

О ВОЗМОЖНОСТЯХ АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

МАРИЯ МИХОК
(Клуж-Напока)

Введение. Номографические методы решения уравнений продолжают сохранять свою актуальность и значение даже в последние десятилетия, когда усовершенствование электронных вычислительных машин получило особый размах. Это объясняется тем, что области применения этих методов и электронных вычислительных машин не совпадают полностью. Несмотря на их стремительное развитие, особенно в отношении скорости вычисления и повышенной способности сохранять информацию, электронные вычислительные машины позволяют получить лишь номограммы таблицы с многими входами (в зависимости от числа переменных уравнения). В этих таблицах чтение значений неизвестного оказывается очень трудным. На номограмме результаты читаются непосредственно, хотя и с меньшей, но с практически приемлемой точностью. При этом номограмма выявляет и другие связи между переменными величинами уравнения, которое изображается с помощью этой номограммы, а также позволяет исследование поведения кривых и т.д. Можно сказать, что «один рисунок стоит тысячи слов».

Дальнейшее усовершенствование вычислительных систем, как например, оснащение их графическими регистраторами, привело к использованию вычислительных машин и в области автоматического построения некоторых номограмм, улучшив номографическую технику. Способность графопостроителя (плоттер), соединенного непосредственно (on-line) с электронной вычислительной машиной, рисовать любой тип кривых позволило использовать его для построения номограмм со значительной степенью сложности.

Первые номограммы, разработанные с помощью электронного вычислителя, появились в шестидесятых годах. Многочисленные работы последних двух десятилетий, среди которых С. Н. Борисов [1], [2], [3], А. Левенс [7], В. В. Чибисов [3], [5], Д. Г. Лаптева [4], Е. Мошел [10], Д. Кжелдхал [6], М. Михок [8], [9] свидетельствуют о все более возрастающем интересе и внимании к автоматическому построению номограмм.

К этой области относится и настоящая работа, изучающая возможность автоматического построения некоторых номограмм для уравнений с

тремя переменными величинами. При этом даются конкретные номограммы, построенные с помощью разработанных программ.

1. Для построения некоторых номограмм посредством электронной вычислительной машины мы разработали набор программ, которые позволяют номографическое изображение уравнений с тремя переменными с помощью номограмм с помеченными прямыми и линиями. Для этого был использован вычислительный комплекс, состоящий из мини-электронной вычислительной машины NOVA 3/12 с внутренним запоминающим устройством в 64 К байт, и в качестве периферийных устройств: накопитель на магнитных дисках в объёме 10 М байт, считыватель перфокарт и перфоратор бумажной ленты, считыватель перфокарт, печатающее устройство и графопроектор (плоттер) COM PLOT DP 1 Houston Instrument, находящийся в Вычислительном Центре Института физики (I.T.I.M.) города Клужа-Напока, Румыния. Программы, сгруппированные в два пакета, были написаны на языке Фортран IV и с небольшими изменениями могут быть перенесены в любую другую вычислительную конфигурацию, имеющую графопроектор (плоттер).

2. Для использования программ номографического изображения уравнения с тремя переменными

$$(1) \quad F(z_1, z_2, z_3) = 0$$

необходимо разложить его на три уравнения, которые представляют собой семейства линий с одним параметром:

$$(2) \quad f_i(x, y, z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

и называются разложенные уравнения.

Для упрощения построения и использования номограммы, можно выбрать два из этих семейств таким образом, чтобы они образовали декартову сеть; обычно, прямые этих семейств начертаны эквидистантно (равностояще).

Самой общей формой уравнения (1), изображаемого номограммой, образованной из трёх семейств, помеченных прямых является уравнение Коши (Cauchy):

$$(3) \quad f_1 \cdot f_2 + f_2 \cdot f_3 + f_3 \cdot f_1 = 0$$

В этом случае все уравнения (2) являются линейными относительно координат x и y .

Помимо уравнений типа (3) мы занимались и уравнениями (1), для которых два уравнения из (2) являются линейными, а третье — общее уравнение второй степени с коэффициентами, которые являются функциями переменной z_3 :

$$(4) \quad A(z_3)x^2 + B(z_3)xy + C(z_3)y^2 + D(z_3)x + E(z_3)y + F(z_3) = 0$$

Выбирая семейства, соответствующие первым двум переменных

$$(5) \quad x = \mu_1 f_1(z_1), \quad y = \mu_2 f_2(z_2)$$

с модулями:

$$(6) \quad \mu_1 = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{f_1(z_{1\max}) - f_1(z_{1\min})}, \quad \mu_2 = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{f_2(z_{2\max}) - f_2(z_{2\min})}$$

где $x_{\max} - x_{\min} = l$ — длина номограммы

$y_{\max} - y_{\min} = h$ — ширина номограммы,

получаем уравнение третьего семейства, которое является или (4), или её частным случаем (уравнение прямой):

$$(7) \quad M(z_3)x + N(z_3)y + P(z_3) = 0$$

Разработанные программы позволяют автоматическое построение номограмм, соответствующих уравнениям (1), которые принадлежат к вышеуказанным типам.

С помощью этих программ мы прослеживали создание удобного аппарата, который позволит номографическое изображение большого числа уравнений между различными пределами изменчивости возникающих здесь переменных, изменение этих пределов при необходимости, увеличение или уменьшение определённых частей номограммы, изучение поведения кривых семейств номограммы или их огибающих, взаимодействие между переменными уравнения.

Программы были задуманы, чтобы работать в диалоговом режиме, при котором пользователь может удовлетворить вышеупомянутые потребности и получить желаемую номограмму или даже несколько номограмм, увеличивая соответственным образом части, которые представляют особый интерес.

3. Пакет NOMDRE предназначен для номографического изображения уравнений (3). При этом пользователь должен найти способы приведения уравнения (1) к форме (3), если это возможно.

Пакет содержит главную программу REPRE и следующие подпрограммы:

- F1, F2 — вычисляют значения функций тех семейств, которые образуют регулярную декартову сеть;
- F3, F31 — вычисляют значения функций левого члена уравнения (7), абсциссу и соответственно ординату из (7);
- F32 — даёт абсциссу точки пересечения одной прямой из третьего семейства с лучком прямых из начала оси координат;
- F33 — даёт абсциссу точки пересечения одной прямой из третьего семейства с лучком прямых из начала оси координат;
- DES1, DES3 — печатают пометки прямых первых двух семейств;
- DES5, DES6 — печатают пометки прямых третьего семейства следующим образом: налево, наверху, направо или внизу относительно рамки номограммы;
- DES7, DES8 — печатают пометки прямых третьего семейства следующим образом: налево, наверху, направо или внизу относительно рамки номограммы;
- SCRV, SCRS — позволяют печатать переменные трёх семейств прямых;
- SCRL — печатает название номограммы.

Главная программа REPRE имеет структуру, приводимую в блок-схеме, рис. 1:

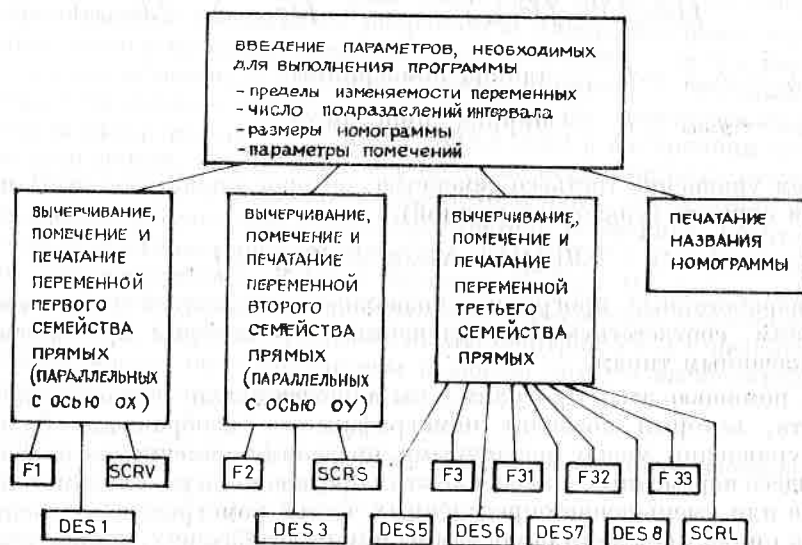


Рис. 1

Блоки блок-схемы рис. 1 реализуют следующие функции: в первый, от консоли, вводятся параметры программы, касающиеся установления пределов изменяемости переменных уравнения, размеров изображения, расположения номограммы на странице.

Второй и третий блоки вычерчивают, помечают и печатают переменные первого и второго семейств прямых, используя подпрограммы F1, F2, DES1, DES2, SCRv, SCR5. Следующий блок вычерчивает, помечает и печатает переменные третьего семейства прямых с подпрограммами F3, F31, F32, F33, DES5, DES6, DES7, DES8, SCRL. Последний блок используется для печатания названия номограммы.

Вычерчивание прямых из первых двух семейств не вызвало осложнений. Но что касается третьего семейства, хотя известно его уравнение, возникла проблема начертания, но только тех отрезков прямых, которые включены в первоначально установленную рамку номограммы, следовательно только тех частей, которые совмещаются с первыми двумя семействами.

Одна часть из третьего блока анализирует точки пересечения каждой прямой семейства, уточняя точки её «входа» и «выхода» из рамки рисунка.

Для действительного вычерчивания прямых семейств понадобилось перенести реальную прямоугольную систему координат xOy в декартову систему XOY , которая имеет то же начало, что и начало плоттера. Помимо этого, при вычерчивании прямых прослеживался переход к их параметрическим уравнениям, рассматривая пучок прямых с центром в начале сис-

темы координат XOY ; его уравнение:

$$(8) \quad Y = T \cdot X,$$

где параметр изменяется лишь в первом квадранте $T \in [0 \infty)$. Начальные и конечные значения параметра пучка, для каждой прямой в отдельности найдены с помощью точек входа вышеуказанных прямых.

В точках помечения семейств прямых пользователь имеет возможность, посредством некоторых параметров программы, выбирать помечение каждой прямой или только некоторых из них. Помечение осуществляется посредством подпрограмм DES.

Программу REPRE можно инициализировать необходимое число раз для разных пределов изменяемости переменных, получая таким образом разные номограммы для одного и того же уравнения, но в разных ситуациях, в зависимости от размеров рисунка, деталей, плотности прямых семейств, окраски изображения.

Параметры главной программы вводятся в диалоговом режиме от пульта управления ЭВМ. Ниже приводится пример такого диалога с программой REPRE.

```

НАЗВАНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ:      (Q),      (P),      (Z)
НАЗВАНИЕ НОМОГРАММЫ: НОМОГРАММА С ПОМЕЧЕННЫМИ ПРЯМЫМИ
.....
                        ДЛЯ УРАВНЕНИЯ: Z * * 3 + P * Z * * 2 + Q=0
ПРЕДЕЛЫ ИЗМЕНЯЕМОСТИ ПЕРЕМЕННЫХ: ZM, ZO:
ZM:      2000      10      17
-----
ZO:      - 2000   - 10   - 17
ЧИСЛО РАЗДЕЛОВ ПЕРЕМЕННЫХ; NZ: 50 40 68
РАЗМЕРЫ НОМОГРАММЫ; XMIN, XMAX, YMIN, YMAX: 0 20 0 15
КООРДИНАТЫ НАЧАЛА ГРАФОПОСТРОИТЕЛЯ (ПЛОТ); OX, OY: 0 0
СЕМЕЙСТВО; 1, 2, 3 ? : 1
ЧИСЛО ПОМЕЧЕННЫХ РАЗДЕЛОВ ПО-ВЕРТИКАЛИ; IV: 5
СЕМЕЙСТВО; 1, 2, 3 ? : 2
ЧИСЛО ПОМЕЧЕННЫХ РАЗДЕЛОВ ПО-ГОРИЗОНТАЛИ: IS: 4
СЕМЕЙСТВО; 1, 2, 3 ? : 3
ЧИСЛО РАЗД. ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ; T: 10
ЧИСЛО ПОМЕЧЕННЫХ РАЗДЕЛОВ СПРАВА/СЛЕВА: IL: 2
СЕМЕЙСТВО; 1, 2, 3 ? : 4

```

Проверка программы была осуществлена для одного из уравнений типа Коши, часто используемых в практике:

$$(9) \quad z^m + p \cdot z^n + q = 0$$

Для иллюстрации мы избрали $m = 3, n = 2$, отмечая при этом, что подобным же образом и с небольшими изменениями в подпрограммах

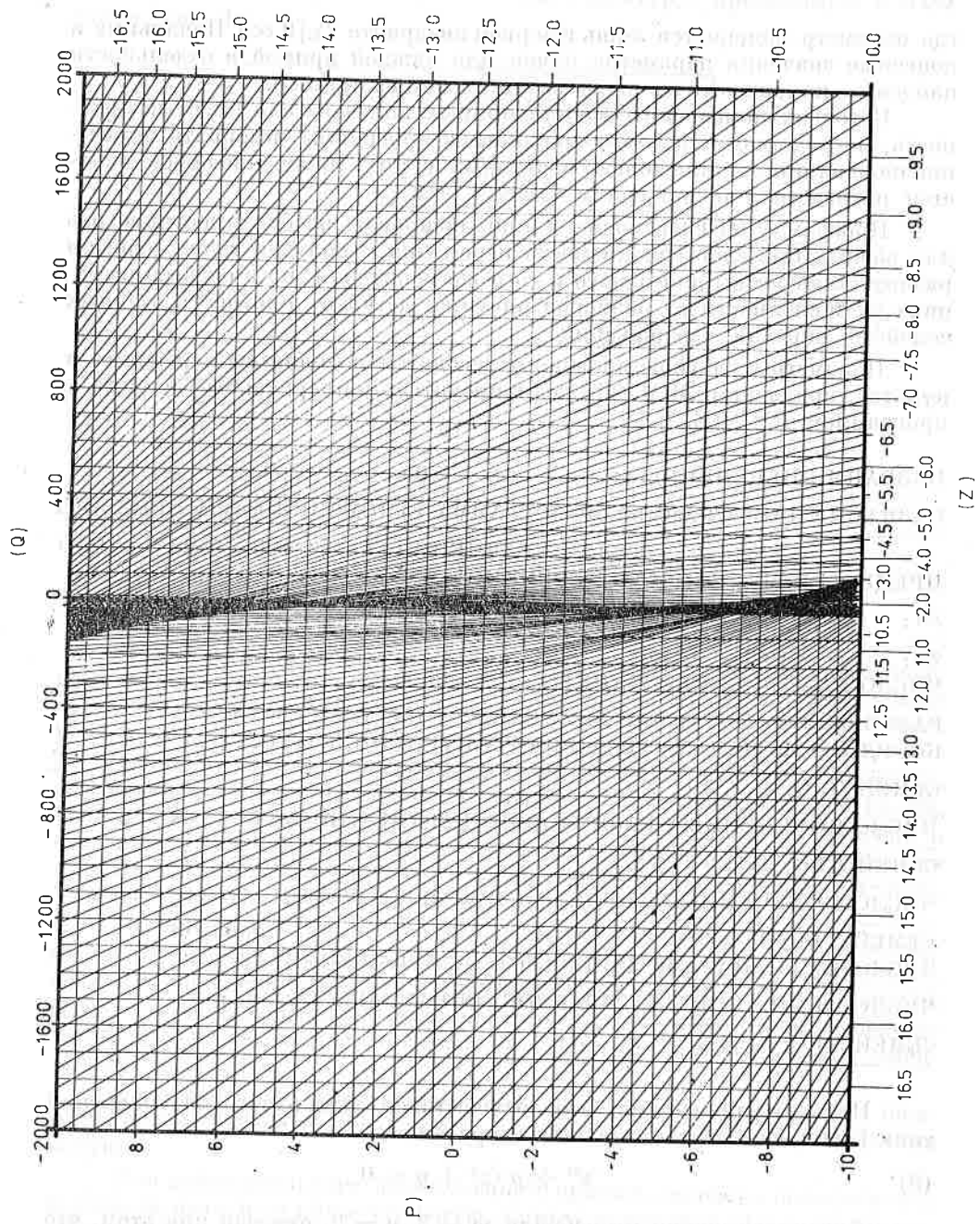


Рис. 2. — Номограмма с прямыми для уравнения: $Z^{**3} + P*Z^{**2} + Q = 0$

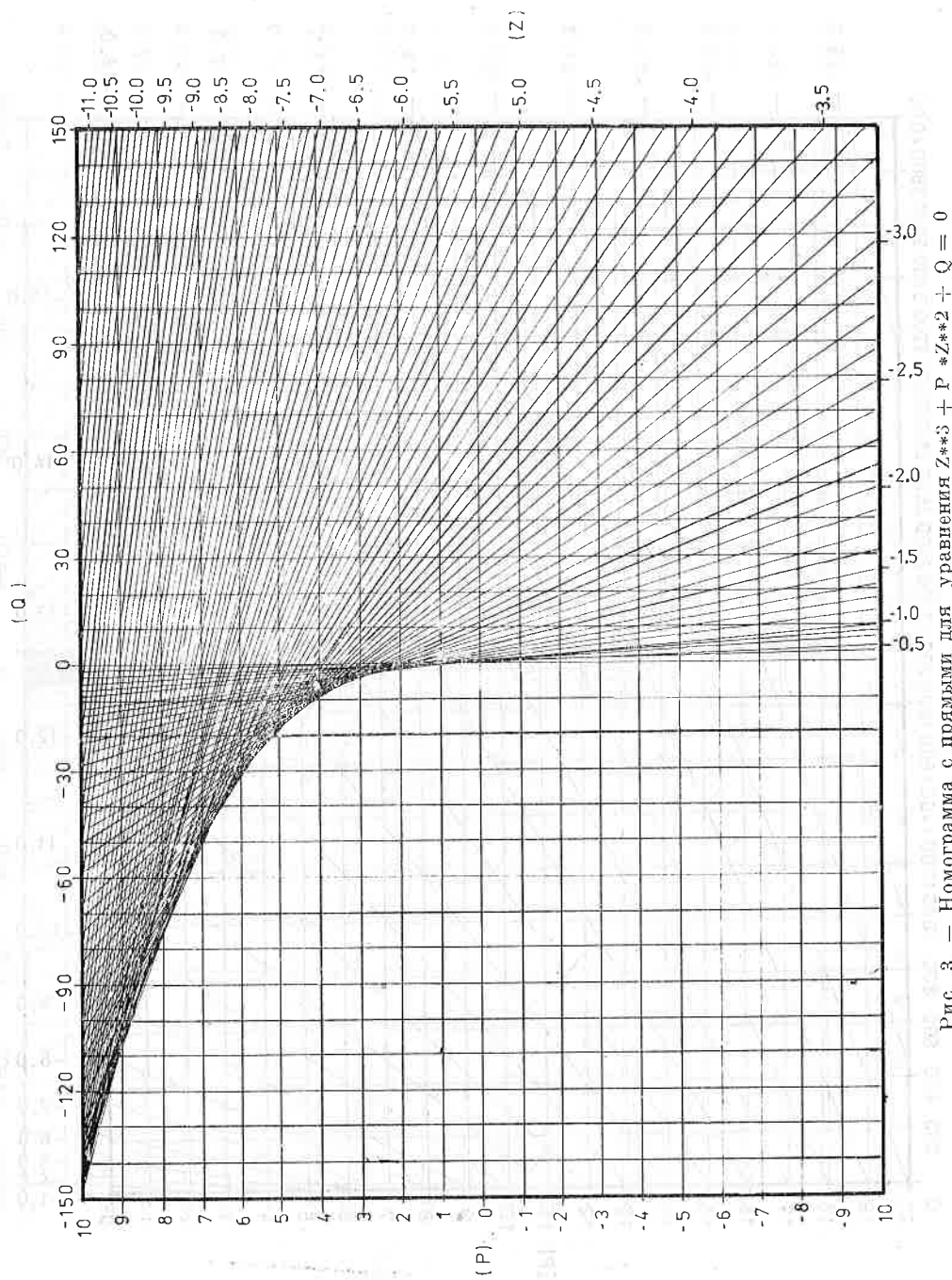


Рис. 3. — Номограмма с прямыми для уравнения $Z^{**3} + P*Z^{**2} + Q = 0$

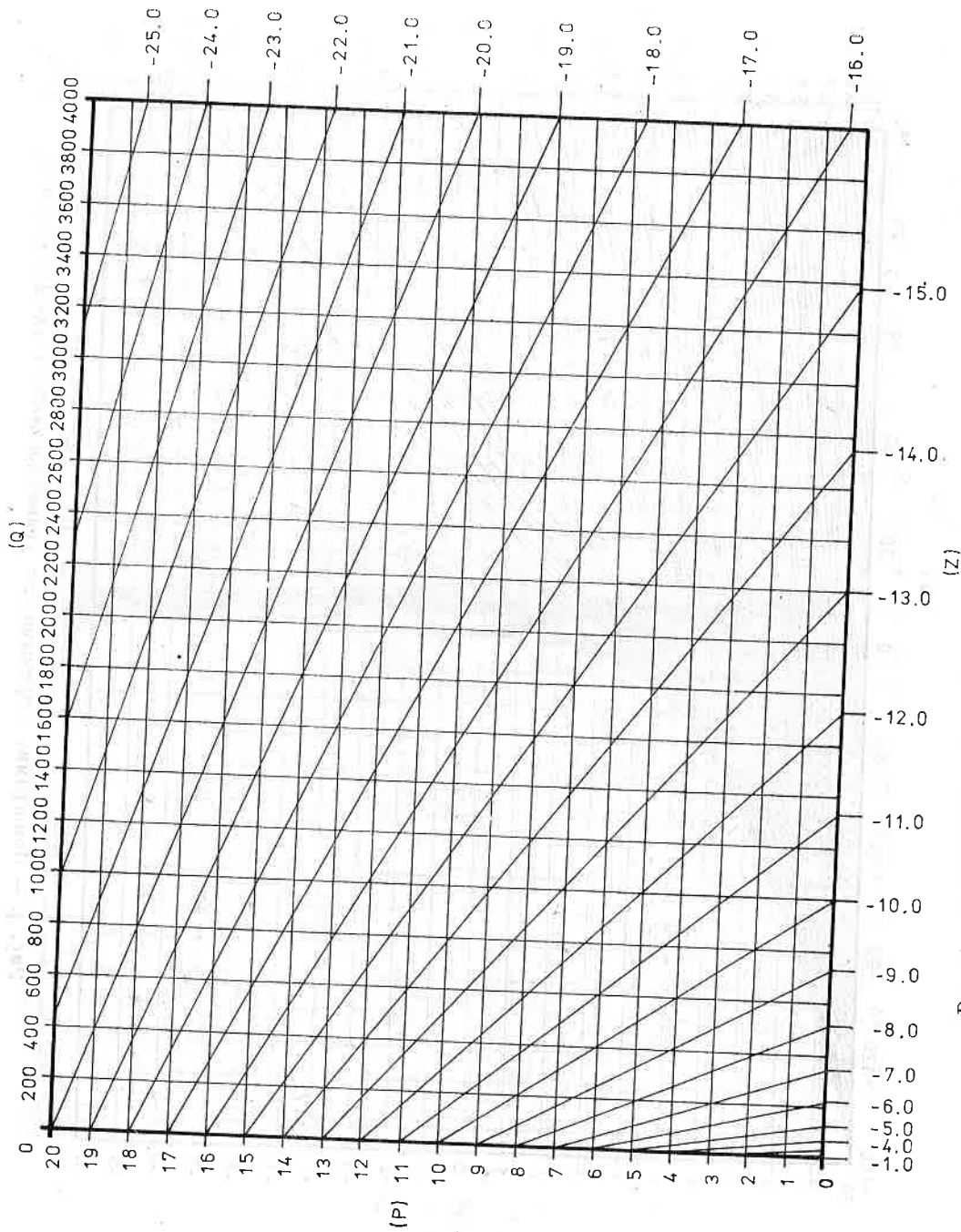


Рис. 4а — Номограмма с прямыми для уравнения: $Z^3 + P \cdot Z^2 + Q = 0$

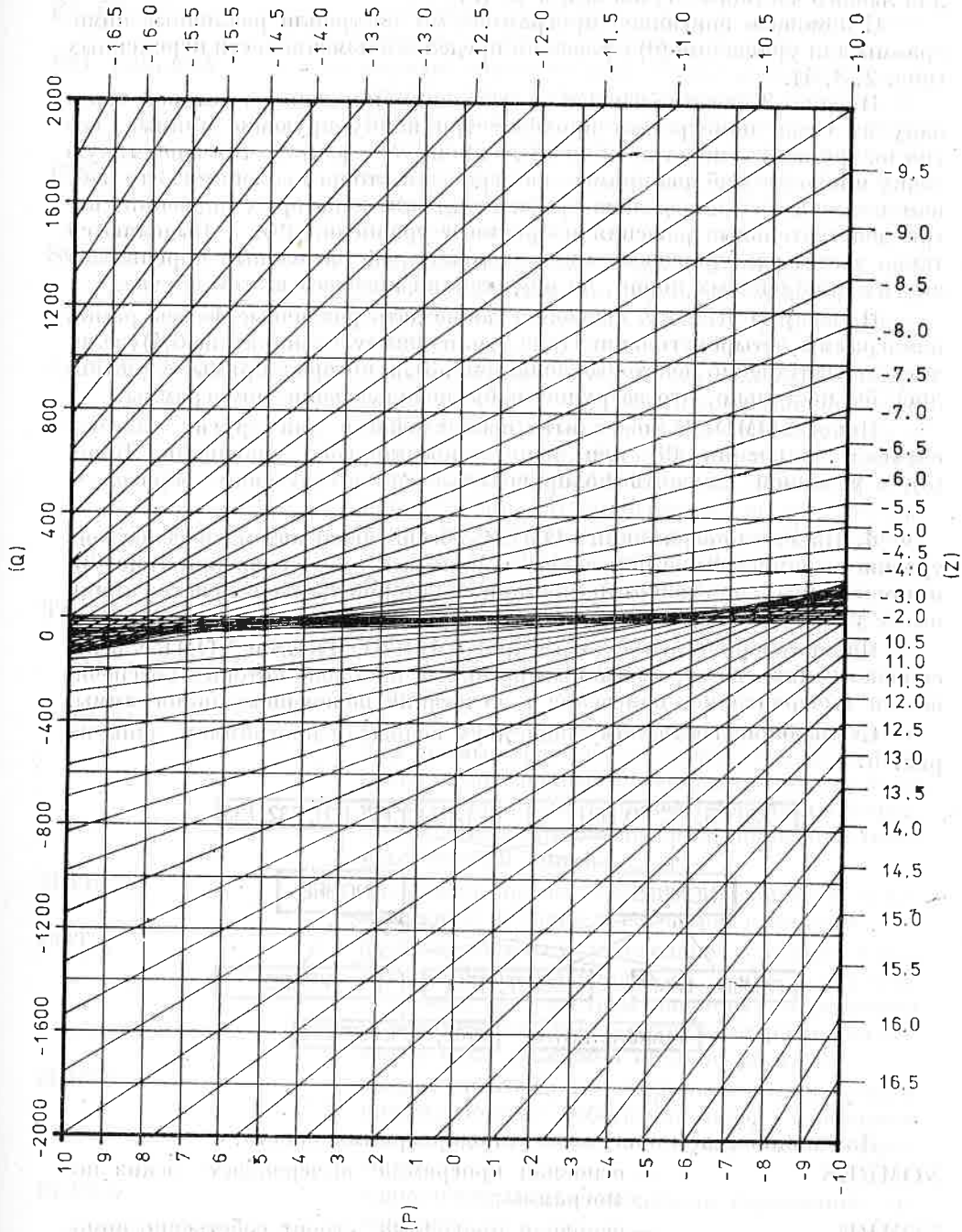


Рис. 4б. — Номограмма с прямыми для уравнения: $Z^3 + P \cdot Z^2 + Q = 0$

F3, F31, F32, F33 можно получить номограммы с помеченными прямыми для любого частного случая m и n из (9).

С помощью описанной программы, мы построили различные номограммы для уравнения (9) с разными пределами изменяемости переменных (рис. 2, 3, 4).

На рис. 2 особо обращает на себя внимание зона, в которой через одну из точек номограммы проходят три конкурирующие прямые, все три из третьего семейства (за исключением того факта, что через такую точку проходят ещё две прямых из первого и второго семейств). Это даёт нам возможность определить графически, для некоторых значений, все три действительные решения избранного уравнения (9). Выделяются такие части, где уравнение имеет только действительный корень, два других комплексных корня, не представляя интереса в этом случае.

Программа REPRE позволяет также дать различные формы рамки номограммы, четырёхугольника (рис. 2) или прямоугольника (рис. 6, 4) увеличить соответственно некоторые зоны (рис. 3), в которых прямые уплотнились бы настолько, что затруднили бы использование номограммы.

Пакет NOMDRE может быть использован и для других частных случаев уравнения (9) или какого-либо другого уравнения Коши (3), с условием изменить подпрограммы соответствующим образом.

4. Пакет с программами NOMLIC обеспечивает автоматическое построение и номограммы с помеченными прямыми (для уравнений типа (3), и номограммы с помеченными линиями, в которой третье семейство линий имеет уравнение (4)).

Пакет содержит две основные программы NOMRES и NOMRE и несколько подпрограмм, вызванных из них, с помощью которых обеспечивается вычерчивание, помечение и печатание переменных номограммы.

Схемы-блок, соответствующие двум основным программам, даны на рис. 5.

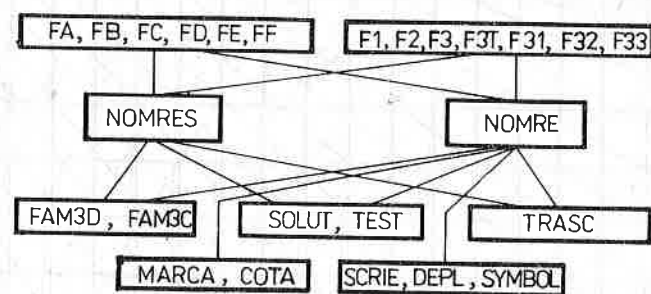


Рис. 5.

Далее описываем программы и подпрограммы пакета:

- NOMRES — основная программа вычерчивает эскиз номограммы;
- NOMRE — основная программа, строит собственно номограмму;

- FA, FB, FC, FD, FE, FF — подпрограммы, необходимые для вычисления коэффициентов уравнения (4);
- F1, F2, F3 — вычисляют функции, соответствующие уравнениям семейств прямых и линий;
- F31, F32, F33 — выдают ординаты или абсциссы точек пересечения кривых третьего семейства с прямыми, параллельными осям координат, соответственно с пучком прямых из начала рисунка;
- F3T — выдает абсциссы тангентов, содержащихся в рисунке, проведенных от его начала до кривых третьего семейства;
- SOLUT — подпрограмма, выдающая для каждой кривой линии семейства число решений и их значения в случае пересечения линий с рамками номограммы;
- FAM3D, FAM3C — подпрограммы, которые устанавливают координаты пунктов «входа» и «выхода» для каждой линии третьего семейства номограммы в рамках рисунка: FAM3D — для уравнений первой степени, FAM3C — для уравнений второй степени. Подпрограммы выдают также число частей каждой линии (кривой), расположенной во внутренней части изображения и направление их начертания;
- TEST — проверяет, не является ли эвклидова дистанция между пунктами входа и выхода той же самой кривой большей, чем допускаемый порог;
- TRASC — подпрограмма, которая вычерчивает линии или прямые третьего семейства, учитывая тангенты, проведенные к соответственной кривой от начала рисунка: выдает координаты точек, необходимых для обозначения помечения соответствующей линии;
- MARCA — обозначает прямые или линии семейств в зависимости от шага и желаемой величины;
- COTA — печатает пометку (численное значение параметра семейства) справа от линии семейства, позволяет посредством заданных параметров программы печатание различных размеров пометки и на желаемой стороне рисунка;
- DEPL — выдает число единиц ширины пометки каждой линии: помимо собственно цифр, единицами считаются и знак и маркер десятичного числа;
- SCRIE — подпрограмма для печатания переменных семейства;
- SYMBOL — печатает название номограммы.

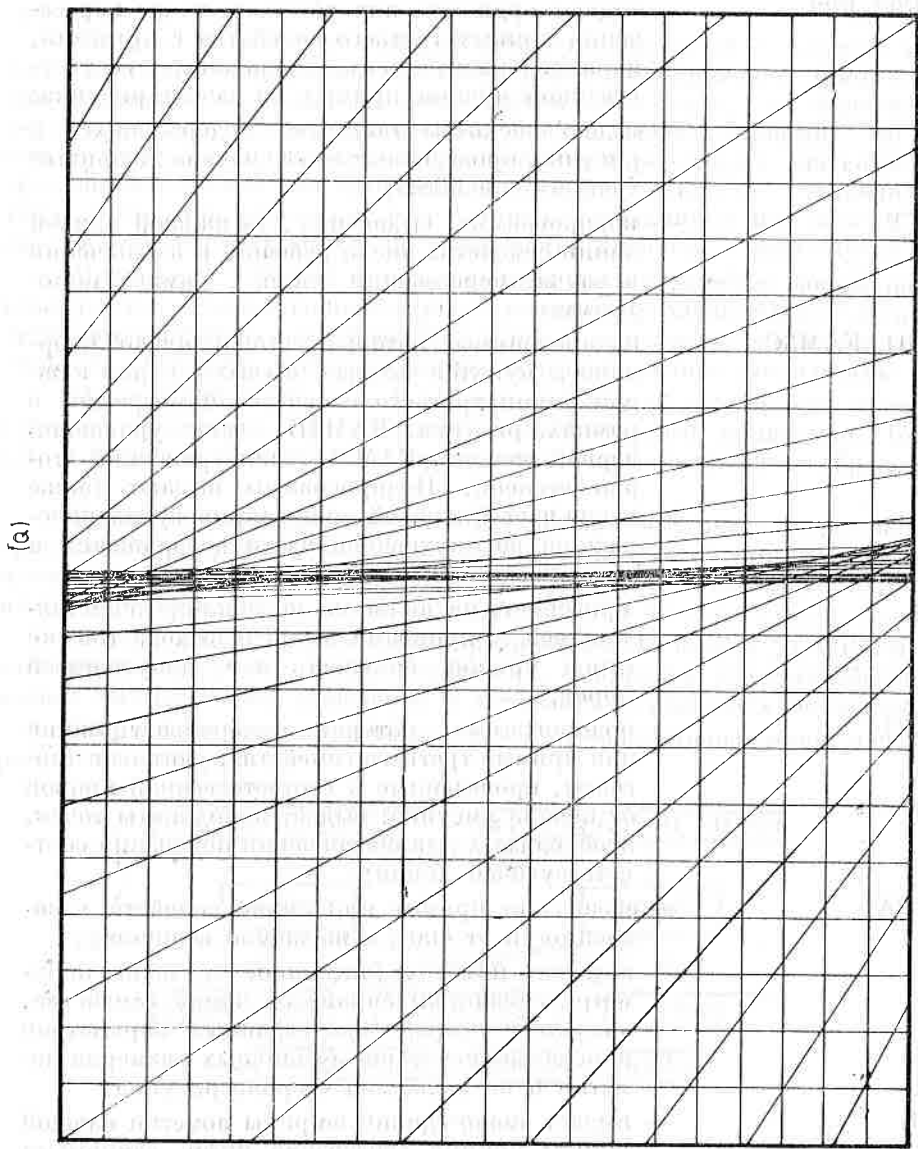


Рис. 6. — Номограмма с прямыми для уравнения: $Z^{*3} + P^*Z^{*2} + Q = 0$

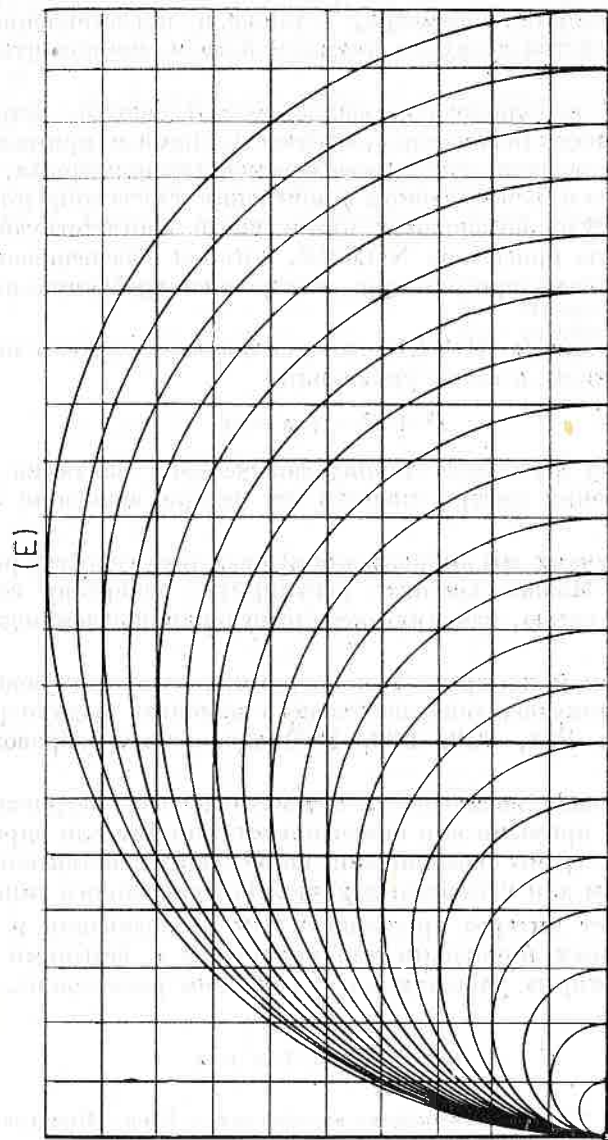


Рис. 7. — Номограмма с прямыми для уравнения: $E^{*2} + L^{*2} - L^*E = 0$

Основная программа NOMRES позволяет выполнить на основе заданных параметров эскиз номограммы, обобщённое изображение, лишь априорно интуитивное. Этот эскиз даёт общее представление о номограмме, о направлении, о плотности линий третьего семейства, в зависимости от пределов изменемости параметра, а также и представление об отношении этого семейства к другим двум семействам, компонентам декартовой сети.

На основе исполненного эскиза пользователь устанавливает область изменемости переменных, плотность линий и прямых семейств, шаг маркера и помечение для каждого семейства номограмм, плотность знаков, цифр и букв, используемых в помечении и печатание номограммы. Эти требования удовлетворяются путём ввода соответствующих параметров в основную программу NOMRE, которая обеспечивает, вместе с вышеупомянутыми подпрограммами, построение требуемой номограммы уравнений.

С помощью пакета NOMLIC мы реализовали эскизы номограммы уравнения (9), рис. 6, а также уравнения:

$$(10) \quad e^2 + i^2 - l \cdot e = 0$$

которое позволяет вычислить длину физического маятника, в зависимости от расстояния центра тяжести от центра вращения и радиуса инерции (рис. 7).

И в этих случаях мы выбрали для первых двух семейств регулярную декартову сеть. Можно заменить регулярную декартову сеть другой функциональной сетью, изменяя соответствующим образом подпрограммы F1, F2.

В случае иной конкретной номограммы, соответствующей другим уравнениям упомянутого типа, необходимо изменить подпрограммы F1, F2, а также F3, F31, F32, F33, F3T адекватным образом.

5. Мы показали возможность автоматического построения некоторых номограмм с прямыми или помеченными линиями для определённого типа уравнений с тремя переменными, нарисовав в действительности несколько номограмм для конкретных уравнений указанного типа.

Представляет интерес продолжить эти исследования в целях построения составных номограмм для уравнений с четырьмя или более переменными, которые удовлетворяют условиям разделения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов С. Н., *Автоматизация расчёта шкал*. В кн. «Номограф. сб. № 2» М., ВЦ АН СССР, 1964, стр. 85—90.
2. Борисов С. Н., *Автоматизация конструирования циркулярных номограмм*. В кн. «Номограф. сб. № 12» М., ВЦ АН СССР, 1978.
3. Борисов С. Н., Чибисов В. В., *Конструирование и вычерчивание номограмм второго эсакра для уравнения вида $f_1 + f_2 = f_3$ с использованием ЭЦВМ*. В кн. «Номограф. сб. № 10» М., ВЦ АН СССР 1975, стр. 54—67.
4. Борисов С. Н., Лаптева Д. Г., *Автоматизация конструирования номограмм с прозрачным ориентированным транспортном, ромбоидальным и бари-*

центрических для систем уравнений при заданных параметрах сдвига. В кн. «Номограф. сб. № 13» М. ВЦ АН СССР, 1982, стр. 126—146.

5. Чибисов В. В., *Вычерчивание и оформление номограмм на графопроектеле, подключенном к машине БЭСМ — 6*. В кн. «Номограф. сб. № 9» М. ВЦ АН СССР, 1973, стр. 169—176.
6. Kjell Dahl, L., *Design and implementation of a nomogram drawing system*, TRITA-NA. 7803, Dep. Inf. Process. Computer Sci., Royal Inst. Techn., Stockholm, 1978.
7. Levens, A. S., *Computerized nomogram plotting*, J. Engin. Graphics, **29**, 1, 1964 — 65, p. 12—13.
8. Mihos, M., *La construction automatique des nomogrammes aux droites cotées pour les équations à trois variables*, Mathematica — Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation, L'Analyse num. et la théorie de l'approximation, **9** (1980), № 2, 221—231.
9. Mihos, M., *Reprezentarea nomografică a diferitelor tipuri de ecuații prin nomograme care conțin scări rectilinii*, Teză de doctorat, Cluj-Napoca, 1981.
10. Mocheil, E., *Computer produced nomographs*, J. Engin. Graphics, **33** (1969), № 1, 37—49.

Поступила в редакцию 1.10.1986

Institutul de cercetare științifică pentru tehnica de calcul și informatică, Filiala Cluj-Napoca Str. Republicii 109 3400 Cluj-Napoca România