MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

**L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION**
**Tome 14, N° 2, 1985, pp. 109—116**

# SULLA CONVERGENZA DI ALCUNE FORMULE DI QUADRATURA PER IL CALCOLO DI INTEGRALI A VALOR PRINCIPALE SECONDO CAUCHY

GIULIANA CRISCUOLO e GIUSEPPE MASTROIANNI
(Napoli)

**Sommario.** Si studia la convergenza di alcune formule di quadratura per il calcolo di integrali singolari a valor principale secondo Cauchy, ottenendo risultati che migliorano quelli in precedenza stabiliti.

**Abstract.** In this paper the convergence of some quadrature rules for Cauchy principal value integrals is studied. Improvements of some previous statements on the subject of convergence of such quadratures are also included.

**1. Introduzione.** Indichiamo con $\Phi(f;t)$ l'integrale a valor principale secondo Cauchy della funzione $f$ definito dalla relazione:

$$\Phi(f;t)=(\Phi f)(t)=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{x-t}\,w(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\int_{-1}^{t-\varepsilon}+\int_{t+\varepsilon}^{1}\right\}\frac{f(x)}{x-t}\,w(x)\mathrm{d}x,\ |t|<1 \tag{1.1}$$

ove $w$ é una opportuna funzione peso non negativa.

Per il calcolo numerico dell'integrale (1.1) la maggior parte dei procedimenti proposti nella letteratura sull'argomento (cfr [1, 5, 6, 9, 10, 11 12]), consistono essenzialmente nel sostituire alla funzione $f$ una sua approssimazione $T_m f$, con $T_m$ operatore lineare, supponendo naturalmente l'esistenza dello integrale $\Phi(T_m f;t)$.

Più precisamente, indicato con $r_m f$ il termine residuo definito da:

$$f=T_m f+r_m f$$

si considera la formula:

$$\Phi(f;t)=\Phi_m(f;t)+E_m(f;t) \tag{1.2}$$

ove:

$$\Phi_m(f;t)=\Phi(T_m f;t)$$
$$E_m(f;t)=\Phi(r_m f;t).$$

In questo lavoro tratteremo qualche problema di convergenza relativo alla formula (1.2).

Su questo argomento alcuni risultati sono stati stabiliti da Elliot and Paget [3, 4] e Tsamasphyros and Theocaris [15, 16]; questi autori, in particolare Elliot and Paget, hanno studiato la convergenza della formula (1.2) nel caso in cui $f$ sia hölderiana, il peso $w$ sia un peso di Jacobi e $T_m f$ sia un polinomio interpolante di Lagrange sugli zeri dei polinomi di Jacobi.

G. Mastroianni e M. R. Occorsio in [9, 10] hanno dimostrato alcuni teoremi di convergenza supponendo che $T_m f$ sia l'm-mo polinomio di Bernstein relativo alla funzione $f$ o opportuni trasformati di questo, con peso $w(x) \equiv 1$ ed $f$ verificante una condizione di Dini-Lipschitz.

In questo lavoro proporremo en semplice approccio per lo studio della convergenza di formule del tipo (1.2) che puó essere applicato qualsiasi sia l'approssimazione $T_m f$ scelta e dimostreremo, inoltre, un teorema di natura molto generale. Di quest'ultimo faremo qualche applicazione ritrovando risultati già noti [9, 10] e migliorandone altri in precedenza stabiliti in [3, 11, 15, 16].

In un lavoro in preparazione tratteremo la convergenza delle formule di tipo gaussiano per il calcolo dell'integrale (1.1).

**2. Un teorema generale di convergenza.** Sia $I = [-1,1]$, $C^0(I)$ l'insieme delle funzioni continue in $I$, $\|f\| = \max_I f(x)$ ed $\omega(f;\cdot)$ il modulo di continuità della funzione $f$.

Mediante il modulo di continuità $\omega(f;\ \cdot)$, possiamo definire le seguenti classi di funzioni:

$$\mathrm{Lip}_M\lambda = \{f \in C^0(I) : \omega(f;\ \delta) \leqslant M\ \delta^\lambda, 0 < \lambda \leqslant 1, M \in R^+\}$$

$$\mathrm{LD}(\lambda) = \{f \in C^0(I) : \omega(f;\ \delta) \log^\lambda\ \delta^{-1} = O(1)\ (\delta \to 0^+, \lambda > 0)$$

$$\mathrm{TD} = \left\{f \in C^0(I) : \int_0^1 t^{-1}\,\omega\,(f;\,t)\,dt < \infty\right\}$$

Osserviamo preliminarmente che, essendo:

$$\omega(f;\ \delta)\ \log\ \delta^{-1} \leqslant 2 \int_\delta^{\sqrt{\delta}} \frac{\omega(f;\ t)}{t}\,dt,\ 0 < \delta < 1$$

si ha:

$$\text{(2.1)} \qquad \mathrm{TD} \subset \mathrm{LD}\ (1)$$

Inoltre, per ogni funzione $f \in \mathrm{LD}\ (1 + \lambda)$, con $\lambda > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che:

$$\int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{\omega(f;\ t)}{t}\,dt < \omega(f;\ \delta_2)\ \log^{1+\lambda}\ \delta_2^{-1}$$

per ogni $\delta_1$ e $\delta_2$, con $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta$.



Segue quindi che è:

$$\text{[2.2]} \qquad \mathrm{LD}(1 + \lambda) \subset \mathrm{TD}\quad \lambda > 0$$

Supporremo, poi sempre, che la funzione peso $w \in \mathrm{Lip}_M\ \lambda$ in $]-1,1[$ e $T_m f \in \mathrm{Lip}_{\alpha_m}\ 1\ (m \in N)$.

Cio posto, essendo:

$$\Phi(f;\ t) = \int_{-1}^{1} \frac{w(x) - w(t)}{x - t}\ f(x)\ d(x) + w(t)\ f(t)\ \log \frac{1 - t}{1 + t} + \\ + w(t) \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}\,dx$$

l'esistenza dell'integrale (1.1) é assicurata se la funzione $f$ appartiene a TD. In tale ipotesi, infatti, l'integrale:

$$\text{(2.3)} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}\,dx$$

converge assolutamente.

Se l'integrale (2.3) converge come un ordinario integrale improprio, imponendo opportune condizioni di monotonia alla funzione $\dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}$, un lemma dimostrato da Rabinowitz in [13] consente di ottenere dei criteri di convergenza per la formula di quadratura (1.2).

Si ottengono risultati più precisi dalla seguente:

Proposizione 2.1 *Se l'integrale* $\Phi(f;\ t)$ *esiste con* $w \in \mathrm{Lip}_M\lambda$, *allora per l'errore in* (1.2) *vale la seguente limitazione:*

$$\text{(2.4)} \qquad |E_m(f;\ t)| \leqslant 4w(t)\ \|r_m f\|\ \log\ \varepsilon_m^{-1} + a(t)\ \|r_m f\| + g_m(t)\ w(t)$$

*ove* $\{\varepsilon_m\}$ *é una opportuna successione positiva decrescente ed infinitesima, ed inoltre si è posto:*

$$a(t) = \left|\log \frac{1 - t}{1 + t}\right| + 2^\lambda\,\mathrm{M}$$

$$g_m(t) = \left| \int_{|x-t| \leqslant \varepsilon_m \sqrt{1-t^2}} \frac{r_m(f;\ x) - r_m(f;\ t)}{x - t}\,dx \right|$$

Infatti, dalla relazione;

$$E_m(f;\ t) = \int_{-1}^{1} r_m(f;\ x)\ \frac{w(x) - w(t)}{x - t}\,dx + w(t) \int_{-1}^{1} \frac{r_m(f;\ x) - r_m(f;\ t)}{x - t}\,dx + \\ + w(t)\ \log \frac{1 - t}{1 + t}\ r_m(f;\ t)$$

segue :

$$
(2.5)\quad
\begin{aligned}
|E_m(f;t)| \leqslant 2^\lambda M \|r_m f\| + 2w(t)\|r_m f\| \log \frac{1-t^2}{\delta^2} + \\
+ w(t) \left| \int_{|x-t|\leqslant\delta} \frac{r_m(f;x)-r_m(f;t)}{x-t}\,dx \right| + \|r_m f\|\, w(t) \left| \log \frac{1-t}{1+t} \right|
\end{aligned}
$$

per ogni $\delta$ positivo e minore di min $\{1-t,\ 1+t\}$.

Se nella (2.5) si pone allora $\delta = \varepsilon_m \sqrt{1-t^2} < \min\{1-t,\ 1+t\}$ con $\{\varepsilon_m\}$ opportuna successione positiva, monotona ed infinitesima, si ottiene la (2.4).

Osserviamo ora che, per essere $T_m f \in \mathrm{Lip}_{\alpha_m} 1$ $(m \in N)$, l'esistenza dell'integrale $\Phi(f;t)$ implica che esiste una successione $\{\varepsilon_m\}$ per cui :

$$
(2.6)\qquad \lim_{m\to\infty} g_m(t) = 0\,, \quad |t| < 1
$$

Quindi si ottiene come immediata conseguenza della proposizione 2.1 il seguente :

TEOREMA 2.2 *Se l'integrale* $\Phi(f;t)$ *esiste con* $w \in \mathrm{Lip}_M \lambda$, $T_m f \in \mathrm{Lip}_{\alpha_m} 1$ $(m \in N)$ *e se risulta verificata la relazione* :

$$
(2.7)\qquad \lim_{m\to\infty} \|r_m f\| \log \varepsilon_m^{-1} = 0\,, \quad |t| < 1
$$

*per qualche successione* $\{\varepsilon_m\}$ *verificante la (2.6), allora l'approssimazione* $\Phi_m(f;t)$ *converge a* $\Phi(f;t)$ *per* $|t| < 1$.

Come primo esempio, supponiamo che l'approssimazione $T_m f$ sia l'm-mo polinomio di Bernstein $B_m f$ relativo alla funzione $f$ e sia quindi :

$$
\Phi_m(f;t) = \Phi(B_m f;t)
$$

In tal caso è :

$$
\|r_m f\| \leqslant K\,\omega(f;1/\sqrt{m})
$$

ove $K$ è la costante di Sikkema [14].

Poichè, inoltre è semplice verificare che la successione : $\varepsilon_m = m^{-1}$ soddisfa le (2.6) e (2.7), dal teorema 2.2 segue il

COROLLARIO 2.3. *Se esiste l'integrale (1.1) e se* $f \in \mathrm{LD}$ (1), *vale la relazione di limite* :

$$
(2.8)\qquad \lim_{m\to\infty} |E_m(f;t)| = 0, \quad |t| < 1
$$

*indipendentemente dalla funzione peso* $w \in \mathrm{Lip}_M \lambda$.

Per le (2.1) e (2.2), la relazione di limite (2.8) ovviamente continua a sussistere se $f \in \mathrm{TD}$ o se $f \in \mathrm{LD}\ (1+\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

In particolare se $f$ verifica quest'ultima condizione, risultando :

$$
g_m(t) = o\,(\log^{-\lambda} m) \quad (m \to \infty)
$$



per la (2.4) si ha :

$$
(2.9)\qquad E_m(f;t) = o\,(\log^{-\lambda} m) \quad (m \to \infty)
$$

che ci dà l'ordine di infinitesimo dell' errore.

Le (2.8) e (2.9) sono state ottenute direttamente in [9].

Supponiamo ora che sia $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ e che l'approssimazione $T_m f$ sia :

$$
(H_m f)(x) = \sum_{1}^{m}{}_i\, h_i(x) f(x_i)
$$

ove $x_i = \cos \dfrac{2i-1}{2m}\pi$ e le $h_i(x)$ $(i = \overline{1,m})$ sono le funzioni fondamentali di prima specie dell'interpolazione di Hermite.

Sia, quindi :

$$
\Phi_m(f;t) = \Phi(H_m f;t)
$$

Si dimostra, con facili calcoli, che :

$$
\Phi_m(f;t) = \pi \left\{ \frac{U_{m-1}(t)}{T_m(t)} H_m(t) + \frac{1}{m^3} \sum_{1}^{m}{}_i \frac{A_i^m}{x_i - t} f(x_i) \right\}
$$

ove :

$$
A_i^{(m)} = (1-x_i^2)\,[T_m'(x_i)]^2
$$

con $T_m(x)$ ed $U_m(x)$ polinomi di Chebyshef di prima e seconda specie rispettivamente.

In tal caso se $f \in C^0(I)$, risulta [8] :

$$
(r_m f)(x) \leqslant 2\omega\left(f;\ \frac{\log m}{m}\, T_m(x)\sqrt{1-x^2}\right)
$$

Poichè inoltre è facile verificare che la successione $\varepsilon_m = m^{-1}$ soddisfa le (2.6) e (2.7), dal teorema 2.2 segue il

COROLLARIO 2.4. *Se esiste l'integrale (1.1) e se* $f \in \mathrm{LD}$ (1), *per l'errore* $E_m(f;t) = \Phi(f;t) - \Phi(H_m f;t)$, *vale la relazione di limite* :

$$
(2.10)\qquad \lim_{m\to 8} |E_m(f;t)| = 0, \quad |t| < 1.
$$

**3. Convergenza delle formule di tipo interpolatorio.** Assegnato un sistema di nodi $x_i$ con $x_i \neq t$ $(i = \overline{1,m})$, consideriamo come approssimante $T_m f$ il polinomio interpolante di Lagrange $L_m f$ relativo alla funzione $f$ su detti nodi.

Indicate con $l_{m,i}(x)$ $(i = \overline{1,m})$ le funzioni fondamentali di Lagrange, siano :

$$
\lambda_m = \max_I \sum_{1}^{m}{}_i\, |l_{m,i}(x)|
$$

le costanti di Lebesgue relative ai nodi $x_i$.

Nel caso particolare in cui ci siamo posti, indicato con $E_m^{(1)}(f;t)$ l'errore della formula (1.2), una conseguenza del teorema 2.1 é data dal seguente:

COROLLARIO 3.1. *Se l'integrale (1.1) esiste con $w \in \mathrm{Lip}_M \lambda$, allora sussiste la seguente limitazione:*

$$|E_m^{(1)}(f;t)| \leqslant \|t_m f\| (1+\lambda_m) \{4w(t) \log \varepsilon_m^{-1} + a(t)\} + 2c\|f\| \lambda_m m^2 \varepsilon_m + \tag{3.1}$$

$$+ 2 \int_0^{\varepsilon_m\sqrt{1-t^2}} \frac{\omega(f;\ u)}{u}\, du$$

*ove c é una costante indipendente da m e da f ed inoltre é:*

$$\|t_m f\| = \|f - P_m\|$$

*essendo $P_m$ l'm-mo polinomio di migliore approssimazione. Infatti, é ben noto che:*

$$\|f - L_m f\| \leqslant \|t_m f\| (1+\lambda_m)$$

D'altra parte si ha:

$$g_m(t) \leqslant \left|\int_{t-\varepsilon_m\sqrt{1-t^2}}^{t+\varepsilon_m\sqrt{1-t^2}} \frac{f(x)-f(t)}{x-t}\, dx\right| + \left|\int_{t-\varepsilon_m\sqrt{1-t^2}}^{t+\varepsilon_m\sqrt{1-t^2}} \frac{(L_m f)(x)-(L_m f)(t)}{x-t}\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^{\varepsilon_m\sqrt{1-t^2}} \frac{\omega(f;\ u)}{u}\, du + 2\,\|(L_m f)'\|\, \varepsilon_m$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Markov, si ha:

$$\|(L_m f)'\| \leqslant c\, m^2 \|L_m f\| \leqslant \|f\|\, \lambda_m\, c\, m^2$$

Sostituendo quest'ultima nella precedente disuguaglianza, dalla (2.4) segue la (3.1).

Un caso di particolare interesse si presenta allorquando il sistema dei nodi $x_i$ é tale che le costanti di Lebesgue verifichino la condizione:

$$\lambda_m = O(\log m) \quad (m \to \infty) \tag{3.2}$$

Tale condizione è peraltro soddisfatta in numerosi casi; ad esempio se i nodi di interpolazione $x_i$ coincidono con gli zeri del polinomio di Jacobi $p_m^{\alpha,\beta}(x)$ con $\max\{\alpha, \beta\} \leqslant -1/2$ [17], oppure quando i nodi $x_i$ sono le pratiche ascisse: $x_i = \cos\left(\frac{i-1}{m-1}\pi\right)$ $i = \overline{1,m}$ [7]; la (3.2) è anche vera quando il sistema dei nodi di interpolazione è ottimale [2].

Sussiste in tal caso il seguente:



TEOREMA 3.2. *Per ogni funzione $f \in$ LD (2), se il sistema dei nodi $x_i$ $(i = \overline{1,m})$ verifica la (3.2), allora risulta:*

$$\lim_{m\to\infty} |E_m^{(1)}(f;\ t)| = 0, \quad |t| < 1 \tag{3.3}$$

*indipendentemente dal peso $w \in \mathrm{Lip}_M \lambda$.*

Infatti, scelto $\varepsilon_m = m^{-3}$, per l'ipotesi sulla funzione $f$ e per la (3.2), la (3.1) diventa:

$$|E_m^{(1)}(f;t| \leqslant \omega(f;m^{-1})(1 + O(\log m))\{12\, w(t) \log m + a(t)\} +$$

$$+ c_1\, m^{-1} O(\log m) + 2\int_0^{m^{-3}\sqrt{1-t^2}} \frac{\omega(f,\ u)}{u}\, du \quad (m \to \infty)$$

da cui:

$$|E_m^{(1)}(f;t)| \leqslant O(\omega(f;m^{-1}) \log^2 m) + o(\log^{-1} m) \quad (m \to \infty)$$

e quindi la tesi.

In [3] e [11] si era dimostrata la (3.3) supponendo la $f$ hölderiana.

Al teorema 3.2 si può dare una forma più generale supponendo $f^{(k)} \in C^0(I)$.

Sussiste, infatti, il seguente:

TEOREMA 3.3. *Se il sistema dei nodi $x_i (i = \overline{1,m})$ verifica la (3.2), allora per ogni funzione f tale che $f^{(k)} \in C^0(I)$ $(0 \leqslant k < m)$, risulta:*

$$|E_m^{(1)}(f;t)| = O\left(\frac{\log^2 m\ \omega(f^{(k)};\ m^{-1})}{m^k}\right) \quad (m \to \infty) \tag{3.4}$$

La (3.4) si ottiene dalla (3.1) osservando che per le ipotesi sulla funzione risulta:

$$\|t_m f\| \leqslant L\, \frac{\omega(f^{(k)};\ m^{-1})}{m^k}$$

con $L$ costante positiva e scegliendo $\varepsilon_m = m^{-(k+3)}$.

Se, in particolare, $f^{(k)} \in \mathrm{Lip}_M \lambda$, la (3.4) diventa:

$$E_m^{(1)}(f;\ t) = O\left(\frac{\log^2 m}{m^{k+\lambda}}\right) \quad (m \to \infty)$$

Quest'ultima precisa l'analoga:

$$|E_m^{(1)}(f;t)| = O\left(\frac{1}{m^{k+\lambda-2\nu}}\right) \quad (m\to\infty)\ \nu < \frac{\lambda}{2}$$

stabilita da G. Monegato in [11] usando un lemma di Kalandiya.

BIBLIOGRAFIA

[1] Chawla M. M., Ramakrishnan T. R.: *Modified Gauss-Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation of Cauchy type singular integrals.* BIT **14**, 12—21 (1974).
[2] Dzjadyk, V. K., Ivanov, V. V.: *On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points.* Analysis Mathematica **9**, 85—97 (1983).
[3] Elliott D., Paget D. F.: *On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals.* Numer. Math. **23**, 311—319 (1975).
[4] Elliott D., Paget D. F.: *On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals: An addendum.* Numer. Math. **25**, 287—289 (1976).
[5] Hunter D. B.: *Some Gauss-type formulae for the evaluation of Chauchy principal values of integrals.* Numer. Math. **19**, 419—424 (1972).
[6] Ioakimidis N. I.: *A direct method for the construction of Gaussian quadrature rules for Cauchy type and finite-part integrals.* L'Analyse Numerique et la Théorie de l'Approximation, **12**, № 2, 131—140 (1983).
[7] Kalandiya A. I.: *On a direct method of solution of an equation in wing theory and its application to the theory of elasticity.* Mat. sb. **42**, 249—272 (1957) (In Russian).
[8] Gonska H. H.: *On approximation by linear operators: improved estimates.* Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, **14**, 1, 1985 (to appear).
[9] Mastroianni G., Occorsio M. R.: *An algorithm for the numerical evaluation of a Cauchy principal value integral.* In: Ricerche di Matematica. Napoli (1984 — to appear).
[10] Mastroianni G., Occorsio M. R.: *On the numerical evaluation of a Cauchy principal value integral* (1984 — to appear).
[11] Monegato G.: *The numerical evaluation of one-dimensional Cauchy principal value integrals.* Computing **29**, 337—354 (1982).
[12] Piessens R.: *Numerical evaluation of Cauchy principal values of integrals.* BIT **10**, 476—480 (1970).
[13] Rabinowitz P.: *Gaussian integration in the presence of a singularity.* SIAM J. Numer. Anal. **4**, 191—201 (1967).
[14] Sikkema P. C.: *Der Wert einiger Kostanten in der Theorie der Approximation mit Bernstein-Polynomen.* Numer. Math. **3**, 107—116 (1961).
[15] Tsamasphyros G., Theocaris P. S.: *On the convergence of a Gauss quadrature rule for evaluation of Cauchy type singular integrals.* BIT **17**, 458—464 (1977).
[16] Tsamasphyros G., Theocaris P. S.: *On the convergence of some quadrature rules for Cauchy principal-value and finite-part integrals.* Computing **31**, 105—114 (1983).
[17] Szegö G.: *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Colloquium Pubblications 23. Providence, R. I. (1975).

Received 15.XI.1984

* *Istituto per applicazioni della matematica*
*CNR Napoli*
** *Dipartimento di matematica e applicazioni*
*Università di Napoli*
*ed Istituto per applicazioni della matematica*
*CNR Napoli*