MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 16, N° 2, 1987, pp. 167–173

L'ÉTUDE D'UN MODÈLE D'ATTENTE AVEC DEUX STATIONS

ILIE RÂP
(Cluj-Napoca)

1. Dans sa thèse [2], G. C. Ghirtis considère le système d'attente avec deux stations, S_1 et S_2, dont les arrivées sont poissonnienes, les lois de service sont exponentielles (ayant le même paramètre pour les deux stations) et les files d'attente sont limités. Une unité arrivé dans ce système prend place dans le file de S_1 si ce file n'est pas complet, ou dans le file de S_2 si le file de S_1 est complet mais celui de S_2 ne l'est pas, ou quitte définitivement le système si les files des deux stations sont complètes.

Dans le travail [3] le même auteur étudie un système d'attente plus général supposant que les services exponentielles des deux stations ont des paramètres differents.

Dans ce travail on considère le système d'attente avec deux stations, S_1 et S_2, ayant les files d'attente limitées (au plus K unités pour le file de S_1 et au plus N unités pour celui de S_2) avec les lois de service exponentielles négatives de paramètre r_1 pour S_1 et r_2 pour S_2, dans lequel les arrivées sont poissonnienes de paramètre a, mais on suppose q'une unité arrivée dans le système choisit la station S_1 avec la probabilité b_1 ou la station S_2 avec la probabilité $b_2 = 1 - b_1$. (Le cas $b_1 = 1$ revient au système étudié dans [3] et le cas $b_1 = 1$ et $r_1 = r_2$ revient au système étudié dans [2]).

Soit $X_i(t)$ le nombre des unités qui se trouvent dans le file d'attente de la station S_i à l'instant t, $i = 1, 2$. Si l'unité arrivée à l'instant t a choisi la station S_1 et $X_1(t) < K$ elle prend place dans le file d'attente de cette station, si $X_1(t) = K$ mais $X_2(t) < N$ l'unité prend place dans le file de S_2 et si $X_1(t) = K$ et $X_2(t) = N$ alors l'unité quite définitivement le système. De même, si l'unité arrivé à l'instant t a choisi la station S_2 elle prend place dans le file de cette station si $X_2(t) < N$, prende place dans le file de S_1 si $X_2(t) = N$ mais $X_1(t) < K$, ou quitte définitivement le système si $X_2(t) = N$ et $X_1(t) = K$.

On suppose que le temps nécessaire pour que l'unité passe d'un file à l'autre est égal à zéro.

2. Soit $P_{k,n}(t)$ la probabilité qu'à l'instant t dans le file de la station S_1 sont k unités et dans le file de la station S_2 sont n unités. Le modèle mathématique du système d'attente considéré est le système des équations différentielles

$$(1) \quad P'_{0,0}(t) = -aP_{0,0}(t) + r_1 P_{1,0}(t) + r_2 P_{0,1}(t),$$

(2) $$P'_{0,n}(t) = -(a+r_2)P_{0,n}(t) + ab_2P_{0,n-1}(t) + r_1P_{1,n}(t) + r_2P_{0,n+1}(t)$$
pour $n = 1, 2, \ldots, N-1$,

(3) $$P'_{0,N}(t) = -(a+r_2)P_{0,N}(t) + ab_2P_{0,N-1}(t) + r_1P_{1,n}(t),$$

(4) $$P'_{k,0}(t) = -(a+r_1)P_{k,0}(t) + ab_1P_{k-1,0}(t) + r_1P_{k+1,0}(t) + r_2P_{k,1}(t)$$
pour $k = 1, 2, \ldots, K-1$,

(5) $$P'_{k,n}(t) = -(a+r_1+r_2)P_{k,n}(t) + ab_1P_{k-1,n}(t) + ab_2P_{k,n-1}(t) + r_1P_{k+1,n}(t) + r_2P_{k,n+1}(t)$$
pour $k = 1, 2, \ldots, K-1$ et $n = 1, 2, \ldots, N-1$,

(6) $$P'_{k,N}(t) = -(a+r_1+r_2)P_{k,N}(t) + aP_{k-1,N}(t) + ab_2P_{k,N-1}(t) + r_1P_{k+1,N}(t)$$
pour $k = 1, 2, \ldots, K-1$,

(7) $$P'_{K,0}(t) = -(a+r_1)P_{K,0}(t) + ab_1P_{K-1,0}(t) + r_2P_{K,1}(t),$$

(8) $$P'_{K,n}(t) = -(a+r_1+r_2)P_{K,n}(t) + ab_1P_{K-1,n}(t) + aP_{K,n-1}(t) + r_2P_{K,n+1}(t) \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots, N-1,$$

(9) $$P'_{K,N}(t) = -(r_1+r_2)P_{K,N}(t) + aP_{K-1,N}(t) + aP_{K,N-1}(t).$$

On prouve que la relation naturelle

(10) $$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} P_{k,n}(t) = 1$$

est une conséquence de (1)—(9).

Pour le cas du régime permanent $P_{k,n}(t) = p_{k,n}$ (donc $P'_{k,n}(t) = 0$) et le modèle mathématique sera

(11) $$-ap_{0,0} + r_1p_{1,0} + r_2p_{0,1} = 0,$$

(12) $$-(a+r_2)p_{0,n} + ab_2p_{0,n-1} + r_1p_{1,n} + r_2p_{0,n+1} = 0$$
pour $n = 1, 2, \ldots, N-1$,

(13) $$-(a+r_2)p_{0,N} + ab_2p_{0,N-1} + r_1p_{1,N} = 0,$$

(14) $$-(a+r_1)p_{k,0} + ab_1p_{k-1,0} + r_1p_{k+1,0} + r_2p_{k,1} = 0$$
pour $k = 1, 2, \ldots, K-1$,

(15) $$-(a+r_1+r_2)p_{k,n} + ab_1p_{k-1,n} + ab_2p_{k,n-1} + r_1p_{k+1,n} + r_2p_{k,n+1} = 0$$
pour $k = 1, 2, \ldots, K-1$ et $n = 1, 2, \ldots, N-1$,

(16) $$-(a+r_1+r_2)p_{k,N} + ap_{k-1,N} + ab_2p_{k,N-1} + r_1p_{k+1,N} = 0$$
pour $k = 1, 2, \ldots, K-1$,

(17) $$-(a+r_1)p_{K,0} + ab_1p_{K-1,0} + r_2p_{K,1} = 0,$$

(18) $$-(a+r_1+r_2)p_{K,n} + ab_1p_{K-1,n} + ap_{K,n-1} + r_2p_{K,n+1} = 0$$
pour $n = 1, 2, \ldots, N-1$.

(19) $$-(r_1+r_2)p_{K,N} + ap_{K-1,N} + ap_{K,N-1} = 0,$$

les probabilités des états vérifiant aussi la relation naturelle

(20) $$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} p_{k,n} = 1.$$

3. On appelle équation de rang (k, n) l'équation du système (1)—(9) ayant $P'_{k,n}(t)$ comme membre gauche. En multipliant par $x^k y^n$ l'équation de rang (k, n) du système (1)—(9) et en faisant la somme par rapport à k et n on obtient

(21) $$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} x^k y^n P'_{k,n}(t) = -(a+r_1+r_2)\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} x^k y^n P_{K,N}(t) + r_2\sum_{k=0}^{K} x^k P_{k,0}(t) + r_1\sum_{n=0}^{N} y^n P_{0,n}(t) + ax^K y^N P_{K,N}(t) + ab_1\sum_{k=1}^{K}\sum_{n=1}^{N} x^k y^n P_{k-1,n}(t) + ab_2\sum_{k=0}^{K} x^k y^n P_{k,n-1}(t) + ab_1\sum_{k=1}^{K} x^k y^N P_{k-1,N}(t) + ab_2\sum_{n=1}^{N} x^K y^n P_{K,n-1} + r_1\sum_{k=0}^{K-1}\sum_{n=0}^{N} x^k y^n P_{k+1,n}(t) + r_2\sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^k y^n P_{k,n+1}(t).$$

Soit

(22) $$G(x, y, t) = \sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N-1} x^k y^n P_{k,n}(t)$$

la fonction génératrice de probabilité. Alors

(23) $$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N} x^k y^n P'_{k,n}(t) = \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t},$$

(24) $$\sum_{k=0}^{K} x^k P_{k,N}(t) = \frac{1}{N!}\,\frac{\partial^N G(x, y, t)}{\partial y^N},$$

(25) $$\sum_{n=0}^{N} y^n P_{K,n}(t) = \frac{1}{K!}\,\frac{\partial^K G(x, y, t)}{\partial x^K}$$

et

(26) $$P_{K,N}(t) = \frac{1}{K!\,N!}\,\frac{\partial^{K+N} G(x, y, t)}{\partial x^K \partial y^N}.$$

Ainsi, la relation (21) poura être écrite

(27) $$\frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t} = -ab_1(1-x) + ab_2(1-y) + r_1\left(1 - \frac{1}{x}\right) + r_2\left(1 - \frac{1}{y}\right) G(x, y, t) +$$

$$+\frac{ab_2}{N!}(x-y)y^N\frac{\partial^N G(x,\ y,\ t)}{\partial y^N}+\frac{ab_1}{K!}(y-x)x^K\frac{\partial^K G(x,\ y,\ t)}{\partial x^K}+$$

$$+r_1\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=0}^{N}y^nP_{0,n}(t)+r_2\left(1-\frac{1}{y}\right)\sum_{k=0}^{K}x^kP_{k,0}(t)+$$

$$+ab_1(1-y)+ab_2(1-x)\frac{x^Ky^N}{K!N!}\frac{\partial^{K+N}G(x,\ y,\ t)}{\partial x^K\partial y^N}$$

Pour le cas du régime permanent, dénotant

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{n=0}^{N}x^ky^np_{k,n}=g(x,\ y)\tag{28}$$

on trouve l'équation

$$-ab_1(1-x)+ab_2(1-y)+r_1\left(1-\frac{1}{x}\right)+r_2\left(1-\frac{1}{y}\right)g(x,\ y)+\tag{29}$$

$$+\frac{ab_2}{N!}(x-y)y^N\frac{\partial^N g(x,\ y)}{\partial y^N}+\frac{ab_1}{K!}(y-x)x^K\frac{\partial^K g(x,\ y)}{\partial x^K}+$$

$$+r_1\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=0}^{N}y^np_{0,n}+r_2\left(1-\frac{1}{y}\right)\sum_{k=0}^{K}x^kp_{k,0}+$$

$$+ab_1(1-y)+ab_2(1-x)\frac{x^Ky^N}{K!N!}\frac{\partial^{K+N}g(x,\ y)}{\partial x^K\partial y^N}=0.$$

Connaissant les probabilités $P_{k,0}(t)$ et $P_{0,n}(t)$, respectivement $p_{k,0}$ et $p_{0,n}$, les équations (27) et (29) permettent la détermination de $G(x,\ y,\ t)$, respectivement de $g(x,\ y)$.

En dérivant (29) de $K+1$ fois par rapport à x on trouve l'expression de la somme $\sum_{n=0}^{N}y^np_{0,n}$. D'un façon similaire, en dérivant (29) de $N+1$ fois par rapport à y on trouve l'expression de la somme $\sum_{k=0}^{K}x^kp_{k,0}$. Si les expressions ainsi obtenues sont introduites dans (29) on obtient

$$Ag(x,\ y)+B\frac{\partial^K g(x,\ y)}{\partial x^K}+C\frac{\partial^N g(x,\ y)}{\partial y^N}+D\frac{\partial^{K+N}g(x,\ y)}{\partial x^K\partial y^N}+\tag{30}$$

$$+\sum_{i=2}^{K+1}B_i\frac{\partial^{K+1-i}g(x,\ y)}{\partial x^{K+1-i}}+\sum_{j=2}^{N+1}C_j\frac{\partial^{N+1-j}g(x,\ y)}{\partial y^{N+1-j}}=0,$$

où

$$A=-ab_1[1+Kx-(K+1)^2x^2]-ab_2[1+Ny-(N+1)^2y^2]-\tag{31}$$

$$-(K+2)r_1\left(1-\frac{1}{x}\right)-(N+2)r_2\left(1-\frac{1}{y}\right),$$

$$B=\frac{ab_1}{K!}[-(K+1)^2x^{K+2}+K(K+2)x^{K+1}+\tag{32}$$

$$+K(K+1)x^{K+1}y-(K^2+K+N)x^Ky+(N+1)x^Ky^2],$$

$$C=\frac{ab_2}{N!}[-(N+1)^2y^{N+2}+N(N+2)y^{N+1}+N(N+1)y^{N+1}x-\tag{33}$$

$$-(N^2+N+K)y^Nx+(K+1)y^Nx^2],$$

$$D=\frac{ab_1}{K!N!}[K(K+1)x^{K+1}y(1-y)-(K^2+N^2+K+N-1)x^Ky^N+\tag{34}$$

$$+(K^2+2N^2+K+3N)x^Ky^{N+1}-(N+1)^2x^Ky^{N+2}]+$$

$$+\frac{ab_2}{K!N!}[N(N+1)y^{N+1}x^K-(N^2+K^2+N+K-1)y^Nx^K+$$

$$+(N^2+2K^2+N+3K)y^Nx^{K+1}-(K+1)^2y^Nx^{K+2}],$$

$$B_i=(-1)^{i-1}r_1(x^{1-i}-x^{-i})\frac{(K+1)!}{(K+1-i)!},\qquad i=2,\ 3,\ \ldots,\ K+1\tag{35}$$

et

$$C_j=(-1)^{j-1}r_2(y^{1-j}-y^{-j})\frac{(N+1)!}{(N+1-j)!},\qquad j=2,\ 3,\ \ldots,\ N+1.\tag{36}$$

4. Pour le cas particulier $K=N=1$ la solution du système d'équations (11)—(19) est

$$p_{0,0}=\frac{r_1r_2}{L}(2a+r_1+r_2),\tag{37}$$

$$p_{0,1}=\frac{ar_1}{L}[a+b_1(r_1+r_2)],\tag{38}$$

$$p_{1,0}=\frac{ar_2}{L}[a+b_2(r_1+r_2)],\tag{39}$$

$$p_{1,1}=\frac{a^2}{L}(a+b_1r_1+b_2r_2)\tag{40}$$

où

$$L=(a+r_1+r_2)(a^2+ab_2r_1+ab_1r_2+r_1r_2)+ar_1r_2.\tag{41}$$

Pour le même cas particulier, en régime transitoire, on utilise la méthode d'approximation décrite dans le travail [4]. On dénote

$$P_{0,0}(t)=P_0(t),\ \ P_{0,1}(t)=P_1(t),\ \ P_{1,0}(t)=P_2(t),\ \ P_{1,1}(t)=P_3(t)\ \text{ et}$$

le système (1)—(9) peut être écrit

$$P'(t)=MP(t)\tag{42}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} -a & r_2 & r_1 & 0 \\ ab_2 & -(a+r_2) & 0 & r_1 \\ ab_1 & 0 & -(a+r_1) & r_2 \\ 0 & a & a & -(r_1+r_2) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P(t) = \begin{pmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix}.$$

En supposant qu'à l'instant $t = 0$ le système d'attente est vide,

$$P(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

La solution de l'équation (42) peut être écrite

$$P(t) = P(0)e^{Mt}. \tag{44}$$

Ainsi, le problème est réduit au calcul des éléments de la matrice M.

On sait que

$$e^{Mt} = E + \frac{Mt}{1!} + \frac{M^2t^2}{2!} + \ldots \tag{45}$$

la série étant absolument convergente. (Ici E dénote la matrice unité d'ordre 4).

Pour $t = ih$, $h =$ constante, $i = 1, 2, \ldots$ on peut écrire

$$e^{Mt} = \left(E + \frac{Mh}{1!} + \frac{M^2h^2}{2!} + \ldots\right)^i. \tag{46}$$

On dénote

$$D_m = E + \frac{Mh}{1!} + \frac{M^2h^2}{2!} + \ldots + \frac{M^mh^m}{m!} \tag{47}$$

et on considère les approximations

$$P(ih) \approx P(0)D_m^i. \tag{48}$$

Si dans (47) on prend $m = 1$, on trouve

$$D_1 = E + Mh = \tag{49}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-ha & hr_2 & hr_1 & 0 \\ hab_2 & 1-h(a+r_2) & 0 & hr_1 \\ hab_1 & 0 & 1-h(a+r_1) & hr_2 \\ 0 & ha & ha & 1-h(r_1+r_2) \end{pmatrix}$$

et (48) donne

$$P(0) \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$P(h) \approx \begin{pmatrix} 1-ha \\ hab_2 \\ hab_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P(2h) \approx \begin{pmatrix} 1-2ha+h^2a(a+b_1r_1+b_2r_2) \\ hab_2(2-2ha-hr_2) \\ hab_1(2-2ha-hr_1) \\ h^2a^2 \end{pmatrix}.$$

Le procédé d'approximation utilisé est équivalent, pour $m = 1$, avec la méthode de Euler ([1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cernețki, V. I., Diduk, G. A., Potapenko, A. A. *Metode matematice și algoritmi în studiul sistemelor automate*, Editura Tehnică, București, 1973.

[2] Ghirtis, G. C., *A system of two servers with limited waiting rooms and certain order of visits*, Bul. Sci. Math. Grèce, **7**, Fasc. 2, 80—138 (1966).

[3] Ghirtis G. C., *A system of two servers with limited wainting rooms and certain order of visits II*, Biometrika, 55, No. 1, 223—228 (1968).

[4] Răp, I., *Metode aproximative în teoria așteptării*, *Culegere de Studii și Cercetări Economice*, Cluj-Napoca, III, 262—267 (1979).

Reçu le 1.VII.1987

Universitatea din Cluj-Napoca
Facultatea de Științe Economice,
Piața Ștefan cel Mare, nr. 1
3400-Cluj-Napoca, România