MATHEMATICA—REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET
DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 15, N° 2, 1986, pp. 111—116

TREILLIS DUALS. APPLICATIONS AUX ENSEMBLES FLOUS

CONSTANTIN DUMITRESCU
(Craiova)

1. Introduction. Soit X un ensemble nonvide quelconque et on note par I le segment $[0,1]^-$. Un ensemble flou A peut être considéré comme étant une fonction $A : X \to I$, donc un élément de I^X. Les opérations d'intersection et de réunion des ensembles flous sont, en général, considérées comme étant celles induites sur I^X par le treillis $L_0 = (I, \wedge, \vee)$ où $\wedge =$ $=$ min et $\vee =$ max. Pour les opérations induites sur I^X on utilise les mêmes symboles que pour les opérations de I sans que cela mène à une confusion.

Sur le treillis L_0 on considère le complément défini à l'aide de la fonction $C(x) = 1 - x$. Cette fonction a comme point fixe $x = 1/2$, qui joue donc un rôle privilégié dans le treillis considéré.

Dans [1] on propose une autre variante de complément, dans lequel n'importe quel point $n \in (0,1)$ peut avoir un rôle analogue à celui que $x = 1/2$ a pour la fonction C. Plus précisément soit $n \in (0,1)$ quelconque et $H : [0, n] \to [n, 1]$ un homéomorphisme décroissant. À la place de la fonction C on considère la fonction $k : I \to I$ définie par $k(a) = H(a)$ si $a \in [0, n]$ et $k(a) = H^{-1}(a)$ si $a \in [n, 1]$. Par exemple on peut considérer $H(x) = \exp(-x/\alpha)$. Il en résulte que $L = (I, \wedge, \vee, k)$ est un treillis morganien, de même que $(I, \wedge, \vee, C)$ Dans [1] on propose aussi l'étude des ensembles flous à l'aide de deux autres treillis distributifs $L_1 = (I, \cap, \cup)$ et $L_2 = (I, \sqcap, \sqcup)$ où :

$$\cap\, a_i = \begin{cases} \wedge\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i > n \\ \vee\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \leqslant n \end{cases};\quad \cup\, a_i = \begin{cases} \vee\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i > n \\ \wedge\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \leqslant n \end{cases}$$

$$\sqcap\, a_i = \begin{cases} \wedge\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i < n \\ \vee\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \geqslant n \end{cases}\quad \sqcup\, a_i = \begin{cases} \vee\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i < n \\ \wedge\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \geqslant n \end{cases}$$

Le premier de ces treillis a comme premier élément n et comme dernier élément 1 et le second treillis a 0 comme premier élément et n comme dernier élément.

Par la suite nous allons donner une méthode générale d'obtenir la paire de treillis (L_1, L_2) et encore trois telles paires, en partant de n'importe lequel d'entre eux.

Mais pour le début nous rappelonn quelques-uns des résultats démontrés dans [1], résultats qui constituent un argument en faveur de l'utilisation de ces nouvelles structures. Il faut dire que L_1 et L_2 ne sont pas idépendants — la liaison entre eux est faite par les relations de De Morgan :

$$k(a \cap b) = ka \sqcup kb,\ k(a \cup b) = ka \sqcap kb,\ k(a \sqcap b) = ka \cup kb,\ k(a \sqcup b) = ka \cap kb. \qquad (1.1)$$

Les relations d'ordre déterminées par les deux treillis sont respectivement

$$a \leqslant_1 b \Leftrightarrow a \cup b = b \Leftrightarrow n < a \leqslant b, \text{ ou } n \geqslant a \geqslant b, \text{ ou } a \leqslant n,\ b > n$$

$$a \leqslant_2 b \Leftrightarrow a \sqcup b = b \Leftrightarrow a \geqslant b \geqslant n, \text{ ou } a \leqslant b < n, \text{ ou } a < n \text{ et } b \geqslant n.$$

À ces ordres s'attachent deux relations d'inclusion (et d'appartenance) pour les ensembles flous, notées respectivement par $\subset_1$ et $\subset_2$(et $\in_1$, $\in_2$). L'utilisation des deux treillis met en évidence la nécessité de la distinction entre les « points droits » de I (les points $a \in I$ qui satisfont la condition $a > n$) et les « points gauches » ($a \in I$, $a < n$). Cette distinction permet de reformuler, pour les ensembles flous, certains résultats bien connus pour les ensembles non flous. Ainsi, par exemple, on sait que, dans le cas non-flou un point ne peut appartenir en même temps à un ensemble et à sa complémentaire. Mais dans ce cas, puisque la fonction caractéristique prend seulement les valeurs 0 et 1, on peut dire qu'on travaille seulement avec des ensembles et des points droits ($A(x) = 1 > n$, pour n'importe quel $x \in X$). En faisant donc la distinction entre la droite et la gauche, le résultat pourra être reformulé ainsi : un point droit ne peut appartenir en même temps à un ensemble et à sa complémentaire. Dans le treillis $\tilde{L}_0 = (I^X, \wedge, \vee)$ on démontre que si un point — droit ou gauche appartient à un ensemble A il ne peut plus appartenir à la complémentaire de A (on dit de $x_a \in I^X$ qu'il est point flou droit si $x_a(y) < n$ pour $y \neq x$ et $x_a(x) = a < n$, et si $x_a(y) > n$ pour $y \neq x$ et $x_a(x) = a < n$, on dit que x_a est point flou gauche).

Par la suite nous présenterons une façon d'obtenir la paire de treillis (L_1, L_2) en utilisant un procédé où justement la distinction entre la droite et la gauche est essentielle.

2. Treillis duals. Dans ce paragraphe on va utiliser les symboles $\wedge$ et $\vee$ pour les opérations d'un treillis morganien quelconque $T = (M, \wedge, \vee, k)$. En partant de l'observation que n'importe quel complément k sur un tel treillis réalise une partition de M en trois classes : $M' = \{a \in M / a < ka\}$; $M'' = \{a \in M / a = ka\}$ et $M''' = \{a \in M / a > ka\}$ $\leqslant$ étant l'ordre induite sur M par les deux opérations et $a < b \Leftrightarrow a \leqslant b$ et $a \neq b$, on peut facilement généraliser les résultats de [1] pour le cas d'un treillis quelconque. On va noter par 0 et 1 le premier et respectivement le dernier élément de M et soit $L = \{a \in M / a \in M'$, ou $a \in M''\}$, $R = \{a \in M / a \in M''$, ou $a \in M'''\}$. Alors on peut démontrer aisément le résultat suivant :

LEMME 2.1 *(i) Si $a \in M'$ alors pour n'importe quel $n \in M''$ on a $a < n$. (ii) Si $b \in M'''$ alors pour n'importe quel $n \in M''$ on $a\ n < b$. (iii) Si $a \in L$ et $b \notin L$ alors $a \wedge b = a$ et $a \vee b = b$.*

Démonstration. Par l'hypothèse $a < ka$ et si l'on suppose par absurde qu'il existe $n_0 \in M''$ de façon que $a > n_0$ (on ne peut avoir $a = n_0$) il en

résulte $ka < kn_0 = n_0$ et donc on obtient la contradiction $a < ka < n_0$; *(ii)* se démontre de façon analogue et *(iii)* est une conséquence des premières deux affirmations.

Observons que dans le cas où $M = I$ on a $a \leqslant n \Leftrightarrow a \in L$ et $a \geqslant n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \in R$. Cette observation nous permet de définir dans le treillis T les opérations $\cap$, $\cup$, $\sqcap$, $\sqcup$. Par exemple :

$$\cap\, a_i = \begin{cases} \bigvee a_i & \text{si } (\forall)\ a_i \in L \\ \bigwedge a_i & \text{si } (\exists)\ a_i \notin L \end{cases}; \quad \sqcap\, a_i = \begin{cases} \bigvee a_i & \text{si } (\forall)\ a_i \in R \\ \bigwedge a_i & \text{si } (\exists)\ a_i \notin R \end{cases}$$

Le fait que $T_1 = (M, \cap, \cup)$ et $T_2 = (M, \sqcap, \sqcup)$ sont des treillis distributifs entre lesquels ont lieu les relations de De Morgan est une conséquence du lemme antérieure. De plus, pour n'importe quel $a \in M$ on a $a \cap 1 = a \wedge 1 = a$: $a \cup 1 = a \vee 1 = 1$; $a \sqcap 0\ a \wedge 0 = 0$ et $a \sqcup 0 =$ $= a \vee 0 = a$. Donc dans le treillis T_1 l'élément 1 a le rôle de dernier élément 1 et dans le treillis T_2 0 est premier élément. Soit maintenant $n \in M''$ et $a \in M'$; alors on a $a \cap n = a \vee n = n$, $a \sqcap n = a \wedge n = a$, $a \cup n = a \wedge n = a$ et $a \sqcup n = a \vee n = n$. Si $a \in M'''$, nous avons $a \cap n =$ $= a \wedge n = n$, $a \sqcap n = a \vee n = a$, $a \cup n = a \vee n = a$ et $a \sqcup n = a \wedge n = n$, donc les éléments de M'' sont des éléments minimaux pour le treillis T_1 et ils sont des éléments maximaux pour le treillis T_2. Evidemment que si les ordres dans les deux treillis sont totaux il en résulte que M'' est formé d'un élément tout au plus, qui — lorsqu'il existe — a le rôle de premier élément pour T_1 et de dernier élément pour T_2.

Puisque dans la définition de T_1 on a employé l'ensemble L, on peut dire que dans le cadre de ce treillis les points neutres (les éléments de M'') sont considérés comme des points gauches et l'utilisation de l'ensemble R dans la définition de T_2 conduit à la conclusion que, dans le cas de ce treillis, les points neutres sont considérés comme des points droits. Donc les éléments de M'' peuvent être considérés des points gauches de même que des points droits, et à ce qu'on verra, le choix de l'une ou de l'autre de ces deux variantes est essentiel dans la construction que nous allons présenter. Grâce à cette importance on notera par T_L le treillis T si nous considérons les points neutres de ce treillis comme des points gauches, et respectivement par T_R le même treillis, dans lequel on a considéré les points neutres comme des points droits. Par conséquence dans T_L : $a \in M$ est point gauche si $a \in L$ et c'est point droit si $a \notin L$; dans T_R : $a \in M$ est point droit si $a \in R$ et il est point gauche si $a \notin R$.

Considérons maintenant un triplet (O, Q, E) où O (l'opération) peut être l'une des deux opérations $\wedge$ et $\vee$ qui définissent le treillis ; Q (le quantificateur) peut être $\forall$ ou $\exists$, et E (l'espèce) désigne la qualité d'un élément $a \in M$ d'être droit ou gauche (par exemple pour T_L le symbole E peut signifier $a \in L$ ou $a \notin L$). On obtient ainsi huit situations possibles qui définissent les « composantes » suivantes de certaines opérations qui déterminent sur M des structures de treillis.

$$(\wedge, \forall, \notin) : \widetilde{\cup}_1 a_i = \wedge a_i \quad \text{si } (\forall)\ a_i \notin L$$

$$(\wedge, \forall, \in) : \cup_1 a_i = \wedge a_i \quad \text{si } (\forall)\ a_i \in L$$

$$(\vee, \forall, \in) : \cap_1 a_i = \vee a_i \quad \text{si } (\forall)\ a_i \in L$$

$$(\wedge,\ \exists,\ \in):\ \widetilde{\cap}_1 a_i = \wedge\, a_i \qquad \text{si } (\exists)\ a_i \in L$$

$$(\vee,\ \exists,\ \in):\ \widetilde{\cup}_2 a_i = \vee\, a_i \qquad \text{si } (\exists)\ a_i \in L$$

$$(\vee,\ \exists,\ \notin):\ \cup_2 a_i = \vee\, a_i \qquad \text{si } (\exists)\ a_i \notin L$$

$$(\wedge,\ \exists,\ \notin):\ \cap_2 a_i = \wedge\, a_i \qquad \text{si } (\exists)\ a_i \notin L$$

$$(\vee,\ \forall,\ \notin):\ \widetilde{\cap}_2 a_i = \vee\, a_i \qquad \text{si } (\forall)\ a_i \notin L$$

On observe que les paires opposées $(\cup_1,\ \cup_2)$ et $(\cap_1,\ \cap_2)$ déterminent les opérations $\cup$ et $\cap$, c'est-à-dire elles déterminent le treillis T_1 et en dehors de ces deux opérations on a obtenu encore les deux opérations suivantes

$$\widetilde{\cup}\, a_i = \begin{cases} \wedge\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \notin L \\ \vee\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in L \end{cases} \qquad \widetilde{\cap}\, a_i = \begin{cases} \vee\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \notin L \\ \wedge\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in L \end{cases}$$

et nous avons

THÉORÈME 2.1. *Les opérations $\widetilde{\cap}$ et $\widetilde{\cup}$ confèrent à M une nouvelle structure de treillis distributif dans lequel 0 est premier élément, mais il n'y existe pas toujours des éléments maximaux. (Nous noterons ce treillis par T_3).*

Démonstration. Les propriétés de comutativité et d'idempotence sont évidentes. Pour l'associativité soit $a,\ b,\ c \in M$. Nous décelons les situations suivantes

1. si $a,\ b,\ c \in L$ il en résulte $(a \widetilde{\cup}\ b) \widetilde{\cup}\ c = (a \vee b) \widetilde{\cup}\ c = (a \vee b) \vee c = a\ \widetilde{\cup}\ (b\ \widetilde{\cup}\ c)$; 2. si $a,\ b \in L$ et $c \notin L$ on a $(a\ \widetilde{\cup}\ b) \widetilde{\cup}\ c = (a \vee b) \vee c$ et $a\ \widetilde{\cup}\ (b\ \widetilde{\cup}\ c) = a\ \widetilde{\cup}\ (b \vee c) = a \vee (b \vee c)$; 3. si $b,\ c \in L$ et $a \notin L$ on a $a\ \widetilde{\cup}\ (b\ \widetilde{\cup}\ c) = a \widetilde{\cup} (b \vee c) = a \vee (b \vee c) = (a\ \widetilde{\cup}\ b) \widetilde{\cup}\ c$.

Les autres situations aussi que les autres propriétés du treillis se démontrent de façon analogue et parce que $0\ \widetilde{\cap}\ a = 0 \wedge a = 0$ et $0 \widetilde{\cup}\, a = 0 \vee a = a$ il en résulte que 0 est premier élément. L'ordre induit dans T_3 est $a \leqslant_3 b \Leftrightarrow a \widetilde{\cup}\, b = b \Leftrightarrow [(a \vee b = b,$ si $a \in L$ ou $b \in L)$ ou $(a \wedge b = b$ si $a, b \notin L)$ et donc $a \leqslant_3 ka \Leftrightarrow a \vee ka = ka \Leftrightarrow a \in L$.

Cette dernière constatation nous permet d'appliquer le même procédé pour les treillis T_1 et T_3. La conséqueuce en est q'on obtient de T_1, de même que de T_3, les mêmes deux treillis. L'un d'entre eux est T_L et l'autre treillis (qu'on notera par T_5) est déterminé par les opérations

$$\widetilde{\wedge}\, a_i = \begin{cases} \cap\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in L \\ \cup\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \notin L \end{cases} = \begin{cases} \vee\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \in L, \text{ ou } (\forall)\ a_i \notin L \\ \wedge\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in L,\ a_j \notin L \end{cases}$$

$$\widetilde{\vee}\, a_i = \begin{cases} \cup\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in L \\ \cap\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \notin L \end{cases} = \begin{cases} \wedge\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \in L, \text{ ou } (\forall)\ a_i \notin L \\ \vee\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in L,\ a_j \notin L \end{cases}$$

Le procédé s'arrête là, car de T_5 on obtient toujours les treillis T_1 et T_3, comme de T_L.

THÉORÈME 3.2. *Nous avons $a \leqslant ka \Leftrightarrow a \leqslant_1 ka \Leftrightarrow a \leqslant_3 ka \Leftrightarrow a \leqslant_5 ka \Leftrightarrow \Leftrightarrow a \in L$, donc la propriété d'être élément droit ou gauche est un invariant dans ce processus de génération successive des treillis.*

La démonstration de ce théorème se fait sans difficulté.

LEMME 2.2. *Dans le treillis T_5 l'ensemble M'' est l'ensemble des éléments minimaux, en ce sens que pour n'importe quel $a \notin M''$ et $n \in M''$ on a $a \widetilde{\wedge}\, n = n$, $a \widetilde{\vee}\, n = a$.*

Démonstration. Si $a \in M'$ on a $a\ \widetilde{\wedge}\ n = a \vee n = n$ et $a \vee n = a \wedge n = a$ et si $a \in M'''$ nous avons $a\ \widetilde{\wedge}\ n = a \wedge n$ et $a\ \widetilde{\vee}\ n = a \vee n = a$.

À partir du treillis T_R on obtient une chaîne analogue de treillis. De T_R on obtient $T_2 = (M,\ \sqcap,\ \sqcup)$ et $T_4 = (M,\ \widetilde{\sqcap},\ \widetilde{\sqcup})$ où

$$\widetilde{\sqcap}\, a_i = \begin{cases} \wedge\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in R \\ \vee\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \notin R \end{cases} \qquad \widetilde{\sqcup}\, a_i = \begin{cases} \vee\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in R \\ \wedge\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \notin R \end{cases}$$

Et de T_2, de même que de T_4, on obtient les treillis et $T_6 = (M,\ \stackrel{\approx}{\wedge},\ \stackrel{\approx}{\vee})$ où

$$\stackrel{\approx}{\wedge}\, a_i = \begin{cases} \vee\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \in R, \text{ ou } (\forall)\ a_i \notin R \\ \wedge\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in R,\ a_j \notin R \end{cases}$$

$$\stackrel{\approx}{\vee}\, a_i = \begin{cases} \wedge\, a_i \text{ si } (\forall)\ a_i \in R \text{ on } (\forall)\ a_i \notin R \\ \vee\, a_i \text{ si } (\exists)\ a_i \in R,\ a_j \notin R \end{cases}$$

Ainsi T_1 engendre T_L et T_5, T_5 engendre T_1 et T_3; finalement T_3 engendre T_L et T_5.

Considérons maintenant les paires de treillis

$$(T_L,\ T_R);\ (T_1,\ T_2);\ (T_3,\ T_4);\ (T_5,\ T_6) \tag{2.1}$$

THÉORÈME 3.3. *Entre les composants de n'importe quelle paire de (2.1) ont lieu les relations de De Morgan (relations du même type que celles de (1.1), où donc l'infimum d'un treillis est couplé avec le supremum de l'autre treillis).*

Démonstration. Considérons par exemple les treillis T_3 et T_4. Pour démontrer l'égalité $k(a \widetilde{\cap}\, b) = ka \widetilde{\sqcup} kb$ nous envisagerons les cas suivants:

1) $a,\ b \in L \Rightarrow k(a\ \widetilde{\cap}\ b) = k(a \wedge b) = ka \vee kb = ka \sqcup kb$;

2) $a \in L,\ b \notin L \Rightarrow k(a\ \widetilde{\cap}\ b) = k(a \wedge b) = ka \vee ka = ka \sqcup kb$;

3) $a,\ b \notin L \Rightarrow k(a\ \widetilde{\cap}\ b) = k(a \vee b) = ka \wedge kb = ka \widetilde{\sqcup} kb$.

Les autres égalités se démontrent de façon analogue.

Observons maintenant que — de même que les composants opposés $\cup_1$ et $\cup_2$ forment une unité (l'opération $\cap$) — les paires de treillis duals de (2.1) déterminent une unité — les bitreillis — où les notions droit et gauche ne sont pas équivalentes.

En tenant compte de l'ordre de génération des huit treillis nous pouvons dire qu'entre les paires de treillis de (2.1) il existe l'ordre suivant de génération

$$(T_L,\ T_R) \leftrightarrow (T_1,\ T_2) \leftrightarrow (T_5,\ T_6) \leftrightarrow (T_3,\ T_4) \leftrightarrow (T_L,\ T_R). \tag{2.2}$$

À partir d'une telle paire de treillis sur le segment [0,1], en espèce la paire (T_1, T_2), dans [1] on a déjà définies et étudiées les espaces bitopologiques flous. Dans un article futur nous nous proposons d'approfondir cette étude, en envisageant les autres trois espaces bitopologiques, déterminés par les paires de treillis de (2.2).

BIBLIOGRAPHIE

1] Dumitrescu C., *Treillis sur des ensembles flous. Application à des espaces topologiques-flous*, Rev. Roumaine de Math. pures et Appl., **31**, nr. 8 p. 667–675 (1986).

[2] Popoviciu, E., *Remarque sur les diverses propriétés d'allure*, Itinerant Seminar on Functional Equations, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, Preprint nr. 6, 137–142 (1984).

Reçu le 15.IX.1985

Facultatea de Științe ale Naturii
Str. A.I. Cuza nr. 13
1100 Craiova, România