MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 15, N° 2, 1986, pp. 127—130

SUR LES SURFACES DU TYPE BERNSTEIN-BÉZIER COMPOSÉES

MIRCEA IVAN
(Cluj-Napoca)

Le but de ce travail est de présenter un procédé d'interpolation des surfaces de $\mathbb{R}^3$. À partir d'un ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ on construit une surface interpolatoire comme une réunion de certaines surfaces interpolatoire élémentaires qu'on va appeller lambeaux du type Bernstein-Bézier.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant 1$. Considérons les fonctions :

$$f_i : [0,1] \to [0,1], \quad i = 1,2,3$$
$$f_1(t) = (1-t)^a,$$
$$f_2(t) = 1 - (1-t)^a - t^a,$$
$$f_3(t) = t^a.$$

On constate que les fonctions f_1, f_2, f_3 satisfont les relations :

(1) $$f_1(0) = 1,\ f_2(0) = 0,\ f_3(0) = 0,$$
$$f_1(1) = 0,\ f_2(1) = 0,\ f_3(1) = 1,$$
$$f_2 = 0, \text{ pour } a = 1;$$

(2) $$f_i \geqslant 0, \text{ pour } i = 1,2,3;$$

(3) $$\sum_{i=1}^{3} f_i(t) = 1, \text{ pour tout } t \in [0,1].$$

Soient G_{ij} des points de $\mathbb{R}^3$, $i, j = 1, 2, 3$. Notons $D = [0,1] \times [0,1]$ et considérons la fonction $S : D \to \mathbb{R}^3$

(4) $$S(u, v) = \sum_{i,j=1}^{3} f_i(u) f_j(v) G_{ij}.$$

Définition 1. L'ensemble $S(D)$ s'appelle lambeau élémentaire du type Bernstein-Bézier.

THÉORÈME 1 *Le lambeau $S(D)$ contient les points G_{11}, G_{13}, G_{31}, G_{33} et il est inclus dans l'enveloppe convexe de l'ensemble $\bigcup_{i,j=1}^{3} G_{ij}$.*

Démonstration. Compte tenu des relations (1) on obtient : $S(0,0) = G_{11}$, $S(1,0) = G_{31}$, $S(0,1) = G_{13}$, $S(1,1) = G_{33}$. Aussi, conformément aux relations (2) et (3), vu que $\sum_{i,j=1}^{3} f_i(u)f_j(v) = 1$, on obtient $S(D) \subset \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i,j=1}^{3} G_{ij}\right)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. Pour $a = 1$ le lambeau $S(D)$ est une portion de la quadrique réglée qui passe par les points $G_{11}, G_{13}, G_{31}, G_{33}$.

Soient m, n des nombres entiers, $m, n \geqslant 3$. Considérons les points $N_k^p \in \mathbb{R}^3$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$. À partir de ces points, que nous supposons appartenants à une certaine surface de $\mathbb{R}^3$, nous allons construire une surface interpolatoire.

Posons $M_q^r = N_k^p$, ou :

$$k = \begin{cases} 1, \text{ pour } q = 0, \\ q, \text{ pour } q = \overline{1, n}, \\ n, \text{ pour } q = n+1; \end{cases}$$

$$p = \begin{cases} 1, \text{ pour } r = 0, \\ r, \text{ pour } r = \overline{1, m} \\ m, \text{ pour } r = m+1. \end{cases}$$

Définissons ensuite les points :

$$\begin{aligned}
G_{11}^{kp} &= (M_{k-1}^{p-1} + M_k^{p-1} + M_k^p + M_{k-1}^p)/4, \\
G_{21}^{kp} &= (M_k^{p-1} + M_k^p)/2, \\
G_{31}^{kp} &= (M_k^{p-1} + M_{k+1}^{p-1} + M_{k+1}^p + M_k^p)/4, \\
G_{12}^{kp} &= (M_{k-1}^p + M_k^p)/2, \\
G_{22}^{kp} &= M_k^p, \\
G_{32}^{kp} &= (M_k^p + M_{k+1}^p)/2, \\
G_{13}^{kp} &= (M_{k-1}^p + M_k^p + M_k^{p+1} + M_{k-1}^{p+1})/4, \\
G_{23}^{kp} &= (M_k^p + M_k^{p+1})/2, \\
G_{33}^{kp} &= (M_k^p + M_{k+1}^p + M_{k+1}^{p+1} + M_k^{p+1})/4,
\end{aligned}$$

pour $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$

Il est immédiat de vérifier que :

$$G_{i3}^{kp} = G_{i1}^{k,p+1}, \tag{5}$$

$$G_{i3}^{kp} - G_{i2}^{kp} = G_{i2}^{k,p+1} - G_{i1}^{k,p+1},$$

pour $i = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m-1}$;

$$G_{3j}^{kp} = G_{1j}^{k+1,p},$$

$$G_{3j}^{kp} - G_{2j}^{kp} = G_{2j}^{k+1,p} - G_{1j}^{k+1,p},$$

pour $j = \overline{1, 3}$, $k = \overline{1, n-1}$, $p = \overline{1, m}$.

Considérons les fonctions : $S^{kp} : D \to \mathbb{R}^3$,

$$S^{kp}(u, v) = \sum_{i,j=1}^{3} f_i(u)f_j(v)\, G_{ij}^{kp}, \quad k = \overline{1, n}, \quad p = \overline{1, m}.$$

Définissons la surface interpolatoire S comme une réunion de lambeaux du type Bernstein-Bézier :

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{p=1}^{m} S^{kp}(D). \tag{6}$$

THÉORÈME 2. *Pour tout $a > 1$ la surface S est de classe C^1.*

Démonstration. Démontrons, par exemple, que les relations suivantes sont remplies :

$$S^{kp}(u, 1) = S^{k,p+1}(u, 0), \tag{7}$$

$$S_v^{kp}(u, 1) = S_v^{k,p+1}(u, 0),$$

pour $u, v \in [0, 1]$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m-1}$.

Compte tenu des relations (5) on obtient :

$$S^{kp}(u, 1) = \sum_{i,j=1}^{3} f_i(u)\, f_j(1)\, G_{ij}^{kp} = \sum_{i=1}^{3} f_i(u)\, G_{i3}^{kp} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f_i(u)\, G_{i1}^{k,p+1} = S^{k,p+1}(u, 0);$$

$$S_v^{kp}(u, 1) = \sum_{i,j=1}^{3} f_i(u)\, f_j'(1)\, G_{ij}^{kp} = a \sum_{i=1}^{3} f_i(u)\, (G_{i3}^{kp} - G_{i2}^{kp}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f_i(u)\, (G_{i2}^{k,p+1} - G_{i1}^{k,p+1}) = S_v^{k,p+1}(u, 0).$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarquons le fait que la surface S est attachée à la matrice $[N_k^p]_{\substack{k=\overline{1,n} \\ p=\overline{1,m}}}$ dont les éléments ne doivent pas être distincts.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Böhm, W., Farin, G., Kahmann, J., *A survey of curve and surface methods in CAGD*, Computer Aided Geometric Design, **1**, (1984), 1–60.

[2] Gordon, W. J., Riesenfeld, R. E., *Bernstein-Bézier Methods for the Computer-Aided Design of Free-Form Curves and Surfaces*, Journal of Association for Computing Machinery, vol. **21**, no. 2, (1974), 293–310.

[3] Ivan, M., *Approximation des lignes polygonales à l'aide des ensembles du type Bernstein*, Itinerant Seminar on Functional Equation, Approximation and Convexity, Cluj-Napoca, (1985), 89–96.

Reçu le 29.IX.1985

Institutul Politehnic
Str. Emil Isac 15, 3400 Cluj-Napoca