+1} \neq 0$, ибо $\psi(x_0) \neq 0$. Тогда из (21) получаем противоречивое заключение о линейной зависимости функционалов $f_1, \ldots, f_m, f, \varphi$. Таким образом, (20) доказано.

Из (20) следует, что ψ не принадлежит по меньшей мере одному из подпространств $\operatorname{lin} \{f_1, \ldots, f_m, f\}$ или $\operatorname{lin} \{f_1, \ldots, f_m, \varphi\}$. Пусть для определённости $\psi \notin \operatorname{lin} \{f_1, \ldots, f_m, f\}$. Тогда $f_1, \ldots, f_m, f, \psi$ линейно независимы. Так как $f(x_0)\,\psi(x_0) < 0$, то так же как и в случае 2) показывается, что $f_{m+1} = [f(x_0) - \psi(x_0)]^{-1}[f(x_0)\psi - \psi(x_0) f] \in K^* \cap E^*(x_0; 0)$ и $f_1, \ldots, f_m, f_{m+1}$ линейно независимы, что снова противоречит (19).

Итак, мы доказали, что K^* расположено по одну сторону от гиперподпространства $E^*(x_0; 0)$. А так как $K^* \cap E^*(x_0; 0) \neq \varnothing$, то гиперподпространство $E^*(x_0; 0)$ опорно к K^*. Тогда, по следствию 4, $x_0 \in K \cup (-K)$ ∎

Заметим, что в предложении 13 условие $\dim \operatorname{lin} K^* > m+1$ существенно для принадлежности $x_0 \in K \cup (-K)$. В самом деле, например, если $E = \mathbb{R}^2$, $K = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1 = 0,\ \xi_2 \geqslant 0\}$, $x_0 = (1, 0)$ и $\gamma = 0$, $K^* = \{(\xi_1^*, \xi_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_2^* \geqslant 0\}$, $E^*(x_0; 0) = \{(\xi_1^*, \xi_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1^* = 0\}$, $K^* \cap E^*(x_0; 0) = \{(\xi_1^*, \xi_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1^* = 0,\ \xi_2^* \geqslant 0\}$, $\operatorname{lin} (K^* \cap E^*(x_0; 0)) = \{(\xi_1^*, \xi_2^*) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_1^* = 0\}$, и, значит, $\dim \operatorname{lin} (K^* \cap E^*(x_0; 0)) = m = 1$. Таким образом, условие $\dim \operatorname{lin} K^* > m+1$ не выполняется, ибо $\operatorname{lin} K^* = \mathbb{R}^2$ и $\dim \operatorname{lin} K^* = 2 = m+1$. При этом, $x_0 \notin K \cup (-K)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Пусть E — конечномерное пространство, K — конус в E и выполняется* (19). *Если* $\dim E > m$, *то* $\gamma = 0$ *и* $x_0 \notin \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K}) \cup \{\theta\}$. *Если* $\dim E > m+1$, *то* $\gamma = 0$ *и* $x_0 \in [K \cup (-K)] \setminus [\overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K}) \cup \{\theta\}]$.

Доказательство. Так как K-конус в конечномерном пространстве E, то ([42], стр. 301) $\dim \operatorname{lin} K^* = \dim E^*$, и, следовательно, $\dim \operatorname{lin} K^* = \dim E$. Остаётся применить предложение 13 ∎

Из следствия 7 вытекает, что если пространство E конечномерно, K-конус в E и выполняется (19), то каждое из следующих трёх условий: $\gamma \neq 0$, $x_0 \in \overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K})$, $x_0 = \theta$ влечёт равенство $\dim E = m$, а из условия $x_0 \notin K \cup (-K)$ следует, что либо $\dim E = m$, либо $\dim E = m+1$.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Если E — бесконечномерное пространство, K — нормальный конус в E и выполняется* (19), *то* $\gamma = 0$ *и* $x_0 \in [K \cup (-K)] \setminus [\overset{[0]}{K} \cup (-\overset{[0]}{K}) \cup \{\theta\}]$.

Доказательство. Так как E бесконечномерно, то и E^* бесконечномерно. Поскольку конус K нормален, то, по теореме М. Г. Крейна ([43], теорема 2), $\operatorname{lin} K^* = E^*$, и, стало быть $\dim \operatorname{lin} K^* > m+1$. Тогда требуемое следует из предложения 13 ∎

4. В этом параграфе рассматриваются некоторые решения обсуждаемой задачи в пространстве $E = C[a; b]$ со специальным конусом.

Пусть σ — функция, определённая на $[a; b]$ следующим образом. Множество $Z(\sigma)$ различных нулей функции σ конечно или пусто. Если $Z(\sigma) = \{t_i\}_{i=1}^{l}$, $l \geqslant 1$, где $a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_{l-1} < t_l \leqslant b$, то σ постоянна на каждом из промежутков

$$[a; t_1[,\ ]t_1; t_2[, \ldots,]t_{l-1}, t_l[,\ ]t_l; b] \tag{22}$$

и на каждом из них $|\sigma(t)| = 1$. В случае $t_1 = a$ ($t_l = b$) промежуток $[a; t_1[$ ($]t_l; b]$) в (22) отсутствует. Если $Z(\sigma) = \varnothing$, то либо $\sigma(t) = 1$, $t \in [a; b]$, либо $\sigma(t) = -1$, $t \in [a; b]$.

Обозначим через V_σ множество определённых и ограниченных на $[a; b]$ функций v, неубывающих на каждом из промежутков (22), на котором $\sigma(t)=1$, и невозрастающих на каждом из промежутков (22), на котором $\sigma(t) = -1$. Очевидно, что каждая функция $v \in V_\sigma$ имеет на $[a\,;\,b]$ конечное изменение.

В качестве множества $F \subset E^* = C^*[a\,;\,b]$ рассмотрим множество F_σ всех функционалов

$$\psi(x) = \int_a^b x(t)\,dv(t), \tag{23}$$

где $v \in V_\sigma$, $x \in C[a\,;\,b]$.

Мы хотим показать, что F_σ совпадает с множеством всех функционалов из $E^* = C^*[a\,;\,b]$, неотрицательных на некотором конусе. Пусть

$$K_\sigma = \left\{ x \in C[a\,;\,b] \mid \operatorname{sign} x(t) \begin{bmatrix} \text{или} & \sigma(t), \\ \text{или} & 0 \quad , \end{bmatrix} t \in [a\,;\,b] \right\}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Множество K_σ является нормальным конусом в $C[a\,;\,b]$, телесным при $Z(\sigma) = \varnothing$ и не квазителесным при $Z(\sigma) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Сначала докажем, что K_σ — конус. Пусть — $\overline{K}_\sigma$ — замыкание K_σ и $x \in \overline{K}_\sigma$. Тогда найдётся последовательность $x_i \in K_\sigma$, $i = 1, 2\ldots$, сильно сходящаяся к x. Эта последовательность будет сходиться к x и в каждой точке отрезка $[a\,;\,b]$: $\lim\limits_{i\to\infty} x_i(t) = x(t)$, $t \in [a\,;\,b]$.

Отсюда, так как $x_i \in K_\sigma$, $i = 1, 2, \ldots$, следует, что

$$\operatorname{sign} x(t) = \begin{bmatrix} \text{или} \operatorname{sign} x_i(t), \\ \text{или} \quad 0 \quad , \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{или} & \sigma(t), \\ \text{или} & 0 \quad , \end{bmatrix} t \in [a\,;\,b],$$

т.е. $x \in K_\sigma$. Таким образом, $\overline{K}_\sigma \subset K_\sigma$, и, следовательно, множество K_σ замкнуто.

Пусть $x, y \in K_\sigma$ и $\lambda, \mu \geqslant 0$. Тогда очевидно, что

$$\operatorname{sign}\,[\lambda x(t) + \mu y(t)] = \begin{bmatrix} \text{или} & \sigma(t), \\ \text{или} & 0 \quad , \end{bmatrix} t \in [a\,;\,b],$$

т.е. $\lambda x + \mu y \in K_\sigma$.

Наконец, пусть $x \in K_\sigma \cap (-K_\sigma)$. Допустим, что существует точка $t_0 \in [a\,;\,b]$ такая, что $x(t_0) \neq 0$. Так как $x \in K_\sigma$, то $\operatorname{sign}\ x(t_0) = \sigma(t_0) \neq 0$. Так как $x \in (-K_\sigma)$ то $-x \in K_\sigma$, и потому $-\operatorname{sign} x(t_0) = \operatorname{sign}(-x)(t_0) = \sigma(t_0)$. Значит, $\sigma(t_0) = -\sigma(t_0)$, откуда $\sigma(t_0) = 0$. Получили противоречие, доказывающее, что функция x тождественно равна нулю на $[a\,;\,b]$. Итак, K_σ — конус.

Теперь покажем, что конус K_σ нормален. Пусть $x, y \in K_\sigma$. Тогда, как нетрудно видеть, $|x(t) + y(t)| \geqslant |x(t)|$, $t \in [a\,;\,b]$. Отсюда $\|x + y\| \geqslant \geqslant |x(t) + y(t)| \geqslant |x(t)|$, $t \in [a\,;\,b]$, и, следовательно, $\|x + y\| \geqslant \|x\|$. Аналогично, $\|x + y\| \geqslant \|y\|$. Значит, $\|x + y\| \geqslant \max\{\|x\|, \|y\|\}$, и, таким образом, K_σ — нормальный конус.

Пусть $Z(\sigma) = \varnothing$. Тогда, по определению функции δ, либо $\delta(t) = 1$, $t \in [a\,;\,b]$, либо $\sigma(t) = -1$, $t \in [a\,;\,b]$. Очевидно, что в этом случае $\sigma \in \overset{[0]}{K}_\sigma$, и, следовательно, конус K_σ — телесный.

Пусть $Z(\sigma) \neq \varnothing$ и $t_1 \in Z(\sigma)$. Тогда функционал δ_{t_1} обращается в нуль на каждой функции из конуса K_σ. Отсюда следует, что $\delta_{t_1} \in K_\sigma^*$. К тому же функционал δ_{t_1} отличен от нулевого. Таким образом, ни один элемент конуса K_σ не является квазивнутренним, и, следовательно, конус K_σ не является квазителесным ▮

Отметим, что K_σ при $\sigma(t) = 1$, $t \in [a\,;\,b]$, есть конус неотрицательных функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. $F_\sigma = K_\sigma^*$.

Доказательство. Пусть $\psi \in F_\sigma$. Тогда найдётся функция $v \in V_\sigma$, порождающая по формуле (23) функционал ψ. Из существования интеграла в правой части равенства (23) следует существование интегралов $I_i(x) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(t)\,dv(t)$, $i = 0, 1, \ldots, l$, $(t_0 = a,\ t_{l+1} = b)$, и равенство

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{l} I_i(x). \tag{24}$$

Пусть $x \in K_\sigma$. Покажем, что в таком случае $I_i(x) \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, l$. Разложим отрезок $[t_i\,;\,t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, l$, произвольным образом на части точками

$$t_i = \xi_0^i < \xi_1^i < \ldots < \xi_{n-1}^i < \xi_n^i = t_{i+1} \, (i = 0, 1, \ldots, l). \tag{25}$$

В каждом частичном отрезке $[\xi_k^i\,;\,\xi_{k+1}^i]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, выберем по точке η_k^i, причём так, чтобы $\eta_0^i = \xi_0^i$ и $\eta_{n-1}^i = \xi_n^i$. Составим интегральную сумму Римана — Стилтьеса $s^i(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} x(\eta_k^i)\,[v(\xi_{k+1}^i) - v(\xi_k^i)]$.

Рассмотрим случай, когда $i = 1, \ldots, l-1$. Предположим, что на интервале $]t_i\,;\,t_{i+1}[$ функция $\sigma(t) = -1$. Так как $x \in K_\sigma$, то $x(\eta_k^i) = 0$, $k = 0$, $n-1$, и $x(\eta_k^i) \leqslant 0$, $k = 1, \ldots, n-2$. Так как $v \in V_\sigma$, то v невозрастает на интервале $]t_i\,;\,t_{i+1}[$. Тогда из (25) при $i = 1, \ldots, l-1$, имеем: $v(\xi_{k+1}^i) - v(\xi_k^i) \leqslant 0$, $k = 1, \ldots, n-2$. Следовательно,

$$x(\eta_k^i)[v(\xi_{k+1}^i) - v(\xi_k^i)] \begin{cases} = 0, & k = 0,\ n-1, \\ \geqslant 0, & k = 1, \ldots, n-2. \end{cases} \tag{26}$$

Аналогично показывается, что (26) справедливо и для случая, когда $\sigma(t) = 1$, $t \in\,]t_i\,;\,t_{i+1}[$.

Теперь рассмотрим случай $i = 0$ и $a = t_0 < t_1$. Предположим, что $\sigma(t) = -1$, $t \in [a\,;\,t_1[$. Так как $x \in K_\sigma$, то $x(\eta_k^0) \leqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$, и $x(\eta_{n-1}^0) = 0$. Так как $v \in V_\sigma$, то v не возрастает на промежутке $[a\,;\,t_1[$. Тогда из (25) при $i = 0$ получаем: $v(\xi_{k+1}^0) - v(\xi_k^0) \leqslant 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-2$. Стало быть,

$$x(\eta_k^0)[v(\xi_{k+1}^0) - v(\xi_k^0)] \begin{cases} \geqslant 0, & k = 0, 1, \ldots, n-2, \\ = 0, & k = n-1. \end{cases} \tag{27}$$

Аналогичным образом получаем справедливость (27) при $\sigma(t) = 1$, $[a\,;\,t_1[$.

Случай $i = l$ и $t_l < t_{l+1} = b$ исчерпывается аналогично. При этом

$$x(\eta_k^l)[v(\xi_{k+1}^l) - v(\xi_k^l)] \begin{cases} = 0, & k = 0, \\ \geqslant 0, & k = 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{28}$$

Из (26), (27), (28) получаем, что $s^i(x) \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, l$. В силу существования интеграла $I_i(x)$, сумма $s^i(x)$ стремится к $I_i(x)$, при $\max(\xi_{k+1}^i - \xi_k^i) \to 0$. А потому $I_i(x) \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, l$. Отсюда и из (24): $\psi(x) \geqslant 0$. Таким образом, $\psi \in K_\sigma^*$. Итак, мы доказали, что $F_\sigma \subset K_\sigma^*$. Обратное включение по существу доказано у П. П. Коровкина (см. [9], доказательство леммы 1). Пусть $\psi \in K_\sigma^*$. Тогда найдётся функция v с конечным изменением на $[a; b]$ такая, что функционал ψ представляется формулой (23). Зафиксируем какую-нибудь функцию $y \in K_\sigma$ такую, что $Z(y) = \{t_1, \ldots, t_l\}$. Сумма кратностей нулей функции y очевидно не превосходит $2l$. Для любой функции $x \in C[a; b]$ такой, что $\operatorname{sign} x(t) = \operatorname{sign} y(t)$, $t \in [a; b]$, будем иметь: $\psi(x) \geqslant 0$, ибо $x \in K_\sigma$, а $\psi \in K_\sigma^*$. Таким образом, $\psi \in S_{2l}$. Тогда из доказательства леммы 1 из [9] следует, что функция v неубывает на каждом из промежутков (22), на котором $\sigma(t) = 1$, и невозрастает на каждом из промежутков (22), на котором $\sigma(t) = -1$. К тому же функция v ограничена на $[a; b]$, поскольку она имеет на $[a; b]$ конечное изменение. Значит, $v \in V_\sigma$, и, следовательно, $\psi \in F_\sigma$. ∎

Пусть функция $x_0 \in C[a; b]$ и число γ таковы, что $\dim \operatorname{lin}(K_\sigma^* \cap E^*(x_0; \gamma)) = m$, $m \in \mathbb{N}$. Так как пространство $E = C[a; b]$ бесконечномерно, а K_σ является, по предложению 14, нормальным конусом, то, в силу следствия 8, $\gamma = 0$, $x_0 \in K_\sigma \cup (-K_\sigma)$ и $x_0 \neq \theta$. Таким образом, множество всех функций $x_0 \in C[a; b]$, для каждой из которых $\dim \operatorname{lin}(K_\sigma^* \cap E^*(x_0; \gamma)) = m$, совпадает с множеством $\overset{[m]}{K}_\sigma \cup (-\overset{[m]}{K}_\sigma)$, где

$$\overset{[m]}{K}_\sigma = \{x_0 \in K_\sigma \mid x_0 \neq \theta,\ \dim \operatorname{lin}(K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)) = m\},\ m \in \mathbb{N}.$$

Множество K_σ имеет смысл и для $m = 0$. В этом случае оно представляет собой очевидно квазивнутренность конуса K_σ. По предложению 14, $\overset{[0]}{K}_\sigma = \overset{0}{K}_\sigma$, если $Z(\sigma) = \varnothing$, и $\overset{[0]}{K}_\sigma = \varnothing$, если $Z(\sigma) \neq \varnothing$. Множество $\overset{[m]}{K}_\sigma$ при $m = 1$ есть множество точек гладкости конуса K_σ ([28], [30]), а при $m \geqslant 2$ его можно назвать, следуя А. С. Каваретта [20], множеством точек квазигладкости порядка m конуса K_σ.

Следующее предложение даёт описание множества $\overset{[m]}{K}_\sigma$, $m \geqslant 0$, в терминах, относящихся к пространству $C[a; b]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. ([23]). *Для того чтобы $x_0 \in \overset{[m]}{K}_\sigma$, $m \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \in K_\sigma$ и $|Z(x_0)| = m$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $x_0 \in K_\sigma$ и $|Z(x_0)| = m$. Тогда очевидно $|Z(\sigma)| = l \leqslant m$ и $x_0 \neq \theta$.

Если $m = 0$, то и $l = 0$. В этом случае $x_0 \in \overset{0}{K}_\sigma$. Поэтому $K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0) = \{\theta\}$. Значит, $\dim \operatorname{lin}(K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)) = 0$, и $x_0 \in \overset{[0]}{K}_\sigma$.

Пусть теперь $m \geqslant 1$ и $Z(x_0) = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$. Так как $x_0 \in K_\sigma$, то $Z(\sigma) \subset Z(x_0)$. Нетрудно видеть, что функционалы

$$\psi_i = \begin{cases} \delta_{\tau_i}, & \text{если } \tau_i \in Z(\sigma), \\ \delta(\tau_i)\,\delta_{\tau_i}, & \text{если } \tau_i \in Z(x_0) \setminus Z(\sigma), \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m, \tag{29}$$

линейно независимы и принадлежат $K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)$. Пусть $\psi \in K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)$. Всякая функция $x \in C[a; b]$, удовлетворяющая условию $\operatorname{sign} x(t) = \operatorname{sign} x_0(t)$, $t \in [a; b]$, будет принадлежать конусу K_σ. А потому, в силу того, что $\psi \in K_\sigma^*$, будем иметь: $\psi(x) \geqslant 0$. Значит, функционал ψ принадлежит классу S_{2m}. А так как $\psi(x_0) = 0$, то ([9], следствие, стр. 147) существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $\psi = \lambda_1\delta_{\tau_1} + \ldots + \lambda_m\delta_{\tau_m}$. Отсюда $\psi = \mu_1\psi_1 + \ldots + \mu_m\psi_m$, где $\mu_i = \lambda_i$, если $\tau_i \in Z(\sigma)$, и $\mu_i = \sigma(\tau_i)\lambda_i$, если $\tau_i \in Z(x_0) \setminus Z(\sigma)$. Таким образом, $\dim \operatorname{lin}(K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)) = m$, и, следовательно, $x_0 \in \overset{[m]}{K}_\sigma$.

Необходимость. Пусть $x_0 \in \overset{[m]}{K}_\sigma$. Тогда $x_0 \in K_\sigma$. Допустим, что $|Z(x_0)| \neq m$. Если $|Z(x_0)| = m_1 < m$, то из принадлежности $x_0 \in K_\sigma$, по доказанной достаточной части, будем иметь: $x_0 \in \overset{[m_1]}{K}_\sigma$, что противоречит принадлежности $x_0 \in \overset{[m]}{K}_\sigma$, ибо $m_1 < m$. Если $|Z(x_0)| > m$ (в этом случае множество $Z(x_0)$ может быть и бесконечным), то выбрав $m_2 > m$ точек $\tau_1, \ldots, \tau_{m_2} \in Z(x_0)$, построим по формуле (29) m_2 линейно независимых функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_{m_2} \in K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)$. Поэтому $\dim \operatorname{lin}(K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)) \geqslant m_2 > m$, что опять же противоречит принадлежности $x_0 \in \overset{[m]}{K}_\sigma$ ∎

СЛЕДСТВИЕ 9. *$\overset{[m]}{K}_\sigma = \varnothing$, если $m < |Z(\sigma)|$, и $\overset{[m]}{K}_\sigma \neq \varnothing$, если $m \geqslant |Z(\sigma)|$. В частности, при $|Z(\sigma)| > 1$, конус K_σ не имеет точек гладкости.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Пусть функции $x_0, x_1, \ldots, x_m \in E = C[a; b]$, $m \geqslant 1$, таковы, что $x_0 \in K_\sigma$, $Z(x_0) = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ и $\det(x_i(\tau_j))_{i,j=1}^m \neq 0$. Тогда $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ является $(K_\sigma^*, K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0))$—множеством Коровкина.*

Доказательство. Из того, что $x_0 \in K_\sigma$ и $|Z(x_0)| = m$ получаем, по предложению 16, что $x_0 \in \overset{[m]}{K}_\sigma$. Для определённых по формуле (29) функционалов $\psi_i \in K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0)$, $i = 1, \ldots, m$, будем иметь:

$$\Delta\begin{pmatrix}\psi_1 \ldots \psi_m \\ x_1 \ldots x_m\end{pmatrix} = \prod_{\tau \in Z(x_0) \setminus Z(\sigma)} \sigma(\tau) \cdot \det(x_i(\tau_j))_{i,j=1}^m \neq 0.$$

Следовательно, по предложению 2 при $A = \{x_0\}$, $F = K_\sigma^*$, $\gamma = 0$, множество $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ является $(K_\sigma^*, K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0))$—множеством Коровкина ∎

В предложении 17 в качестве функции x_0 можно взять, например, функции $x_0(t) = \sigma(t) \cdot \prod_{i=1}^m (t - \tau_i)^2$, $x_0(t) = \sigma(t) \cdot \prod_{i=1}^m |t - \tau_i|$.

СЛЕДСТВИЕ 10. *Если $x_0 \in K_\sigma$, $|Z(x_0)| = m \geqslant 1$ и $x_1, \ldots, x_m \in C[a; b]$—система Чебышёва, то $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ является $(K_\sigma^*, K_\sigma^* \cap E^*(x_0; 0))$-множеством Коровкина.*

Индексом $\varepsilon_\sigma(t)$ точки $t \in [a; b]$ относительно функции σ назовём число, равное 1, если либо $t \in \{a, b\}$, либо $t \in]a; b[$ и совпадает с одним из нулей t_i функции σ таким, что $\sigma(t)$ имеет разные знаки на промежутках $]t_{i-1}; t_i[$ и $]t_i; t_{i+1}[$ (при $i = 1$, соответственно $i = l$, полагаем $t_{i-1} = t_0 = a$, соответственно $t_{i+1} = t_{l+1} = b$), и равное 2 во всех остальных случаях. Понятие индекса $\varepsilon_\sigma(t)$ точки $t \in [a; b]$ относительно функции σ, не имеющей нулей на $[a\,;b]$, совпадает с понятием индекса $\varepsilon(t)$ точки $t \in [a\,;b]$, данным в ([6], стр. 55). Если $t \in [a\,;\,b] \setminus Z(\sigma)$, то очевидно $\varepsilon_\sigma(t) = \varepsilon(t)$. Отметим, что если $a \leqslant \tau_1 < \ldots < \tau_m \leqslant b$, то многочлен $h(\tau_1) \cdot \prod_{i=1}^{m} (\tau_i - t)^{\varepsilon_\sigma(\tau_i)}$, где $h(\tau_1) = \sigma(a)$ при $a < \tau_1$, и $h(\tau_1) = -\sigma(\bar{\tau})$, $\tau_1 < \bar{\tau} < \tau_2$, при $a = \tau_1$, также можно рассматривать в качестве функции x_0 в предложении 17 и следствии 10.

Индексом $\varepsilon_\sigma(T)$ *пустого или конечного множества* $T \subset [a\,;\,b]$ *отно-сительно функции* σ назовём число, равное нулю, если $T = \varnothing$, и равное сумме индексов $\varepsilon_\sigma(t)$ всех точек $t \in T$ относительно функции σ, если $T \neq \varnothing$.

Для целого $k \geqslant 0$ такого, что $|Z(\sigma)| + k \geqslant 1$, обозначим через φ_k^σ множество функционалов, которое определим следующим образом. Фун-кционал $\varphi \in \Phi_k^\sigma$ тогда и только тогда, когда для φ найдутся число $p \in \mathbb{N}$, различные точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \in [a\,;\,b]$, удовлетворяющие условию

$$\varepsilon_\sigma(\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p\} \setminus Z(\sigma)) \leqslant k, \tag{30}$$

и отличные от нуля числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, удовлетворяющие условию

$$\lambda_i \sigma(\varkappa_i) > 0 \text{ при } \varkappa_i \notin Z(\sigma), \tag{31}$$

такие, что

$$\varphi = \lambda_1 \delta_{\varkappa_1} + \ldots + \lambda_p \delta_{\varkappa_p}. \tag{32}$$

Из определения множества Φ_k^σ следует, что $k \neq 0$, если, $Z(\sigma) = \varnothing$. Если же $Z(\sigma) \neq \varnothing$, то k может равняться и нулю. При этом, для каждого функционала $\varphi \in \Phi_0^\sigma$ соответствующие ему точки $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \in Z(\sigma)$. Множе-ство Φ_k^σ для функции $\sigma(t) = 1$, $t \in [a\,;\,b]$, (следовательно, $k \geqslant 1$) совпа-дает с множеством Φ_k^+ ([7], [8]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Всякая система Чебышёва* $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \subset C[a\,;\,b]$ *порядка*

$$n \geqslant \varepsilon_\sigma(Z(\sigma)) + k \tag{33}$$

на $[a\,;\,b]$ *является* $(K_\sigma^*, \Phi_k^\sigma)$*—множеством Коровкина.*

Доказательство. Пусть $f_i \in K_\sigma^*$, $\|f_i\| \leqslant c$, $i = 1, 2, \ldots$, $\varphi \in \Phi_k^\sigma$ и

$$\lim_{i \to \infty} f_i(y_j) = \varphi(y_j),\ j = 0, 1, \ldots, n. \tag{34}$$

Из принадлежности $\varphi \in \Phi_k^\sigma$ следует существование $p \in \mathbb{N}$, различных точек $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p \in [a\,;\,b]$ и чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ удовлетворяющих соот-ветственно условиям (30) и (31), таких, что φ представляется в виде (32). Из (30) и (33) имеем: $\varepsilon_\sigma(\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p\} \cup Z(\sigma)) \leqslant \varepsilon_\sigma(Z(\sigma)) + k \leqslant n$. Тогда, по теореме М. Г. Крейна ([44], стр. 41, теорема 5.2), найдётся ненулевая функция $x_0 \in \operatorname{lin}\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ такая, что $\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p\} \cup Z(\sigma) \subset Z(x_0)$. Отметим, что последнее включение представляет собой равенство во всех случаях, за возможным исключением того, когда только одна из концевых точек a или b принадлежит объединению $\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p\} \cup Z(\sigma)$ и $n - \varepsilon_\sigma(\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p\} \cup Z(\sigma))$ является нечётным числом. В этом случае $Z(x_0)$ может равняться $\{\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p\} \cup Z(\sigma) \cup \{a, b\}$. Не нарушая общности, можно считать, что $x_0 \in K_\sigma$, ибо в противном случае мы вместо функции

x_0 рассмотрели бы функцию $-x_0$, для которой $Z(-x_0) = Z(x_0)$ и ко-торая уже принадлежала бы K_σ. Пусть $Z(x_0) = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$. Так как $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$—система Чебышёва, то ([44]], теорема 4.1, стр. 33) $m \leqslant n$. Среди функций $y_0, y_1, \ldots, y_n$ обязательно найдутся m функций, обозначим их через $x_1, \ldots, x_m$, таких, что $\det(x_i(\tau_j))_{i,j=1}^m \neq 0$, ибо в противном случае для $n + 1$ различных точек $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_m, \tau_{m+1} \ldots, \tau_n \in [a\,;\,b]$ определитель $\det(y_i(\tau_j))_{i,j=0}^n$ равнялся бы нулю, что противоречило бы тому, что $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$—система Чебышёва. Тогда, по предложению 17, множество $\{x_0, x_1 \ldots, x_m\}$ является $(K_\sigma^*, K_\sigma^* \cap E^*(x_0\,;\,0))$—множеством Коровкина.

Используя (32) и (31), можно убедиться в том, что

$$\varphi \in K_\sigma^* \cap E^*(x_0\,;\,0). \tag{35}$$

Из (34) и того, что $x_0 \in \operatorname{lin}\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ следует, что

$$\lim_{i \to \infty} f_i(x_j) = \varphi(x_j),\ j = 0, 1, \ldots, m. \tag{36}$$

Из $f_i \in K_\sigma^*$, $\|f_i\| \leqslant c$, $i = 1, 2, \ldots$, (35) и (36), на основании того, что $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ есть $(K_\sigma^*, K_\sigma^* \cap E^*(x_0\,;\,0))$—множество Коровкина, будем иметь: $\lim_{i \to \infty} f_i(x) = \varphi(x)$ для любой функции $x \in C[a\,;\,b]$ ▮

Если в предложении 18 положить $\sigma(t) = 1$, $t \in [a\,;\,b]$, то из него при $n = k = 2$ получаем результат П. П. Коровкина ([3], теорема 7, стр. 51) о том, что система Чебышёва второго порядка является (K^*, Δ)—множе-ством Коровкина, а при произвольном $n = k \geqslant 1$—результат Ч. А. Ми-кчелли ([7], теорема 1).

В заключение отметим, что из предложений 1,2,3,7 и следствия 1 можно получить соответствующие утверждения для функционалов класса S_m. Для этого достаточно в перечисленных предложениях и в следствии 1 положить $F = S_m$ и $\overline{F^m}$ заменить на S_m (ибо, как было показано П. П. Коровкиным ([9], лемма 2), множество S_m замкнуто в $*$-слабой топологии).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шашкин Ю. А., *Системы Коровкина в пространствах непрерывных функ-ций.* Изв. АН СССР, серия матем., т. **26**, № 4, 495–512 (1962).

[2] Люстерник Л. А., Соболев В. И., *Элементы функционального анализа.* М., Наука, 1965.

[3] Коровкин П. П., *Линейные операторы и теория приближений.* М., Физ-матгиз, 1959.

[4] Popoviciu T., *Asupra demonstrației teoremei lui Weierstrass cu ajutorul polinoamelor de interpolare.* Lucrările Sesiunii Generale Științifice, Acad. R.P.R., 1664–1667 (1950).

[5] Bohman H., *On approximation of continuous and of analytic functions.* Arkiv Matem., **2**, 43–56 (1952).

[6] Крейн М. Г., Нудельман А. А., *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М., Наука, 1973.

[7] Micchelli C. A., *Chebyshov subspaces and convergence of positive linear operators.* Proc. Amer. Math. Soc., **40**, № 2, 448–452 (1973).

[8] Лабскер Л. Г., *О некоторых необходимых условиях сходимости последова-тельностей линейных положительных операторов к операторам множества* Φ_k^0. Примен. функц. анализа в теории приближений, № 6, 59–69, Калинин, 1975.

[9] Коровкин П. П., *Сходящиеся последовательности линейных операторов.* Успехи матем. наук, т. **17**, № 4, 147–152 (1962).

[10] Л а б с к е р Л. Г., *Отличающие множества и сходимость последовательностей линейных функционалов и операторов класса S_m*. Примен. функц. анализа в теории приближений, Калинин, 79–91 (1977).
[11] Л а б с к е р Л. Г., *О множествах Коровкина в пространстве непрерывных функций для операторов класса S_m^0*. Матем. заметки, т. **25**, № 4, 521–536 (1979).
[12] Л а б с к е р Л. Г., *К вопросу о признаках (S_m^0,Φ_k^0) — множеств Коровкина*. Примен. функц. анализа в теории приближений, Калинин, 73–83 (1979).
[13] К у д р я в ц е в а А. М., К у д р я в ц е в Г. И., *Об условиях сходимости последовательностей функционалов класса S_m к функционалу $\Phi_r(f) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f(x_k)$*. Примен. функц. анализа в теории приближений, Калинин, 66–72 (1978).
[14] Г а р к а в и А. Л., *Об одном критерии К-систем непрерывных функций*, Изв.вузов,Математика,№ 4, 55–59 (1972).
[15] М и н ь к о в а Р. М., *О системах Коровкина для операторов класса S_m*. Матем. заметки, т. **13**,№ 1, 147–158 (1973).
[16] М и н ь к о в а Р. М., Ш а ш к и н Ю. А., *О сходимости линейных операторов класса S_m*. т. **6**, № 5, 591–598 (1969).
[17] Л а б с к е р Л. Г., *О некоторых необходимых и достаточных признаках множеств Коровкина для операторов класса S_m^0*. Сиб. матем. журнал, т. **21**, № 2, 128–138 (1980).
[18] В о л к о в В. И., *Условия сходимости последовательностей положительных операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных*. Учён. зап. Калининского гос. пед. института им. М. И. Калинина, **26**, 27–40 (1958).
[19] B e r e n s, H., L o r e n t z G. G., *Geometric Theory of Korovkin sets*. J. Approxim. Theory, V. **15**, N 3, 161–189 (1975).
[20] C a v a r e t t a A. S., A. K o r o v k i n, *Theorem for finitely defined operators*. Approxim. Theory, New-York—London, Akad. Press., 299–405 (1973).
[21] Ш а ш к и н Ю. А., *Конечно-определённые линейные операторы в пространствах непрерывных функций*. Успехи матем. наук, т. **20**, № 6, 175–180 (1965).
[22] Ш а ш к и н Ю. А., *Реферат 2Б 512*, Реферативный журнал ,,Математика'', 1975.
[23] Л а б с к е р Л. Г., *О слабой сходимости последовательностей линейных положительных функционалов*. ДАН СССР, т. **197**, № 6, 1264–1267 (1971).
[24] F e r g u s o n L e B a r o n O., R u s k M i c h a e l D., *Korovkin sets for an operator on a space of continuous functions*, Pacif. J. Math., v. **65**, N 2, 337–345 (1976).
[25] К у т а т е л а д з е С. С., Р у б и н о в А. М., *Двойственность Минковского и ее приложения*. Новосибирск, Наука, 1976.
[26] К у т а т е л а д з е С. С., *О сходимости к мере Дирака и к тождественному оператору*. Сиб. матем. журнал. т. **13**, № 2, 464–466 (1972).
[27] К у т а т е л а д з е С. С., *Супремальные генераторы и сходимость нерастягивающих операторов*. Матем. заметки, т. **13**, № 1, 55–65 (1973).
[28] К л и м о в В. С., К р а с н о с е л ь с к и й М. А., Л и ф ш и ц Е. А., *Точки гладкости конуса и сходимость положительных функционалов и операторов*. Тр. Моск. матем. о-ва, **15**, 55–69 (1966).
[29] К р е й н М. Г., Р у т м а н М. А., *Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха*. Успехи матем. наук, **3**, № 1 (1948).
[30] Л а б с к е р Л. Г., *О точках гладкости конуса*. Тр. центр. зонального объединения матем. кафедр. Функц. анализ и теория функций, Калинин, № 2, 67–73 (1971).
[31] Л а б с к е р Л. Г., *О множествах Коровкина в банаховом пространстве для множества линейных функционалов*. Матем. заметки, т. **31**, № 1, 93–111 (1982).
[32] C h o d a H i s a s h u, E c h i g o M a r i a, *On theorems of Korovkin*, Proc. Japan Acad., **39**, N 2, 107–108 (1963).
[33] T a k a h a s i S i n - e i, *Korovkin's Theorems for C*-Algebras*. J. Approxim. Theory, **27**, № 3, 197–202 (1979).
[34] J a m e s R a l p h L., *Korovkin sets in locally convex function spaces*. J. Approxim. Theory, V. **12**, № 2, 205–209 (1974).
[35] Р у б и н о в А. М., *Об одной теореме В. С. Климова, М. А. Красносельского и Е. А. Лифшица*. Оптимизация, **3**, 20, 154–158 (1971).

[36] Л а б с к е р Л. Г., *Об одном конусе в пространстве непрерывных функций, связанном с определением функционалов класса S_m*. Сб. материалов конференции по проблеме ,,Примен. функц. анализа в теории приближений'', Калинин, 84–90 (1970).
[37] A l a o g l u L., *Weak topologies of normed linear spaces*. Ann. of Math., V. **2**, № 41, 252–267 (1940).
[38] Д а н ф о р д Н., Ш в а р ц Д ж. Т., *Линейные операторы. Общая теория*. М., Иностр. лит., 1962.
[39] Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р., *Функциональный анализ и полугруппы*. М., Иностр. лит., 1962.
[40] Б а х т и н И. А., Г о н ч а р о в, Г. М., *Признаки продолжимости линейных положительных функционалов*. Изв. вузов, Математика, № **11**, 12–18 (1968).
[41] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., *Положительные решения операторных уравнений*. М., Физматгиз, 1962.
[42] Г л а з м а н И. М., Л ю б и ч Ю. И., *Конечномерный линейный анализ*. М., Наука, 1969.
[43] К р е й н М. Г., *Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха*. ДАН СССР, т. **28**, № 1, 13–17 (1940).
[44] К а р л и н С., С т а д д е н В., *Чебышёвские системы и их применение в анализе и статистике*. М., Наука, 1976.

Поступила 25. III. 1982

СССР 129329, Москва, улица Кольская, 2
Московский институт повышения квалификации руководящих работников и специалистов химической промышленности,
Кафедра статистических методов в управлении и контроле

Labsker L. G.
Advanced Studies Moscow Institute for Chemistry Managers and Engineers,
Department of Stochastic control,
Kolskaja ul. 2
(129329) Moscow, USSR.