

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION  
 Tome 14, N° 1, 1985, pp. 59—81

INTERVALLES D'INTERPOLATION POUR DES CLASSES  
 D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

DUMITRU RÎPEANU  
 (Cluj-Napoca)

1. Dans ce travail on considère des équations différentielles linéaires du second ordre dans lesquelles les maximums des valeurs absolues des coefficients ne dépendent pas de l'équation respective et l'on étudie la manière dont varie la longueur d'un certain intervalle d'interpolation pour la classe respective d'équations, alors que les maximums des valeurs absolues des coefficients des équations de la classe en question prennent toutes les valeurs possibles qui sont positives et vérifient une relation donnée d'avance.

On considère l'équation

$$(1) \quad (E) \quad y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

et l'on suppose que les coefficients  $p_s(x)$  ( $s = 1, 2$ ) sont des fonctions continues et non identiquement nulles dans un intervalle donné  $[0, L]$  ( $L > 0$ ) de la variable.

On écrit

$$(2) \quad \begin{cases} M_s = \max_{x \in [0, L]} |p_s(x)| \quad (s = 1, 2) \\ B_1(p) = \frac{2}{\sqrt{1-4p}} \log \frac{1 + \sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \quad \left(0 < p < \frac{1}{4}\right) \\ B_2(p) = \frac{2}{\sqrt{4p-1}} \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \quad \left(p > \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

où  $\log$  désigne le logarithme népérien et  $\arccos$  l'arc d'origine 0 et d'ex-  
 trémité  $\leq \frac{2}{\pi}$  et non négative.

On constate immédiatement ([1]) que

$$(3) \quad B_1(p) > 0, B_2(p) > 0, B'_1(p) < 0, B'_2(p) < 0.$$

On désigne enfin par  $\Gamma(M_1, M_2)$  la classe d'équations (E) déterminée par la condition  $\max_{x \in [0, L]} |p_s(x)| = M_s$  ( $s = 1, 2$ ) avec  $M_s$  ( $s = 1, 2$ ) nombres

positifs donnés et on écrit

$$(4) \quad A(M_1, M_2) = \begin{cases} \frac{2}{M_1} B_1\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right) & \text{si } p = \frac{M_2}{M_1^2} < \frac{1}{4} \\ \frac{4}{M_1} & \text{,, } \frac{M_2}{M_1^2} = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{M_1} B_2\left(\frac{M_2}{M_1^2}\right) & \text{,, } p = \frac{M_2}{M_1^2} > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Du fait qu'en (4)  $p = \frac{M_2}{M_1^2}$  et en (2)  $M_s > 0$  ( $s = 1, 2$ ) on supposera sans plus spécifier dans le reste de ce travail  $p > 0$ .

On dira pour abrégé qu'un intervalle est un intervalle d'interpolation pour la classe  $\Gamma(M_1, M_2)$  si cet intervalle est un intervalle d'interpolation pour chaque équation de la classe  $\Gamma(M_1, M_2)$ .

On se servira de la

PROPOSITION 1. *L'intervalle  $[0, A_0(M_1, M_2))$  où  $A_0(M_1, M_2) = \min(L, A(M_1, M_2))$  est un intervalle d'interpolation pour la classe  $\Gamma(M_1, M_2)$ .*

*Démonstration.* On désignera par  $H(L)$  l'ensemble des équations (E) de la classe  $\Gamma(M_1, M_2)$  qui ont la propriété que leurs solutions (non nulles) qui s'annulent pour  $x = 0$  possèdent dans l'intervalle  $[0, L]$  au moins une racine positive. Si  $(E) \in H(L)$ , alors  $A(M_1, M_2) \leq L$  et l'intervalle  $[0, A(M_1, M_2))$  est un intervalle d'interpolation pour l'équation (E) ([1], Théorèmes 1 et 2). Si par contre  $(E) \in \Gamma(M_1, M_2)$  et  $(E) \notin H(L)$ , alors l'intervalle  $[0, L]$  est un intervalle d'interpolation pour l'équation (E) ([1], démonstration du théorème 3, avec les changements de notations nécessaires).

Si donc  $A(M_1, M_2) \leq L$ , alors l'intervalle  $[0, A(M_1, M_2))$  est un intervalle d'interpolation pour (E). Si  $A(M_1, M_2) > L$ , alors l'intervalle  $[0, L]$  est un intervalle d'interpolation pour (E). L'intervalle  $[0, A_0(M_1, M_2)]$  est donc dans tous les trois cas, qui comprennent tous les cas possibles, un intervalle d'interpolation pour (E) et par suite pour la classe  $\Gamma(M_1, M_2)$ . La relation entre  $M_1$  et  $M_2$  donnée d'avance sera écrite sous la forme

$$(5) \quad F(M_1, M_2) = 0 (M_1 > 0, M_2 > 0),$$

On supposera que de (5) on peut déduire explicitement

$$(6) \quad M_2 = F_1(M_1)$$

où

$$(7) \quad M_1 = F_2(M_2)$$

et l'on se placera dans l'hypothèse suivante:

*Hypothèse 1.* Les domaines de définition  $J_1$  et  $J_2$  de  $F_1(M_1)$  et  $F_2(M_2)$  sont constitués d'un nombre fini d'intervalles dans lesquels  $F_1(M_1)$  et  $F_2(M_2)$  ont des dérivées du premier ordre continues.

En ce cas

$$A(M_1, M_2) = A_1(M_1) = \begin{cases} H_1(M_1) = \frac{2}{M_1} B_1\left(\frac{F_1(M_1)}{M_1^2}\right) & \text{si } p = \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} < \frac{1}{4} \\ \frac{4}{M_1} & \text{,, } \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} = \frac{1}{4} \\ H_2(M_1) = \frac{2}{M_1} B_2\left(\frac{F_1(M_1)}{M_1^2}\right) & \text{,, } \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} > \frac{1}{4} \end{cases}$$

(8)

respectivement

$$A(M_1, M_2) = A_2(M_2) = \begin{cases} C_1(M_2) = \frac{2}{F_2(M_2)} B_1\left(\frac{M_2}{F_2^2(M_2)}\right) & \text{si } \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} < \frac{1}{4} \\ \frac{4}{F_2(M_2)} & \text{,, } \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} = \frac{1}{4} \\ G_2(M_2) = \frac{2}{F_2(M_2)} B_2\left(\frac{M_2}{F_2^2(M_2)}\right) & \text{,, } \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} > \frac{1}{4} \end{cases}$$

(9)

Il est évident que

Le domaine de définition de  $A_1(M_1)$  de (8) est l'ensemble  $T_1 = \{M_1 : M_1 > 0, F_1(M_1) > 0\} \subseteq J_1$  et le domaine de définition de  $A_2(M_2)$  de (9) est l'ensemble

$$I_2 = \{M_2 : M_2 > 0, F_2(M_2) > 0\} \subseteq J_2,$$

Dans  $I_1$  nous distinguerons les ensembles

$$I_1^{\textcircled{1}} = \left\{M_1 : \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} < \frac{1}{4}\right\}, \quad \Lambda_1 = \left\{M_1 : \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} = \frac{1}{4}\right\}$$

(10)

$$I_1^{\textcircled{2}} = \left\{M_1 : \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} > \frac{1}{4}\right\}.$$

Dans  $I_2$  nous distinguerons les ensembles

$$I_2^{\textcircled{1}} = \left\{M_2 : \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} < \frac{1}{4}\right\}, \quad \Lambda_2 = \left\{M_2 : \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} = \frac{1}{4}\right\}$$

$$I_2^{\textcircled{2}} = \left\{M_2 : \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} > \frac{1}{4}\right\}$$

Les ensembles  $I_1, I_2, I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, I_2^{(1)}, I_2^{(2)}$  sont de la forme  $\{x : f(x) > 0\}$  avec  $f(x)$  continue dans son domaine de définition, constitué d'intervalles. Les ensembles respectifs sont donc constitués d'intervalles. Les ensembles  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont de la forme  $\left\{x : f(x) = \frac{1}{4}\right\}$ , avec  $f(x)$  continue dans son domaine de définition, constitué d'intervalles. Par suite,  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont constitués d'intervalles (qui peuvent éventuellement se réduire à des points). À la suite de l'hypothèse 1 on fera l'hypothèse

*Hypothèse 2.* Les ensembles  $I_1, I_2, I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, I_2^{(1)}, I_2^{(2)}, \Lambda_1, \Lambda_2$  sont constitués — s'ils existent — d'un nombre fini d'intervalles. D'ailleurs les ensembles en question sont respectivement les domaines de définition des fonctions  $A_1(M_1), A_2(M_2), H_1(M_1), H_2(M_1), G_1(M_2), G_2(M_2), \frac{4}{M_1}, \frac{4}{F_2(M_2)}$  de (8) et (9).

Dans ce travail on présente, comme spécifié, la variation de la longueur  $A_0(M_1, M_2)$  de l'intervalle d'interpolation  $[0, A_0(M_1, M_2))$  pour la classe  $\Gamma(M_1, M_2)$  pour quelques cas particuliers de la fonction  $F(M_1, M_2)$  de (5). Dans les résultats ci-dessous on ne retiendra donc que la manière dont varie  $A(M_1, M_2)$  lorsque  $A(M_1, M_2) \leq L$ , c'est-à-dire  $A(M_1, M_2) = A_0(M_1, M_2)$ .

2. On prendra d'abord en (5)

$$(11) \quad F(M_1, M_2) = M_1 + M_2 - l = 0, \quad l \text{ constante} > 0.$$

On a alors le

THÉORÈME 1°. Si en (11)  $l \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ , alors quand  $M_1$  croît de 0 à

$l, A_1(M_1)$  croît de manière monotone de  $\frac{\pi}{\sqrt{l}}$  à  $\infty$ .

2°. Si  $l > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ , alors  $A_1(M_1)$  varie selon le tableau 1.

$M_1$	0	$M_1^{(0)}$	$l$
$A_1(M_1)$	$\frac{\pi}{\sqrt{l}}$	$A_1(M_1^{(0)})$	$\nearrow \infty$

Tableau 1

dans lequel

$$M_1^{(0)} = \begin{cases} f(p_2) & \text{si } \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < l < 8, \\ 4 & \text{,, } l = 8 \\ f(p_1) & \text{,, } l > 8 \\ f(p) = \frac{1}{2p}(-1 + \sqrt{1 + 4lp}) \end{cases}$$

$p_2$  est la racine (unique dans l'intervalle  $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$ ) de la fonction

$$A_2(p) = -\frac{1 - 4p + \sqrt{1 + 4lp}}{2p(2 + l - 4p)} \sqrt{(-1 + 4p)(1 + 4lp)} + 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

$p_1$  est la racine (unique dans l'intervalle  $\left[0, \frac{1}{4}\right)$ ) de la fonction

$$A_1(p) = \frac{1 - 4p + \sqrt{1 + 4lp}}{2p(2 + l - 4p)} \sqrt{(1 - 4p)(1 + 4lp)} - 2 \log \frac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2\sqrt{p}}$$

$$A_1(M_1^{(0)}) = \begin{cases} \Phi(p_2) & \text{si } \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < l < 8 \\ 1 & \text{,, } l = 8 \\ \Phi(p_1) & \text{,, } l > 8 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= \frac{2}{l} \sqrt{1 + 4lp} \frac{1 + \sqrt{1 + 4lp}}{-1 + 4p + \sqrt{1 + 4lp}} = \\ &= \frac{1 + 2(l-1)p + (1-2p)\sqrt{1 + 4lp}}{lp(2 + l - 4p)} \sqrt{1 + 4lp}. \end{aligned}$$

Démonstration. (11) donne en (6)  $F_1(M_1) = l - M_1$ , auquel cas (8) donne

$$(12) \quad A_1(M_1) = \begin{cases} \frac{2}{M_1} B_1\left(\frac{l - M_1}{M_1^2}\right) & \text{si } \frac{l - M_1}{M_1^2} < \frac{1}{4} \\ & (M_1 > 2(\sqrt{1 + l} - 1)) \\ \frac{4}{M_1} & \text{si } \frac{l - M_1}{M_1^2} = \frac{1}{4} \\ & (M_1 = 2(\sqrt{1 + l} - 1)) \\ \frac{2}{M_1} B_2\left(\frac{l - M_1}{M_1^2}\right) & \text{si } \frac{l - M_1}{M_1^2} > \frac{1}{4} \\ & (M_1 < 2(\sqrt{1 + l} - 1)). \end{cases}$$



Si donc  $M_1 > 2\sqrt{(1+l)-1}$ , (2) donne

$$A'_1(M_1) = 2 \cdot \frac{2 + M_1}{M_1^3} \cdot \frac{\Phi_1(M_1)}{(1-4p)\sqrt{1-4p}}, \quad p = \frac{l - M_1}{M_1^2}$$

$$\Phi_1(M_1) = \frac{2l - M_1}{M_1(2 + M_1)} \cdot \frac{\sqrt{1-4p}}{p} - 2 \log \frac{1 + \sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}$$

Si l'on y remplace  $M_1$  par son expression donnée par la relation  $p = \frac{l - M_1}{M_1^2}$ :

$$(13) \quad M_1 = f(p) = \frac{1}{2p} (-1 + \sqrt{1+4lp})$$

on a

$$(14) \quad \Phi_1(M_1) = \theta_1(p) = \frac{1-4p + \sqrt{1+4lp}}{2p(2+l-4p)} \sqrt{(1-4p)(1+4lp)} - 2 \log \frac{1 + \sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \Big|_{p=\frac{l-M_1}{M_1^2}}$$

de sorte que

$$(15) \quad A'_1(M_1) = 2 \frac{2 + M_1}{M_1^3} \cdot \frac{\theta_1(p)}{(1-4p)\sqrt{1-4p}} \Big|_{p=\frac{l-M_1}{M_1^2}}$$

Ainsi donc

$$(16) \quad \begin{cases} \theta'_1(p) = \frac{2}{p} \sqrt{\frac{1-4p}{1+4lp}} \cdot \frac{P(p)}{Q(p)} \\ P(p) = -(2+l) - 4l(3+l)p + 4l(1-l)^2 p^2 \\ Q(p) = 2+l - 2(2-3l-l^2)p + 8(1+l+2l^2)p^2 - \\ - [2+l - 2(6+3l+l^2)p + 8(1-l)p^2] \sqrt{1+4lp} \end{cases}$$

On supposera d'abord  $l \neq 1$ .

En ce cas, le polynôme  $P(p)$  a une seule racine positive (évidemment simple)

$$(17) \quad p = p_0 = \frac{2+l}{2[-l(3+l) + (1+l)\sqrt{2l(1+l)}]}$$

Si en (16)  $Q(p) = 0$ , l'identité

$$\begin{aligned} & [2+l - 2(2-3l-l^2)p + 8(1+l+2l^2)p^2]^2 - \\ & - (1+4lp)[2+l - 2(6+3l+l^2)p + 8(1-l)p^2]^2 \equiv \\ & \equiv -4p(2+l-4p)^2 P(p) \end{aligned}$$

indique que si  $Q(p) = 0$ , alors ou bien  $p = \frac{2+l}{4}$  ou bien  $p = p_0$ . Or,

$Q\left(\frac{2+l}{4}\right) = 2(2+l)(1+l)^3 \neq 0$  de sorte que si  $p \neq p_0$ , alors  $Q(p) \neq 0$ .

Or, en tenant compte que  $\sqrt{1+4lp_0} = \frac{1+l + \sqrt{2l(1+l)}}{|1-l|}$ , il s'ensuit que si  $l < 1$ , alors  $Q(p_0) = 0$  et que si  $l > 1$ , alors

$$Q(p_0) = 2 \frac{2+l}{l} \cdot \left(\frac{1+l}{1-l}\right)^2 \cdot \frac{4l(1+l) + (2+l+l^2)\sqrt{2l(1+l)}}{-l(3+l) + (1+l)\sqrt{2l(1+l)}} > 0$$

ce qui, avec les relations  $\lim_{p \rightarrow \infty} Q(p) = \varepsilon \infty$

où  $\varepsilon = \text{sg}(l-1)$  et  $Q(p) = 2(2+l)^2 p + b_2 p^2 + \dots$  pour  $p$  petit, donne

$$(18) \quad \begin{cases} \text{si } l < 1 \text{ alors } \text{sg } Q(p) = \text{sg}(p_0 - p) \\ \text{si } l > 1, \text{ alors } Q(p) > 0. \end{cases}$$

Pour  $l < 1$ , la règle de l'Hôpital donne

$$(19) \quad \lim_{p \rightarrow p_0} \frac{P(p)}{Q(p)} = \frac{P'(p_0)}{Q'(p_0)} = -l(1-l) \frac{[2(1+l)^2 - (3+l)\sqrt{2l(1+l)}] \sqrt{1+4lp_0}}{l(1+l)(4-2l+l^2) + (4+2l-3l^2)\sqrt{2l(1+l)}} < 0$$

ce qui, avec (18), donne

$$(19) \quad \begin{cases} \text{si } l < 1, \text{ alors } \frac{P(p)}{Q(p)} < 0 \\ \text{si } l > 1, \text{ alors } \text{sg } \frac{P(p)}{Q(p)} = \text{sg}(p - p_0). \end{cases}$$

Du fait qu'en (16)  $P\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(-8+l)(1+l)^2$ , il résulte

$$(20) \quad \text{sg}\left(p_0 - \frac{1}{4}\right) = \text{sg}(8-l).$$

(16), (19) et (20) donnent les tableaux 2 et 3.

	$p$	0	$\frac{1}{4}$		$p$	0	$p_1$	$p_0$	$\frac{1}{4}$
		$\infty$	\	0		$\infty$	\	0	\
		Tableau 2 ( $0 < l \leq 8 \quad l \neq 1$ )				Tableau 3 ( $l > 8$ )			

En (12)

$$(21) \quad \frac{dp}{dM_1} = \frac{M_1 - 2l}{M_1^3} < 0$$

ce qui donne le tableau 4, lequel, avec (15) et les tableaux 2 et 3 donne les tableaux 5 et 6

$M_1$	0	$2\sqrt{1+l-1}$	$l$
$p$	$\infty$	$\frac{1}{4}$	0

Tableau 4

$M_1$	$2\sqrt{1+l-1}$	$l$
$A_1(M_1)$	$\frac{2}{\sqrt{1+l-1}}$	$\nearrow \infty$

Tableau 5  
( $0 < l \leq 8, l \neq 1$ )

Or, (14) et le tableau 3 donnent

$M_1$	$2\sqrt{1+l-1}$	$M_1^{\odot}$	$l$
$A_1'(M_1)$	-	0	+
$A_1(M_1)$	$\frac{2}{\sqrt{1+l-1}}$	$\nearrow A_1(M_1^{\odot})$	$\nearrow \infty$

Tableau 6 ( $l > 8$ )

$$(22) \quad 2 \log \frac{1 + \sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}} \Big|_{p=p_1} = \frac{1-4p + \sqrt{1+4lp}}{2p(2+l-4p)} \sqrt{(1-4p)(1+4lp)} \Big|_{p=p_1}$$

auquel cas (2) et (13) donnent au tableau 6

$$A_1(M_1^{\odot}) = \Phi(p_1)$$

$$(23) \quad \Phi(p) = \frac{2}{l} \sqrt{1+4lp} \cdot \frac{1 + \sqrt{1+4lp}}{-1 + 4p + \sqrt{1+4lp}} = \frac{1 + 2(l-1)p + (1-2p)\sqrt{1+4lp}}{lp(2+l-4p)} \sqrt{1+4lp}$$

$p_1$  racine (unique dans l'intervalle  $[0, \frac{1}{4}]$ ), selon le tableau 3) de la fonction  $\theta_1(p)$  de (14).

Si  $l = 1$ , alors en (16)

$$(24) \quad P(p) = -(3+16p), \quad Q(p) = 3+4p+32p^2 + (-3+20p)\sqrt{1+4p}$$

Or, si  $Q(p) = 0$ , alors  $(3+4p+32p^2)^2 - (1+4p)(3-20p)^2 \equiv 4p(3+16p)(3-4p)^2 = 0$ . Or, en (24)  $Q\left(\frac{3}{4}\right) = 48$ .

Par suite

(25) Si  $l = 1$ , alors  $P(p) < 0, Q(p) > 0$  de sorte qu'en

(16)  $\theta_1'(p) < 0$  et  $\theta_1(p) > \theta_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ , donc en (15)  $A_1'(M_1) > 0$ , ce qui donne le tableau 5 qui est donc valable pour tout  $l \in (0, 8]$ . En (14) et (22) le tableau 3 donne

$$2+l-4p > 2+l-4p_0 \geq 2+l-1 = 1+l$$

(26) Si  $m_1 = (2\sqrt{1+l-1})$ , alors en (12)  $A_1(M_1) = \frac{2}{\sqrt{1+l-1}}$

Si enfin  $M_1 < 2\sqrt{1+l-1}$ , (2) donne en (12)

$$A_1'(M_1) = 2 \frac{2+M_1}{M_1^3(4p-1)\sqrt{4p-1}} \Phi_2(M_1)$$

$$\Phi_2(M_1) = \frac{M_1 - 2l}{M_1(2+M_1)} \cdot \frac{\sqrt{4p-1}}{p} + 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \Big|_{p=\frac{l-M_1}{M_1^2}}$$

c'est-à-dire, avec l'expression (13) de  $M_1$ :

$$(27) \quad \Phi_2(M_1) = \theta_2(p) = -\frac{1-4p + \sqrt{1+4lp}}{2p(2+l-4p)} - \sqrt{(-1+4p)(1+4lp)} + 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}} \left( p = \frac{l-M_1}{M_1^2} \right)$$

de sorte que

$$(28) \quad A_1'(M_1) = 2 \frac{2+M_1}{M_1^3(4p-1)\sqrt{4p-1}} \theta_2(p) \Big|_{p=\frac{l-M_1}{M_1^2}}$$

Par conséquent

$$(29) \quad \theta_2^{\frac{1}{2}}(p) = -\frac{2}{p} \sqrt{\frac{4p-1}{1+4lp}} \cdot \frac{P(p)}{Q(p)}$$

avec  $P(p)$  et  $Q(p)$  de (16), auquel cas (19) et (20) (qui ont évidemment lieu pour tout  $p$ ) donnent les tableaux 7-10 (où l'on a supposé  $l \neq 1$ ).

$p$	$\frac{1}{4}$	$\infty$	$p_0$	$\infty$
$\theta_2(p)$	0	$\nearrow \pi - 2\sqrt{l}$	+	0
$\theta_2(p_0)$	0	$\nearrow \theta_2(p_0) \searrow \pi - 2\sqrt{l} \geq 0$	-	

Tableau 7 ( $l < 1$ )Tableau 8 ( $1 < l \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ )



$p$	$\frac{1}{4}$	$p_0$	$p_2$	$\infty$
$\theta_2(p)$		+	0	-
$\theta_2(p)$	0	$\nearrow$	$\theta_2(p_0)$	$\searrow$
			0	$\searrow$
				$\pi - 2\sqrt{l} < 0$

$p$	$\frac{1}{4}$	$\infty$
$\theta_2(p)$	0	$\searrow$
		$\pi - 2\sqrt{l}$

Tableau 10 ( $l \geq 8$ )

Tableau 9 ( $(\frac{\pi}{2})^2 < l < 8$ )

(28) et les tableaux 4 et 7 — 10 donnent les tableaux 11 — 13.

$M_1$	0	$2(\sqrt{1+l}-1)$
$A_1 M_1$	$\frac{\pi}{\sqrt{l}}$	$\nearrow \frac{2}{\sqrt{1+l}-1}$

Tableau 11

$$(0 < l \leq (\frac{\pi}{2})^2, l \neq 1)$$

$M_1$	0	$M_1^{(2)}$	$2(\sqrt{1+l}-1)$
$A_1(M_1)$	$\frac{\pi}{\sqrt{l}}$	$\searrow$	$A_1(M_1^{(2)}) \nearrow \frac{2}{\sqrt{1+l}-1}$

Tableau 12

$$((\frac{\pi}{2})^2 < l < 8)$$

$M_1$	0	$2(\sqrt{1+l}-1)$
$A_1(M_1)$	$\frac{\pi}{\sqrt{l}}$	$\searrow \frac{2}{\sqrt{1+l}-1}$

Tableau 13 ( $l \geq 8$ )

Or, (27) et le tableau 9 donnent

$$(30) \quad 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{p_2}} = \frac{1-4p+\sqrt{1+4lp}}{2p(2+l-4p)} \sqrt{(-1+4p)(1+4lp)} \Big|_{p=p_2}$$

auquel cas (2) et (13) donnent au tableau 12

$$(31) \quad A_1(M_1^{(2)}) = \Phi(p_2)$$

avec  $\Phi(p)$  de (23) et  $p_2$  racine (unique dans l'intervalle  $(\frac{1}{4}, \infty)$ , selon le tableau 9) de la fonction  $\theta_2(p)$  de (27).

Nous remarquons qu'en (27) et (30)

$$0 < \lim_{p \rightarrow \frac{2+l}{4}} \frac{1-4p+\sqrt{1+4lp}}{2+l-4p} = \frac{2+l}{2(1+l)} < \infty.$$

Si  $l = 1$ , (25) donne en (29)  $\theta_2(p) > 0$  et  $\theta_2(p) > \theta_2(\frac{1}{4}) = 0$ , donc,

en (28)  $A_1'(M_1) > 0$ , ce qui donne le tableau 11, qui est donc valable pour tout  $l \in (0, (\frac{\pi}{2})^2]$ . Les tableaux 11 et 5 donnent le tableau 14.

Les tableaux 12 et 5 et (31) donnent le tableau 15. Les tableaux 13 et 5 donnent le tableau 16 et les tableaux 13 et 6 et (23) donnent le tableau 17.

$M_1$	0	$l$
$A_1(M_1)$	$\frac{\pi}{\sqrt{l}}$	$\nearrow \infty$

Tableau 14

$$(0 < l \leq (\frac{\pi}{2})^2)$$

$M_1$	0	$M_1^{(2)}$	$l$
$A_1(M_1)$	$\frac{\pi}{\sqrt{l}}$	$\searrow$	$\Phi(p_2) \nearrow \infty$

Tableau 15 ( $(\frac{\pi}{2})^2 < l < 8$ )

$M_1$	0	4	8
$A_1(M_1)$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	$1 \nearrow \infty$

Tableau 16 ( $l = 8$ )

$M_1$	0	$M_1^{(1)}$	$l$
$A_1(M_1)$	$\frac{\pi}{\sqrt{l}}$	$\searrow$	$\Phi(p_1) \nearrow \infty$

Tableau 17 ( $l > 8$ )

D'ailleurs (15), le tableau 3 et (13) donnent au tableau 6,  $M_1^{(1)} = f(p_1)$  et (28), le tableau 9 et (13) donnent au tableau 12,  $M_1^{(2)} = f(p_2)$ . Donc

$$(32) \quad M_1^{(1)} = f(p_1), \quad M_1^{(2)} = f(p_2)$$

Les tableaux 14, 15, 16 et 17, avec (32) démontrent le théorème.

REMARQUE 1. Si  $l = 8$ , les tableaux 2 et 10 montrent qu'on peut supposer formellement dans l'énoncé du Théorème 1,  $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ , auquel cas  $M_1^{(1)} = 4$  et  $\Phi(\frac{1}{4}) = 1$ . Les relations  $M_1^{(1)} = 4$  et  $A_1(M_1^{(1)}) = 1$ , peuvent être donc envisagées formellement comme données pour  $l = 8$

par les relations de l'énoncé du théorème

$$M_1^{(0)} = \begin{cases} f(p_2) & \text{si } l < 8 \\ f(p_1) & \text{si } l > 8, \text{ respectivement} \end{cases}$$

$$A_1(M_1^0) = \begin{cases} \Phi(p_2) & \text{si } l < 8 \text{ où l'on fait } l = 8. \\ \Phi(p_1) & \text{si } l > 8 \end{cases}$$

3. Nous présentons un cas où la manière de variation de  $A_1(M_1)$  et  $A_2(M_2)$  de (8) et (9) est évidente.

THÉORÈME 2. Si en (8) et (10) on a en  $I_1 = [a_1, b_1]$

$$(0 < a_1 < b_1)$$

$$(33) \quad M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1) \geq 0$$

alors quand  $M_1$  croît de  $a_1$  à  $b_1$ ,  $A_1(M_1)$  décroît de manière monotone de  $A_1(a_1)$  à  $A_1(b_1)$ .

2°. Si en (9) et (10) on a en  $I_2 = [a_2, b_2]$  ( $0 < a_2 < b_2$ )

$$(34) \quad F_2'(M_2) \geq 0 \text{ et } F_2(M_2) - 2M_2 F_2'(M_2) \geq 0,$$

alors quand  $M_2$  croît de  $a_2$  à  $b_2$ ,  $A_2(M_2)$  décroît de manière monotone de  $A_2(a_2)$  à  $A_2(b_2)$ .

Démonstration. En (8) et (9)

$$\frac{1}{2} H_1'(M_1) = -\frac{1}{M_1^2} B_s \left( \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} \right) + \frac{1}{M_1^4} (M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1)) B_s' \left( \frac{F_1(M_1)}{M_1^2} \right)$$

$$\frac{1}{2} G_2'(M_2) = -\frac{F_2'(M_2)}{F_2^2(M_2)} B_s \left( \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} \right) + \frac{1}{F_2^4(M_2)} (F_2(M_2) - 2M_2 F_2'(M_2)) B_s' \left( \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} \right)$$

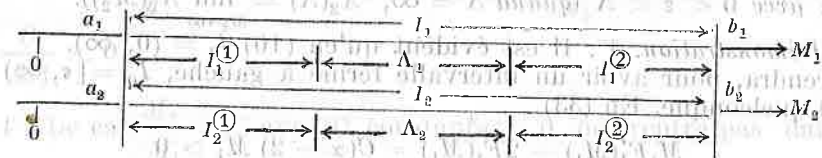
( $s = 1, 2$ ), de sorte que (3) et (33) donnent  $H_1'(M_1) < 0$ .

( $s = 1, 2$ ); si  $F_2'(M_2) = 0$ , alors  $\frac{1}{2} G_2'(M_2) = \frac{1}{F_2^4(M_2)} B_s' \left( \frac{M_2}{F_2^2(M_2)} \right) < 0$

( $s = 1, 2$ ) et si  $F_2(M_2) - 2M_2 F_2'(M_2) = 0$ , alors  $F_2'(M_2) = \frac{F_2(M_2)}{2M_2} > 0$  donc  $G_2'(M_2) < 0$  ( $s = 1, 2$ ). D'autre part, (33) et (34) montrent que  $\frac{F_1(M_1)}{M_1^2}$  et  $\frac{M_2}{F_2^2(M_2)}$  sont des fonctions non décroissantes de  $M_1$ , respective-

ment  $M_2$ , de sorte que si en (10)  $I_1^{(1)}$ ,  $\Lambda_1$ ,  $I_1^{(2)}$  respectivement  $I_2^{(1)}$ ,  $\Lambda_2$ ,  $I_2^{(2)}$  existent, ces ensembles se réduisent à un intervalle (qui peut éventuelle-

ment être un point dans le cas de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ ) et leur disposition mutuelle est



Dans la disposition un ou deux des intervalles  $I_s^{(1)}$ ,  $\Lambda_s$ ,  $I_s^{(2)}$  peuvent faire défaut, à la condition que la somme de ceux qui restent soit  $I_s$  ( $s = 1, 2$ ). Si l'on tient compte qu'en (2)

$$\lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^-} B_1(p) = \lim_{p \rightarrow \frac{1}{4}^+} B_2(p) = 2,$$

il s'ensuit que lorsque  $M_s$  croît de  $a_s$  à  $b_s$ ,  $A_s(M_s)$  décroît de manière monotone de  $A_s(a_s)$  à  $A_s(b_s)$  ( $s = 1, 2$ ), ce qui démontre le théorème.

Nous en présentons quelques cas particuliers dans le

THÉORÈME 3. 1°. Si en (6)  $M_2 = F_1(M_1) = CM_1^\alpha$ , avec  $C > 0$  et  $\alpha > 2$  constantes, alors quand  $M_1$  croît de 0 à  $\infty$ ,  $A_1(M_1)$  décroît de manière monotone de  $\infty$  à 0.

2°. Si en (6)  $M_2 = F_1(M_1) = M_1^2 \left( C + \int_0^{M_1} \frac{\Phi_1(s)}{s^3} ds \right)$ , où  $C > 0$  est une constante et  $\Phi_1(s)$  une fonction donnée, continue et non négative dans l'intervalle  $(0, \infty)$  de  $s$ , et pour laquelle l'intégrale  $\int_0^{M_1} \frac{\Phi_1(s)}{s^3} ds$  a une valeur finie pour  $M_1 > 0$ , alors quand  $M_1$  croît de  $\varepsilon$  à  $\infty$ ,  $A_1(M_1)$  décroît de manière monotone de  $A_1(\varepsilon)$  à  $A_1(\infty) = \lim_{M_1 \rightarrow \infty} A_1(M_1)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

3°. On considère une fonction  $\Phi_2(s)$  donnée et qui remplit les conditions : 1°.  $\Phi_2(s)$  est continue dans l'intervalle  $[0, \infty)$ ,  $\Phi_2(0) = 0$  et  $\Phi_2(s) > 0$  pour  $s > 0$ ; 2°. l'intégrale  $\int_0^{M_2} \frac{\Phi_2(s)}{s \sqrt{s}} ds$  a une valeur finie pour  $M_2 > 0$ ; 3°. il existe un intervalle  $(0, \Lambda]$  ( $\Lambda > 0$ ) dans lequel

$$(35) \quad H(M_2) = C - \frac{\Phi_2(M_2)}{\sqrt{M_2}} - \frac{1}{2} \int_0^{M_2} \frac{\Phi_2(s)}{s \sqrt{s}} ds \geq 0.$$

(Si  $H(M_2) \geq 0$  pour tout  $M_2 > 0$ , alors bien entendu  $\Lambda = \infty$ ). Si en (7)  $M_1 = F_2(M_2) = \sqrt{M_2} \left( C - \frac{1}{2} \int_0^{M_2} \frac{\Phi_2(s)}{s \sqrt{s}} ds \right)$  où  $C > 0$  est une constante et



$\Phi_2(\varepsilon)$  une fonction qui remplit les conditions 1°, 2°, 3°, alors quand  $M_2$  croît de  $\varepsilon$  à  $\Lambda$ ,  $A_2(M_2)$  décroît de manière monotone de  $A_2(\varepsilon)$  à  $A_2(\Lambda)$  pour tout  $\varepsilon$  avec  $0 < \varepsilon < \Lambda$  (quand  $\Lambda = \infty$ ,  $A_2(\Lambda) = \lim_{M_2 \rightarrow \infty} A_2(M_2)$ ).

*Démonstration.* 1°. Il est évident qu'en (10)  $I_1 = (0, \infty)$ . On prendra, pour avoir un intervalle fermé à gauche,  $I_0 = [\varepsilon, \infty)$  avec  $\varepsilon > 0$  quelconque. En (33)

$$M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1) = C(\alpha - 2)M_1^2 > 0$$

ce qui, avec  $\lim_{p \rightarrow \infty} B_2(p) = 0$  en (2) démontre le point 1°.

2°. En ce cas aussi  $I_1 = (0, \infty)$  et l'on prendra  $I_1 = [\varepsilon, \infty)$  ( $\varepsilon > 0$ ). En (33)  $M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1) = \Phi_1(M_1) \geq 0$ , ce qui démontre le point 2°.

3°. (35) donne  $F_2(M_2) > 0$  pour tout  $M_2 > 0$ , donc  $I_2 = (0, \infty)$  et l'on prendra  $I_2 = [\varepsilon, \infty)$ . (35) donne

$$F_2'(M_2) = \frac{H(M_2)}{2\sqrt{M_2}} \geq 0$$

$$F_2(M_2) - 2M_2 F_2'(M_2) = \Phi_2(M_2) \geq 0$$

ce qui démontre le point 3° du théorème.

*Remarque.* 2. 1°. Le cas traité au théorème 1 ne rentre pas dans le Théorème 2, parce que si  $M_2 = F_1(M_1) = l - M_1$ , alors en (33)

$$M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1) = M_1 - 2l < 0$$

et si  $M_1 = F_2(M_2) = l - M_2$ , alors en (34)  $F_2'(M_2) = -1 < 0$ .

2°. Le cas  $M_2 - M_1 = C$  avec  $C$  constante  $\geq 0$  ne rentre pas dans le théorème 2, du fait que si  $M_2 = F_1(M_1) = C + M_1$ , alors en (33)  $M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1) = -(2C + M_1) < 0$  et si  $M_1 = F_2(M_2) = M_2 - C$ , alors en (34)  $F_2'(M_2) - 2M_2 F_2'(M_2) = -(C + M_2) < 0$ . Si  $M_2 - M_1 = C < 0$ , alors  $M_2 = F_1(M_1) = M_1 - C_0$  ( $C_0 = -C > 0$ ) et  $M_1 = F_2(M_2) = C_0 + M_2$ , de sorte qu'en (33)

$$M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1) = 2C_0 - M_1,$$

donc les relations  $M_2 > 0$  et (33) ont lieu si  $C_0 < M_1 \leq 2C_0$ .

En écrivant  $C$  à la place de  $C_0$ , il résulte que si  $M_1 - M_2 = C$  avec (36)  $\begin{cases} C > 0 \text{ constante, quand } M_1 \text{ croît de } C + \varepsilon \text{ à } 2C, A_1(M_1) \text{ décroît} \\ \text{de manière monotone de } A_1(C + \varepsilon) \text{ à } A_1(2C) \text{ pour tous les } \varepsilon \text{ avec} \\ 0 < \varepsilon < C. \end{cases}$

Si l'on utilise le point 2° du théorème 2, il résulte que

(37)  $\begin{cases} \text{si } M_1 - M_2 = C > 0, \text{ alors quand } M_2 \text{ croît de } \varepsilon \text{ à } C, A_2(M_2) \\ \text{décroît de manière monotone de } A_2(\varepsilon) \text{ à } A_2(C) \text{ pour tous les } \varepsilon \text{ avec} \\ 0 < \varepsilon < C. \end{cases}$

3°. Le cas  $M_1 M_2 = C$  avec  $C$  constante  $> 0$  ne rentre pas dans le théorème 2, du fait que si  $M_2 = F_1(M_1) = \frac{C}{M_1}$ , alors en (33)  $M_1 F_1'(M_1) -$

$$- 2F_1(M_1) = -\frac{3C}{M_1} < 0 \text{ et si } M_1 = F_2(M_2) = \frac{C}{M_2}, \text{ alors en (34) } F_2'(M_2) = -\frac{C}{M_2^2} < 0.$$

4°. Le cas  $\frac{M_2}{M_1} = C$  avec  $C$  constante  $> 0$  ne rentre pas dans le théorème 2 parce que si  $M_2 = F_1(M_1) = CM_1$ , alors en (33)  $M_1 F_1'(M_1) - 2F_1(M_1) = -CM_1 < 0$  et si  $M_1 = F_2(M_2) = \frac{M_2}{C}$ , alors en (34)  $F_2'(M_2) - 2M_2 F_2'(M_2) = -\frac{M}{C} < 0$ .

4. On traitera, pour conclure, deux cas mentionnés dans la remarque 2.

THÉORÈME 4. Si  $M_1 = M_2$ , alors quand  $M_1$  croît de 0 à  $\infty$ ,  $A_1(M_1)$  décroît de manière monotone de  $\infty$  à 0.

*Démonstration.* Si  $M_1 = M_2$ , (8) donne

$$(38) \quad A_1(M_1) = \begin{cases} H_1(M_1) = \frac{2}{M_1} B_1\left(\frac{1}{M_1}\right) & \text{si } M_1 > 4 \\ 1 & \text{,, } M_1 = 4 \\ H_2(M_1) = \frac{2}{M_1} B_2\left(\frac{1}{M_1}\right) & \text{,, } M_1 < 4. \end{cases}$$

Or, (2) donne  $\frac{d}{dp} (p B_1(p)) = \frac{1 - 2p}{(1 - 4p)\sqrt{1 - 4p}} C_1(p)$  avec  $C_1(p) = -\frac{\sqrt{1 - 4p}}{1 - 2p} + 2 \log \frac{1 + \sqrt{1 - 4p}}{2\sqrt{p}}$ , de sorte que  $C_1'(p) = -\frac{\sqrt{1 - 4p}}{p(1 - 2p)^2} < 0$  et  $C_1(p) > C_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ , donc  $\frac{d}{dp} (p B_1(p)) > 0$  et  $H_2'(M_1) < 0$ . (2) donne également

$$(39) \quad \frac{d}{dp} (p B_2(p)) = \frac{2p - 1}{(4p - 1)\sqrt{4p - 1}} C_2(p)$$

avec  $C_2(p) = \frac{\sqrt{4p - 1}}{2p - 1} + 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}}$ , de sorte que  $C_2'(p) = -\frac{\sqrt{4p - 1}}{p(2p - 1)^2} < 0$ , ce qui donne le tableau 18, selon lequel si  $p \neq \frac{1}{2}$ ,  $\text{sg } C_2(p) = \text{sg} \left(p - \frac{1}{2}\right)$ , donc en (39)  $\frac{d}{dp} (p B_2(p)) > 0$  pour tout  $p > \frac{1}{4}$ , par suite  $H_2'(M_1) < 0$ . On a donc le tableau 19 lequel



avec (38) démontre le théorème.

$p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\infty$
$C_2(p)$	$0 \searrow \mp \infty \searrow \pi$		

Tableau 18

$M_1$	$0$	$4$	$\infty$
$H_2(M_1)$	$\infty \searrow 1$		
$H_1(M_1)$	$1 \searrow 0$		

Tableau 19

**THÉORÈME 5.** Si  $M_1 M_2 = l$  où  $l$  est une constante, alors quand  $M_2$  croît de 0 à  $\infty$ ,  $A_2(M_2)$  varie selon le tableau 20.

$M_2$	$0$	$\sqrt[3]{\frac{l^2}{4}}$	$\infty$
$A_2(M_2)$	$0 \nearrow 2 \sqrt[3]{\frac{2}{l}} \searrow 0$		

Tableau 20

*Démonstration.* Si en (7)  $F_2(M_2) = \frac{l}{M_2}$ , alors en (9)

$$A_2 M_2 = \begin{cases} G_1(M_2) = \frac{2}{l} M_2 B_1\left(\frac{M_2^3}{l^2}\right) & \text{si } M_2 < \sqrt[3]{\frac{l^2}{4}} \\ 2 \sqrt[3]{\frac{2}{l}} & \text{si } M_2 = \sqrt[3]{\frac{l^2}{4}} \\ G_2(M_2) = \frac{2}{l} M_2 B_2\left(\frac{M_2^3}{l^2}\right) & \text{si } M_2 > \sqrt[3]{\frac{l^2}{4}} \end{cases}$$

Par suite  $G'_1(M_2) = \frac{2}{l} \cdot \frac{1+2p}{(1-4p)\sqrt{1-4p}} \cdot D_1(p)$ , où  $p = \frac{M_2^3}{l^2} < \frac{1}{4}$

et  $D_1(p) = -3 \frac{\sqrt{1-4p}}{1+2p} + 2 \log \frac{1+\sqrt{1-4p}}{2\sqrt{p}}$ . Donc  $D'_1(p) = -\frac{1-4p}{p(1+2p)^2} \sqrt{1-4p} < 0$  et  $D_1(p) > D_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ , ce qui donne  $G'_1(M_2) > 0$  et le tableau 21.

$G'_2(M_2) = \frac{2}{l} \frac{1+2p}{(4p-1)\sqrt{4p-1}} D_2(p)$ , où  $p = \frac{M_2^3}{l^2} > \frac{1}{4}$  et

$$D_2(p) = 3 \frac{\sqrt{4p-1}}{1+2p} - 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

Donc  $D'_2(p) = -\frac{(4p-1)\sqrt{4p-1}}{p(1+2p)^2} < 0$  et  $D_2(p) < D_2\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ , ce qui donne  $G'_2(M_2) < 0$  et le tableau 22.

$M_2$	$0$	$\sqrt[3]{\frac{l^2}{4}}$	$\infty$
$G_2(M_2)$	$0 \nearrow 2 \sqrt[3]{\frac{2}{l}} \searrow 0$		

Tableau 21

$M$	$\sqrt[3]{\frac{l^2}{4}}$	$\infty$
$G_2(M_2)$	$2 \sqrt[3]{\frac{2}{l}} \searrow 0$	

Tableau 22

Les tableaux 21 et 22 donnent le tableau 20, ce qui démontre le théorème.

*Remarque 3.* Si en (1)  $p_1(x)$  et  $p_2(x)$  sont continues et non identiquement nulles pour tout  $x \geq 0 (L = \infty)$ , alors dans la proposition 1  $A_0(M_1, M_2) = A(M_1, M_2)$  et les théorèmes 1 — 5 indiquent la manière dont varie la longueur de l'intervalle d'interpolation donné  $(0, A(M_1, M_2))$  pour la classe  $\Gamma(M_1, M_2)$ .

*Remarque 4.* Au tableau 20 (théorème 5), alors que  $l$  croît de 0 à  $\infty$  la valeur  $\sqrt[3]{\frac{l^2}{4}}$  de  $M_2$  pour laquelle le fonction  $A_2(M_2) = A(M_1, M_2)$  de la proposition 1 est maximum croît de manière monotone de 0 à  $\infty$ , et la valeur maximale  $2 \sqrt[3]{\frac{2}{l}}$  de la fonction décroît de manière monotone de  $\infty$  à 0.

L'affirmation parallèle pour le théorème 1 est donnée par la

**PROPOSITION 2.** Au tableau 1 (théorème 1) alors que  $l$  croît de  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$  à  $\infty$ , la valeur  $M_1^{(0)}$  de  $M_1$  pour lequel la fonction  $A_1(M_1) = A(M_1, M_2)$  de la proposition 1 est minimum croît de manière monotone de 0 à  $\infty$  et la valeur minimum  $A_1(M_1^{(0)})$  de la fonction décroît de manière monotone de 2 à 0.

*Démonstration.* Dans l'énoncé du théorème 1 on considérera  $p_2$  et  $p_1$  comme des fonctions de  $l$ , et  $f(p)$ ,  $\theta_2(p)$ ,  $\theta_1(p)$  et  $\Phi(p)$  comme des fonctions de  $l$  et de  $p$  ( $l$  et  $p$  variables indépendantes). On écrira donc

$$(40) \quad \begin{cases} p_2 = p_2(l), p_1 = p_1(l), f(p) = f(l, p) \\ \theta_2(p) = \theta_2(l, p), \theta_1(p) = \theta_1(l, p) \\ \Phi(p) = \Phi(l, p) \end{cases}$$





Or, selon (48)

$$(50) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} l[-1 + 4p_1(l) + \sqrt{1 + 4lp_1(l)}] = \lim_{l \rightarrow \infty} l[-1 + \sqrt{1 + 4lp_1(l)}] = 4 \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{l^2 p_1(l)}{1 + \sqrt{1 + 4lp_1(l)}} = 2 \lim_{l \rightarrow \infty} l^2 p_1(l).$$

Si l'on désigne à nouveau par  $K_0$  un nombre positif quelconque, alors (14) donne dans la notation (40)

$$\theta_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, K_0 \varepsilon^2\right) = \frac{1 - 4K_0 \varepsilon^2 + \sqrt{1 + 4K_0 \varepsilon}}{2K_0 \varepsilon(1 + 2\varepsilon - 4K_0 \varepsilon^3)} \sqrt{(1 + 4K_0 \varepsilon)(1 - 4K_0 \varepsilon^2)} - 2 \log \frac{1 + \sqrt{1 - 4K_0 \varepsilon^2}}{2\sqrt{K_0 \varepsilon}},$$

de sorte que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta_1\left(\frac{1}{\varepsilon}, K_0 \varepsilon^2\right) = \infty$ , auquel cas le tableau 3 dit que dans la

notation (40) et pour  $\varepsilon > 0$  assez petit,  $p_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) > K_0 \varepsilon^2$ , c'est-à-dire pour

$l = \frac{1}{\varepsilon}$  assez grand  $l^2 p_1(l) > K_0$ . Du fait que  $K_0$  a été choisi à volonté, il résulte

$$(51) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} l^2 p_1(l) = \infty, \text{ donc en (50)} \\ \lim_{l \rightarrow \infty} l[-1 + 4p_1(l) + \sqrt{1 + 4lp_1(l)}] = \infty.$$

et en (49)

$$(52) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} A_1(M_1^{(0)}) = 0.$$

Les relations (43), (45), (47), (52) et  $A_1(M_1^{(0)})/l \rightarrow 1$  (théorème 1) donnent le tableau 23. Si, dans la notation (40) de  $f(l, p)$  on considère  $p$  comme une fonction à dérivée continue de  $l$ , donc  $p = p(l)$ , alors (13) donne

$l$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$	8	$\infty$
$A_1(M_1^{(0)})$	2	1	0

Tableau 23

$$(53) \quad \frac{d}{dl} f(l, p(l)) = \frac{1 + 2lp(l) + \sqrt{1 + 4lp(l)} - 2l^2 p'(l)}{[1 + 2lp(l) + \sqrt{1 + 4lp(l)}]\sqrt{1 + 4lp(l)}}$$

On supposera d'abord  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < l < 8$ . En ce cas (53) donne avec  $p(l) = p_2(l)$  et  $p'(l) = p_2'(l)$  de (41)

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dl} f'(l, p_2(l)) &= \frac{2(2+l-4p(l))}{1+2lp(l)+\sqrt{1+4lp(l)}} \cdot \frac{Q_2(p(l))}{Q_0(p(l))} \Big|_{p(l)=p_2(l)} = \\ &= - \frac{1}{1+2lp(l)+\sqrt{1+4lp(l)}} \cdot \frac{Q_3(p(l))}{P(p(l))} \Big|_{p(l)=p_2(l)} \\ Q_2(p) &= 1 - 2(1-l)p - 2l(1+l)p^2 + \\ &\quad + (1-2p+2lp^2)\sqrt{1+4lp}. \\ Q_0(p) &\text{ de (43); } Q_3(p) = A_3(p) + B_3(p)\sqrt{1+4lp}. \\ A_3(p) &= 2+l+l+l(12+5l)p - 2l(2-l+l^2)p^2 \\ &\quad + 8l^2(1-l)p^3. \\ B_3(p) &= 2+l+l(8+3l)p - 2l(2+l+l^2)p^2 \\ &\quad P(p) \text{ de (16)} \end{aligned} \right.$$

Si  $Q_3(p) = 0$ , alors  $A_3^2(p) - (1+4lp) B_3^2(p) \equiv 4l^2 p^2 (2-lp) \times (2+l-4p) P(p) = 0$ , de sorte que les racines éventuelles de  $Q_3(p)$  se trouvent parmi les nombres  $0, \frac{2}{l}, \frac{2+l}{4}$  et  $p_0(l)$  de (17). Or,  $Q_3(0) = 2(2+l) > 0$ ,  $Q_3\left(\frac{2+l}{4}\right) = \frac{1}{4}(2-l)(1+l)^2(2+l)^3 < 0$  (vu qu'au tableau 1,

$l > \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 > 2$ ). Par suite

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{les racines possibles de } Q_3(p) &\text{ se trouvent parmi les nombres } \frac{2}{l} \\ \text{et } p_0(l). \end{aligned} \right.$$

Or, (27) donne dans la notation (40)  $\theta_2\left(l, \frac{2}{l}\right) = A_4(l) = -3 \frac{\sqrt{l(8-l)}}{4+l} + 2 \arccos \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{2}}$ , de sorte que  $A_4'(l) = -\left(\frac{8-l}{4+l}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{l(8-l)}} < 0$ , donc pour  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < l < 8$ ,  $A_4(l) > A_4(8) = 0$ , donc  $\theta_2\left(l, \frac{2}{l}\right) > 0$  et

$$(56) \quad p_2(l) \neq \frac{2}{l}.$$

Le tableau 9 atteste que  $p_2(l) > p_0(l)$ , ce qui avec (56) et (55) dit qu'en (54)  $Q_3(p_2(l)) \neq 0$ , donc  $Q_3(p_2(l))$  garde un signe constant pour

$l \in \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2, 8 \right)$ . Or, (46) donne en (54)  $\lim_{l \rightarrow \left( \frac{\pi}{2} \right)^2_+} Q_3(p_2(l)) = -\infty$ , donc  $Q_3(p_2(l)) < 0$ . D'autre part (16) et le tableau 9 donnent  $P(p_2(l)) > 0$  de sorte qu'en (54)

$$(57) \quad \frac{d}{dl} f(l, p_2(l)) > 0 \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 < l < 8 \right)$$

On supposera à présent  $l > 8$ . Les relations (53) et (44) disent que l'expression de  $\frac{d}{dl} f(l, p_1(l))$  s'obtient en remplaçant en (54)  $p_2(l)$  par  $p_1(l)$ , donc

$$(58) \quad \frac{d}{dl} f(l, p_1(l)) = - \frac{1}{1 + 2lp(l) + \sqrt{1 + 4lp(l)}} \cdot \frac{Q_3(p(l))}{P(p(l))} \Big|_{p(l)=p_1(l)}$$

Or, (14) donne dans la notation (40)  $\theta_1 \left( l, \frac{2}{l} \right) = A_5(l) = \frac{3}{4+l} \sqrt{l(l-8)} - 2 \log \frac{\sqrt{l} + \sqrt{l-8}}{2\sqrt{2}}$ , de sorte que  $A_5'(l) = - \frac{(l-8)^2}{(4+l)^2} \frac{1}{\sqrt{l(l-8)}} < 0$ , donc pour  $l > 8$ ,  $A_5(l) < A_5(8) = 0$ , et  $\theta_1 \left( l, \frac{2}{l} \right) < 0$  de sorte que

$$(59) \quad p_1(l) \neq \frac{2}{l}$$

Le tableau 3 dit que  $p_1(l) < p_0(l)$  ce qui avec (59) et (55) atteste qu'en (58)  $Q_3(p_1(l)) \neq 0$ , donc  $Q_3(p_1(l))$  garde un signe constant pour  $l > 8$ . Or, (48) donne en (54) (où l'on remplace  $p_2(l)$  par  $p_1(l)$ )  $\lim_{l \rightarrow \infty} Q_3(p_1(l)) = \infty$ , ainsi qu'il résulte immédiatement en écrivant  $Q_3(p_1(l))$  sous la forme

$$Q_3(p_1(l)) = 2 + l + l^2 p(5 - 2lp) + 12lp - 4lp^2 + 2(lp)^2 + 8p(lp)^2 - 8(lp)^3 + [2 + l + l^2 p(3 - 2lp) + 8lp - 4lp^2 - 2(lp)^2] \sqrt{1 + 4lp} \Big|_{p=p_1(l)}$$

et en tenant compte de (48) et (51) — donc  $Q_3(p_1(l)) > 0$ . D'autre part (16) et le tableau 3 donnent  $P(p_1(l)) < 0$ , de sorte qu'en (58)

$$(60) \quad \frac{d}{dl} f(l, p_1(l)) > 0 \quad (l > 8).$$

Les relations (13), (46) et (48) donnent, dans la notation (40)  $\lim_{l \rightarrow \left( \frac{\pi}{2} \right)^2_+} f(l, p_2(l)) = 0$ , respectivement  $\lim_{l \rightarrow \infty} f(l, p_1(l)) = \infty$  ce qui, avec (57) et (60) donne — dans la notation de l'énoncé du théorème 1 — le tableau 24 lequel avec le tableau 23 démontre la proposition.

$l$	$\left( \frac{\pi}{2} \right)^2$	8	$\infty$
$M_1^{(0)}$	0	↗ 4	↗ $\infty$

Tableau 24

Remarque 5. En (14)  $2 + l - 4p > 2 + l - 1 > 0$  et en (27)

$$\theta_2(l, p) = - \frac{2\sqrt{(-1+4p)(1+4p)}}{-1+4p+\sqrt{1+4p}} + 2 \arccos \frac{1}{2\sqrt{p}},$$

de sorte que — dans

la notation (40) —  $\frac{\partial}{\partial l} \theta_1(lp)$  et  $\frac{\partial}{\partial l} \theta_2(l, p)$  sont des fonctions continues de

$l$ . Les tableaux 9 et 3 donnent, ainsi qu'on l'a remarqué,  $p_2(l) > p_0(l)$

et  $p_1(l) < p_0(l)$ , auquel cas (19) donne  $\frac{P(p_2(l))}{Q(p_2(l))} > 0$  et  $\frac{P(p_1(l))}{Q(p_1(l))} < 0$ . Ainsi

donc, en (29) et (16),  $\frac{\partial}{\partial p} \theta_2(l, p) \Big|_{p=p_2(l)} < 0$  pour  $l \in \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^2, 8 \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial p} \theta_1(l, p) \Big|_{p=p_1(l)} < 0$

pour  $l > 8$ . Les fonctions  $p_1(l)$  et  $p_2(l)$  de l'énoncé du théorème 1 ont donc — ainsi qu'on l'a supposé en (42) et (53) — des dérivées continues dans les intervalles de définition respectifs de la variable.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ripceanu, D., Sur les racines des solutions de l'équation  $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ . Mathematica — Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation. Mathematica. 19 (42), 1, 95–111 (1977).

Reçu le 10.VII.1982

Universitatea din Cluj-Napoca  
Facultatea de matematică  
3400 Cluj-Napoca, ROMÂNIA