MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 15, N° 1, 1986, pp. 57—64

UNE PROPRIÉTÉ D'EXTRÉMALITÉ DES VALEURS PROPRES DES OPÉRATEURS POLYNOMIAUX DE DURRMEYER GÉNÉRALISÉS

RADU PĂLTĂNEA
(Braşov)

Les opérateurs polynomiaux de Durrmeyer sont des opérateurs de type Bernstein modifiés pour l'approximation des fonctions intégrables sur l'intervalle $[0, 1]$, $M_n : \mathscr{L}[0, 1] \to \mathscr{P}_n$, où $\mathscr{P}_n$ est l'ensemble des polynômes de degrés maximum n (voir [1], [2], [3]). Ils sont définis comme cela :

$$M_n[f](x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\cdot\int_0^1 p_{nk}(t)\cdot f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1}$$

où $f \in \mathscr{L}[0, 1]$ et $p_{nk}(x) = \binom{n}{k}\cdot x^k(1-x)^{n-k}$, $x \in [0, 1]$.

Parmi d'autres propriétés remarquables de ces opérateurs, on établit dans [3] que les opérateurs admettent la représentation :

$$M_n[f](x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{nm}\left(\int_0^1 P_m(t)\cdot f(t)\,dt\right) P_m(x), \tag{2}$$

où $\lambda_{nm} = n!(n+1)!/((n-m)!(n+m+1)!)$ et P_m sont les polynômes de Legendre. Nous avons généralisé ces opérateurs dans [4] de cette manière :

Définition 1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > -1$, $n \in \mathbb{N}$ *notons par* $M_n^{ab} : \mathscr{L}[0, 1] \to \mathscr{P}_n$ *l'opérateur défini :*

$$M_n^{ab}[f](x) = \sum_{k=0}^{n}\left(B^{-1}(a+k+1, b+n-k+1)\int_0^1 f(t)\times\right.$$

$$\left.\times t^{a+k}(1-t)^{b+n-k}dt\right) p_{nk}(x), \quad x \in [0,1], \tag{3}$$

où B *est la fonction bêta de Euler.*

Remarque 1. Pour $a = 0 = b$ on obtient l'opérateur de Durrmeyer.

Remarque 2. Soit $\mathscr{H}^{ab}$ l'espace de Hilbert des fonctions de carrés intégrables sur l'intervalle $[0, 1]$ avec le poids $\rho(t) = t^a(1-t)^b$, dont le produit scalaire est $\langle f, g\rangle_\rho = \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\cdot \rho(t)\,dt$. Alors l'opérateur M_n^{ab} : $\mathscr{H}^{ab} \to \mathscr{P}_n \subset \mathscr{H}^{ab}$ est auto-adjoint.

Le but de cet article est de prouver une propriété d'extrémalité des valeurs propres de ces opérateurs — en particulier pour les opérateurs de Durrmeyer — dans une certaine classe d'opérateurs qui généralisent naturellement les M_n^{ab}.

Définition 2. Désignons par $\mathscr{A}_n^{ab}$ l'ensemble des opérateurs $L_n : \mathscr{L}[0, 1] \to \mathscr{P}_n$ qui vérifient les conditions suivantes :

$(A-1)$ L_n sont auto-adjoints dans l'espace $\mathscr{H}^{ab}$

$(A-2)$ L_n conservent le degré des polynômes de degré maximum n

$(A-3)$ $L_n[e_0] = e_0$, où $e_0(x) = 1$, $x \in [0, 1]$

$(A-4)$ Si $q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 0$ et $f \in C^q[0, 1]$ telle que $f^{(q)}(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$, alors $(L_n[f])^{(q)}(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$.

Définition 3. Désignons par $\mathscr{A}_n^{ab}(0)$ l'ensemble des opérateurs L_n : $\mathscr{L}[0, 1] \to \mathscr{P}_n$ qui vérifient les conditions $(A-1)$, $(A-2)$, $(A-3)$ et

$(A-5)$ $(L_n[e_p])^{(q)}(0) \geqslant 0$ pour tous q, $p \in \mathbb{N}$, q, $p \geqslant 0$, où $e_p(x) = x^p$, $x \in [0, 1]$.

Remarque 3. On a : $\mathscr{A}_n^{ab} \subset \mathscr{A}_n^{ab}(0)$.

Remarque 4. Puisque les opérateurs vérifient les conditions $(A-1)$ et $(A-2)$, en usant un lemme général sur les opérateurs auto-adjoints qui appliquent un espace de Hilbert dans lui-même de façon qu'ils admettent une suite ascendante de sous-espaces finidimensionnels invariants, ([3]) on peut mettre L_n sous la forme :

$$L_n[f] = \sum_{m=0}^{n} \gamma_m \cdot \langle f, P_m^{ab}\rangle_\rho \cdot P_m^{ab},\ f \in \mathscr{L}[0, 1],\ \text{où} \tag{4}$$

P_m^{ab} sont les polynômes orthogonaux de Jacobi de poids $\rho(t) = t^a(1-t)^b$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et γ_m sont les valeurs propres de L_n.

Parce que L_n est complètement défini par ses valeurs propres, désignons L_n par $L_n(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$. Il suit d'après la condition $(A-3)$ que $\gamma_0 = 1$.

Théorème 1. *L'opérateur M_n^{ab} admet la représentation* :

$$M_n^{ab}[f] = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{nm}^{ab} \langle f, P_m^{ab}\rangle_\rho \cdot P_m^{ab},\ f \in \mathscr{L}[0, 1],\ \text{où} \tag{5}$$

$$\lambda_{nm}^{ab} = \Gamma(a+b+n+2)\,\Gamma(n+1)/(\Gamma(n-m+1)\ \Gamma(a+b+n+m+2)).$$

Démonstration. Montrons que l'opérateur M_n^{ab} conserve le degré des polynômes de degré maximum n. On a pour $0 \leqslant m \leqslant n$:

$$M_n^{ab}[e_m](x) = \frac{\Gamma(a+b+n+2)}{\Gamma(a+b+n+m+2)} \sum_{k=0}^{n} (a+k+1)\ldots(a+k+m) \times$$
$$\times \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} x^{k+i}.$$

En changeant l'indice $(j=k+i)$ et l'ordre de sommation il vient :

$$M_n^{ab}[e_m](x) = \frac{\Gamma(a+b+n+2)}{\Gamma(a+b+n+m+2)} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j x^j$$
$$\sum_{k=0}^{j} \times (-1)^k (a+k+1)\ldots(a+k+m)\binom{j}{k}.$$

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{j} (-1)^k (a+k+1)\ldots(a+k+m)\binom{j}{k} = (d^m/dt^m)[t^{a+m}(1-t)^j]|_{t=1} =$

$$= \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} ((1-t)^j)^{(p)}(1)\cdot(t^{a+m})^{(m-p)}(1) = \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} (-1)^p \frac{j!}{(j-p)!}(1-t)^{j-p} \times$$
$$\times (a+m)\ldots(a+p+1)\cdot t^{a+p}|_{t=1}.$$

Si $j > m$, alors, parce que dans la dernière somme on a $p \leqslant m < j$ il en résulte que $(1-t)^{j-p}$ est nul pour $t = 1$ et $0 \leqslant p \leqslant m$, et donc le coefficient de x^j est zéro. Outre cela, la coefficient de x^m est :

$$\frac{\Gamma(a+b+n+2)}{\Gamma(a+b+n+m+2)} \binom{n}{m} (-1)^m \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} \frac{m!}{(m-p)!} (-1)^p \times$$
$$\times (1-t)^{m-p}(a+m)\ldots(a+p+1)\,t^{a+p}|_{t=1} =$$
$$= \Gamma(a+b+n+2)\cdot\Gamma^{-1}(a+b+n+m+2)\binom{n}{m} m! = \lambda_{nm}^{ab}.$$

En tenant compte des Remarques 2 et 4 et du fait que le coefficient de x^m dans le polynôme $M_n^{ab}[e_m]$ est λ_{nm}^{ab}, on obtient la relation (5).

Théorème 2. *On a* :

$$M_n^{ab} \in \mathscr{A}_n^{ab}. \tag{6}$$

Démonstration. Les conditions $(A-1)$, $(A-2)$ de la définition de $\mathscr{A}_n^{ab}$ découlent du Théorème 1. La condition $(A-3)$ on obtient immédiatement de la définition de l'opérateur M_n^{ab}. Vérifions la condition $(A-4)$. Soit $q \in \mathbb{N}$ et la fonction $f \in C^q[0, 1]$ telle que $f^{(q)}(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$. De façon analogue comme dans [3] on obtient :

$$(M_n^{ab}[f])^{(q)}(x) = \frac{n!\,\Gamma(a+b+n+2)}{(n-q)!\ \Gamma(a+b+n+q+2)} \sum_{k=0}^{n-q} p_{n-q\,k}(x) \times$$
$$\times B^{-1}(a+k+q+1, b+n+1-k) \times \int_0^1 t^{q+k+a}\cdot(1-t)^{b+n-k} f^{(q)}(t)\,dt > 0,$$

ce qui achève la démonstration.

Théorème 3. *Si $L_n(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in \mathscr{A}_n^{ab}(0)$, alors* :

$$\gamma_m \leqslant \lambda_{nm}^{ab} (0 \leqslant m \leqslant n). \tag{7}$$

Nous démontrons premièrement deux lemmes d'algèbre linéaire.

LEMME 1. *Soit pour $n \geqslant 2$ le système suivant de n inéquations à $n-1$ inconnues :*

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\cdot x_j \geqslant b_i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

S'il existe n vecteurs $z^s \in \mathbb{R}^{n-1}$, $z^s = (z_1^s, \ldots, z_{n-1}^s)$, $(1 \leqslant s \leqslant n)$ de sorte que :

$$(9) \qquad \left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\cdot z_j^s = b_i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq s) \\ &\sum_{j=1}^{n-1} a_{sj}\cdot z_j^s < b_s \end{aligned}\right\} \quad (1 \leqslant s \leqslant n),$$

alors le système (8) n'a pas de solutions.

Démonstration. Nous démontrons par induction. Pour $n=2$ le lemme est évident et nous le supposons vrai pour $n-1$.

Soient : $A = \{(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \mid \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j \geqslant b_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$ et

$$H_i = \{(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \mid \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j = b_i\}, \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Procédons par l'absurde et supposons que $A \neq \emptyset$. On a $\mathrm{Fr}\, A \neq \emptyset$. Prenons $c = (c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \mathrm{Fr}\, A$. Le point c appartient au moins à un des hyperplans H_j. Nous admettons que $c \in H_n$. Notons $B = A \cap H_n$. On a $B \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Fr}\, A \subset A$. Faisons une transformation affine des coordonnées de l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ de façon que c devient le centre des nouvelles coordonnées et que les premiers $n-2$ vecteurs de la nouvelle base se trouvent dans $H_n - c$. Les coordonnées anciennes sont exprimées en fonction de nouvelles coordonnées par les formules :

$$x_j = c_j + \sum_{k=1}^{n-1} d_{jk}x'_k \ (1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Les éléments de B sont caractérisés par les relations :

$$\sum_{k=1}^{n-2} a'_{ik}x'_k \geqslant b'_i,\ (1 \leqslant i \leqslant n-1) \text{ et } x'_{n-1} = 0,$$

$$\text{où } a'_{ik} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\cdot d_{jk} \text{ et } b'_i = b_i - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}c_j\,.$$

Les points $z^s (1 \leqslant s \leqslant n-1)$ deviennent $(z')^s = ((z')_1^s, \ldots, (z')_{n-1}^s)$, et parce qu'ils se trouvent dans H_n ils vérifient le système suivant :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-2} a'_{ik}(z')_k^s = b'_i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ i \neq s) \\ &\sum_{k=1}^{n-2} a'_{sk}(z')_k^s < b'_s \end{aligned}\right\} \quad (1 \leqslant s \leqslant n-1),$$

Alors par l'hypothèse d'induction il résulte que $B = \emptyset$ ce qui est une contradiction. Donc le système (8) n'a pas de solutions.

LEMME 2. *Soient $n \geqslant 2$ et les matrices $(u_{km})_{0 \leqslant k,\, m \leqslant n}$, et $(w_{km})_{0 \leqslant k,\, m \leqslant n}$ qui vérifient les conditions :*

1° $u_{km} = 0,\ (0 \leqslant m < k \leqslant n)$

2° $w_{km} = 0,\ (0 \leqslant k < m \leqslant n)$

3° $w_{km} < w_{nm},\ (0 \leqslant k < n,\ 1 \leqslant m \leqslant n)$

4° $w_{k0} = 1$ *et* $u_{kk}\cdot w_{kk} > 0,\quad (0 \leqslant k \leqslant n)$

5° $\sum_{m=0}^{n} u_{qm}\cdot w_{km} = 0,\quad (0 \leqslant q < k \leqslant n).$

Si le vecteur $(z_m)_{0 \leqslant m \leqslant n}$ remplit les conditions :

6° $z_0 = 1$

7° $\sum_{m=0}^{n} u_{qm}z_m \geqslant 0,\quad (0 \leqslant q \leqslant n-1),$

alors les inégalités sont accomplies :

$$(10) \qquad z_m \leqslant w_{nm}, \quad (0 \leqslant m \leqslant n).$$

Démonstration. Posons $t_m = z_m - w_{nm}$, $(0 \leqslant m \leqslant n)$. D'après les relations 4° (la première), 5° (pour $k=n$), 6° et 7° il en résulte :

$$\sum_{m=1}^{n} u_{qm}t_m \geqslant 0,\ (0 \leqslant q \leqslant n-1).$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un indice p, $(1 \leqslant p \leqslant n)$ tel que $t_p > 0$. Posons alors $y_m = t_m/t_p$, $(1 \leqslant m \leqslant n)$. Par suite on a :

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{n} u_{qm}y_m + u_{qp} \geqslant 0,\ (0 \leqslant q \leqslant n-1).$$

Mais ce système n'a pas de solutions. Pour montrer cela nous choisissons les points $v^k \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v^k = (v_m^k)_{1 \leqslant m \leqslant n,\, m \neq p}$, $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ de sorte qu'on a les relations :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{n} u_{qm}v_m^k + u_{qp} = 0,\ (0 \leqslant q \leqslant n-1,\ q \neq k) \\ &\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{n} u_{km}v_m^k + u_{kp} < 0 \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$$

et puis nous appliquons le lemme 1 en choisissant :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= u_{i-1\,j},\ (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j < p) \\ &= u_{i-1\,j+1},\ (1 \leqslant i \leqslant n,\ p \leqslant j \leqslant n-1) \end{aligned}$$

$$b_i = -u_{i-1\,p},\ (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$z_j^s = v_j^{s-1},\ (1 \leqslant s \leqslant n,\ 1 \leqslant j < p)$$

$$= v_{j+1}^{s-1},\ (1 \leqslant s \leqslant n,\ p \leqslant j \leqslant n-1).$$

Tenant compte de 3° nous pouvons définir :

$$v_m^k = (w_{nm} - w_{km})/(w_{np} - w_{kp}),\ (1 \leqslant m \leqslant n,\ m \neq p,\ 0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

En vertu des relations 1°—5° il résulte pour $0 \leqslant q \leqslant n-1$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\sum_{m=1\, m\neq p}^{n} u_{qm} v_m^k + u_{qp} = \left(\sum_{m=0}^{n} u_{qm} w_{nm} - \sum_{m=0}^{n} u_{qm} w_{km}\right)/(w_{np} - w_{kp}) =$$

$$= \left(\sum_{m=q}^{k} u_{qm} w_{km}\right)/(w_{kp} - w_{np}) = \delta_{qk} u_{kk} w_{kk}/(w_{kp} - w_{np}),$$

où δ_{qk} est le symbole de Kronecker. On a de plus que $u_{kk} \cdot w_{kk}/(w_{kp} - w_{np}) < 0$.

La contradiction obtenue montre que la supposition qu'il existe un $t_p > 0$ est fausse. Le lemme est donc démontré.

Démonstration du théorème. Pour $m = 0, 1, 2, \ldots$ et $p = 0, 1, 2, \ldots$ nous introduisons les notations suivantes :

$$c_m = \int_0^1 x^{a+m}(1-x)^b\, dx$$

$$H_{mp}(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_m \\ c_1 & c_2 & \cdots & \cdots & c_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1} & c_m & \cdots & \cdots & c_{2m-1} \\ x^p & x^{p+1} & \cdots & \cdots & x^{p+m} \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$D_{mp} = \int_0^1 H_{mp}(x) \cdot x^a \cdot (1-x)^b\, dx$$

$$D(-1) = 1,\quad D(m) = D_{mm}$$

$D_k(m)$ = est le mineur du déterminant $D(m) = |c_{i+j}|_{0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant m}$, obtenue en supprimant la $m+1$-ième ligne et la $k+1$-ième colonne $(0 \leqslant k \leqslant m)$, et $D_k(m) = 0$ $(0 \leqslant m < k)$.

On sait que $D(m) > 0$ et que les polynômes de Jacobi $P_m^{ab}(x)$, $m \geqslant 0$ normalisés par la condition $P_m^{ab}(1) > 0$ sont définis par :

$$P_m^{ab}(x) = (D(m) \cdot D(m-1))^{-1/2} H_{m0}(x),\ m \geqslant 0. \tag{12}$$

Soient fixés $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k < n$ et prenons $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(L_n(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)[e_p])^{(k)}(0) = \sum_{m=0}^{n} \gamma_m \left(\int_0^1 P_m^{ab}(x) \cdot x^{p+a}(1-x)^b dx\right)(P_m^{ab})^{(k)}(0)$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \gamma_m (D(m) \cdot D(m-1))^{-1/2} \cdot D_{mp} \cdot (P_m^{ab})^{(k)}(0) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \gamma_m (-1)^{m+k}(k!)\, D_{mp} \cdot D_k(m)/(D(m) \cdot D(m-1)).$$

Puisque $(L_n(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)[e_p])^{(k)}(0) \geqslant 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ il en résulte que $\lim\limits_{p\to\infty} (1/c_p)(L_n(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)[e_p])^{(k)}(0) \geqslant 0$. On a :

$$\lim_{p\to\infty} (c_{p+j}/c_p) = \lim_{p\to\infty} \frac{\Gamma(p+j+a+1) \cdot \Gamma(b+1)\Gamma(a+b+p+2)}{\Gamma(a+b+p+j+2) \cdot \Gamma(b+1) \cdot \Gamma(a+p+1)} = 1 \text{ et donc}$$

$\lim\limits_{p\to\infty} D_{mp}/c_p = H_{m0}(1)$. Par conséquence on a les inégalités :

$$\sum_{m=0}^{n} \gamma_m (-1)^{m+k}(k!)\, H_{m0}(1)\, D_k(m)/(D(m) \cdot D(m-1)) \geqslant 0,\ (0 \leqslant k < n) \tag{13}$$

Nous appliquerons le Lemme 2 en faisant les notations suivantes.

$$u_{km} = (-1)^{m+k}(k!) \cdot H_{m0}(1) \cdot D_k(m)/(D(m) \cdot D(m-1)),\ (0 \leqslant k \leqslant m \leqslant n)$$

$$= 0,\ (0 \leqslant m < k \leqslant n)$$

$$w_{km} = \lambda_{km}^{ab} (0 \leqslant m \leqslant k \leqslant n)$$

$$= 0,\ (0 \leqslant k < m \leqslant n)$$

$$z_m = \gamma_m (0 \leqslant m \leqslant n).$$

Vérifions les conditions 1°—7° de l'hypothèse du lemme.

Les conditions 1° et 2° sont données par la définition des u_{km} et w_{km}. Les conditions 4° (la première) et 6° découlent des conditions : $L_n(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)[e_0] = e_0$ et $M_n^{ab}[e_0] = e_0$. La condition 7° est justement la relation (13). On a évidemment $w_{kk} > 0$ et $u_{kk} = (k!) \cdot H_{k0}(1)/D_k(k)/ / D(k) \cdot D(k-1)) = (k!) \cdot H_{k0}(1)/D(k) > 0$ puisque $D(k) > 0$ et $P_k^{ab}(1) > 0$. Donc la relation 4° (la seconde) a lieu aussi.

La condition 3° dans le cas $0 \leqslant k < n$ et simultanément $k < m \leqslant n$ est immédiatement parce que $w_{km} = 0$ et $w_{nm} = \lambda_{nm}^{ab} > 0$. Il reste le cas $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$. Alors :

$$w_{nm} - w_{km} = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(a+b+n+2)}{\Gamma(n-m+1)\Gamma(a+b+n+m+2)} -$$

$$- \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(a+b+k+2)}{\Gamma(k-m+1) \cdot \Gamma(a+b+k+m+2)} =$$

$$= w_{km} \times \left(\prod_{j=1}^{n-k} \frac{(k+j)(a+b+k+j+1)}{(k+j-m)(a+b+m+k+j+1)} - 1\right).$$

Mais l'inégalité $\dfrac{(k+j)(a+b+k+j+1)}{(k-m+j)(a+b+m+k+j+1)} > 1$ est équivalente avec $a+b+1+m>0$ ce qui est vrai pour $m \geqslant 1$.

Nous prouvons maintenant la condition 5°. Considérons la fonction $g_p(x) = x^p/c_p$, $p \in \mathbb{N}$. On a tout d'abord pour $0 \leqslant q < k \leqslant n$, analogue comme ci-dessus :

$$\lim_{p\to\infty} (M_k^{ab}[g_p])^{(q)}(0) = \sum_{m=0}^{k} \lambda_{km}^{ab} u_{qm} = \sum_{m=0}^{n} w_{km} u_{qm}.$$

D'autre côté on a :

$$(M_k^{ab}[g_p])^{(q)}(0) = \sum_{j=0}^{k} B^{-1}(a+j+1, b+k-j+1)\left(\int_0^1 g_p(t)\times \right.$$
$$\left. \times t^{a+j}(1-t)^{b+k-j}dt\right) p_{kj}(q)(0)$$

On a $p_{kj}^{(q)}(0) = \binom{k}{j}\sum_{i=0}^{k-j}\binom{k-j}{i}(-1)^{k+j+i}\dfrac{(k-i)!}{(k-i-q)!}x^{k-i-q}\Big|_{x=0} =$

$$= \binom{k}{j}\binom{k-j}{k-q}(-1)^{j+q}q!.$$

Donc $p_{kj}^{(q)}(0) = 0$ pour $j > q$. Il vient :

$$(M_k^{ab}[g_p])^{(q)}(0) = \sum_{j=0}^{q} \frac{B(a+j+p+1, b+k-j+1)}{B(a+j+1, b+k-j+1)B(a+p+1, b+1)} p_{kj}^{(q)}(0).$$

Mais

$$\frac{B(a+j+p+1, b+k+1-j)}{B(a+p+1, b+1)} = \frac{(a+p+1)\ldots(a+p+j)\Gamma(b+k-j+1)}{(a+b+p+2)\ldots(a+b+p+k+1)\Gamma(b+1)} \to 0$$

$(p\to\infty)$ puisque $j \leqslant q < k$.

Donc $\lim\limits_{p\to\infty} (M_k^{ab}(g_p))^{(q)}(0) = 0$ ce qui assure la relation 5°. En appliquant maintenant le Lemme 2 le Théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. Durrmeyer, J. L., *Une formule d'inversion de la transformé de Laplace. Applications à la théorie de moments*, Thèse de 3e cycle. Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967.
2. Lupaş, Al., *Die Folge der Betaoperatoren*. Dissertation Stuttgard, 1972.
3. Derriennic, M. M., *Sur l'approximation de fonctions intégrables sur* [0,1] *par des polynômes de Bernstein modifiés*. J. of App. Theory, 31 (1981), nr. 4, 325–343.
4. Păltănea, R., *Sur un opérateur polynômial défini sur l'ensemble des fonctions intégrables*. preprint Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca 1983, 101–106.

Reçu le 12.V.1985

Str. Tîmpei, nr. 14
Sc. B, ap. 12
2200 Braşov, România