MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 17, N° 1, 1988, pp. 49—52

UNE CLASSE GÉNÉRALE D'OPÉRATEURS POLYNÔMIAUX

RADU PĂLTĂNEA
(Brașov)

Dans cet article nous considérons une classe générale d'opérateurs de type Bernstein, définis de la manière suivante : Considérons le poids $\mu(t) := t^a(1-t)^b \rho(t)$, où $a > -1$, $b > -1$, $\rho \in C[0,1]$ est strictement positive et le produit scalaire correspondant : $\langle f, g\rangle_\mu := \int_0^1 f(t)\cdot g(t)\cdot \mu(t)\mathrm{d}t$.

Soit encore $p \in (0,\infty) \cup \{\infty\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Designons par $M_n^{\mu,p} : \mathscr{L}_\mu\,[0,1] \to \to \pi_n$ l'opérateur :

$$M_n^{\mu,p}\,[f](x) := \sum_{k=0}^{n} a_{n,k,p}(f)\cdot p_{n,k}(x), \text{ où :}$$

$$(1) \qquad a_{n,k,p}(f) := \begin{cases} \langle f, (p_{n,k})^p\rangle_\mu \,/\, \langle e_0, (p_{n,k})^p\rangle_\mu & \text{si } p \in (0,\infty) \\ \lim\limits_{p\to\infty} (\langle f, (p_{n,k})^p\rangle_\mu \,/\, \langle e_0, (p_{n,k})^p\rangle_u) & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

$$p_{n,k,}(x) := \binom{n}{k}\cdot x^k\cdot(1-x)^{n-k}\ (n, k \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ x \in [0,1])$$

et

$$e_0(t) := 1\ \ (t \in [0,1]).$$

Remarques. 1° Si $p = +\infty$, $a > -1$, $b > -1$ et ρ est une fonction continue, strictement positive, arbitraire, on obtient l'opérateur de Bernstein.

2° Si $p = 1$, $a = 0 = b$ et $\rho = e_0$ on obtient l'opérateur de Durrmeyer [1].

3° Si $p = 1$, $a > -1$, $b > -1$ et $\rho = e_0$ on obtient l'opérateur défini dans [2].

Nous prouvons le théorème suivant :

THÉORÈME. *La suite* $(M_n^{\mu,p}[f])_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f, *pour toutes les fonctions* $f \in C[0,1]$.

Démonstration. En tenant compte de la Remarque 1° il suffit de considérer le cas $p < \infty$. Choisirons une fonction $\rho \in C[0,1]$ strictement positive et les nombres $a > -1$, $b > -1$, $p \in (0, \infty)$, et nous écrirons $m := \min\{\rho(t),\ t \in [0,1]\}$ et $\mu(t) := t^a \cdot (1-t)^b \cdot \rho(t)$.

Considérons un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Prenons δ tel que : $0 < \delta < \min\{\varepsilon/(4+\varepsilon), 1\}$. Alors on a les inégalités : $1 - \varepsilon/2 < (1-\delta)/(1+\delta)$ et $(1+\delta)/(1-\delta) < 1 + \varepsilon/2$. Il existe un $q \in \mathbb{N}$ tel que le polynôme de Bernstein $B_q[\rho](x) := \sum_{i=0}^{q} \rho(i/q) \cdot p_{q,i}(x)$ satisfait à l'inégalité : $\| B_q[\rho] - \rho \| < \delta \cdot m$. Écrivons $D_i := \binom{q}{i} \cdot \rho(i/q) > 0$, $(i = \overline{0, q})$, $\mu^*(t) := t^a(1-t)^b \cdot B_q[\rho](t)$, et $e_j(x) := x^j$ $(j = 0, 1, 2)$, $x \in [0,1]$. On a :

$$M_n^{\mu^*,p}[e_j] = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle e_j, (p_{n,k})^p\rangle_\mu + \int_0^1 e_j(t) \cdot (p_{n,k}(t))^p \cdot [B_q[\rho](t) - \rho(t)] \cdot t^a \cdot (1-t)^b \, dt}{\langle e_0, (p_{n,k})^p\rangle_\mu + \int_0^1 (p_{n,k}(t))^p [B_q[\rho] - \rho(t)] \cdot t^a (1-t)^b \, dt} \cdot p_{n,k}$$

À l'aide des inégalités : $-\delta \cdot \rho(t) < B_q[\rho](t) - \rho(t) < \delta \cdot \rho(t)$, $t \in [0,1]$, on obtient :

$$M_n^{\mu^*,p}[e_j](x) < ((1+\delta)/(1-\delta)) \cdot M_n^{\mu,p}[e_j](x) < (1+\varepsilon/2) \cdot M_n^{\mu,p}[e_j](x),$$

et

$$M_n^{\mu^*,p}[e_j](x) > ((1-\delta)/(1+\delta)) \cdot M_n^{\mu,p}[e_j](x) > (1-\varepsilon/2) \cdot M_n^{\mu,p}[e_j](x)$$

pour $x \in [0,1]$. Donc :

$$\|M_n^{\mu^*,p}[e_j] - M_n^{\mu,p}[e_j]\| < (\varepsilon/2) \cdot \|M_n^{\mu,p}[e_j]\| < \varepsilon/2, \quad j = 0, 1, 2, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

On a :

$$M_n^{\mu^*,p}[e_0] = e_0. \tag{3}$$

Calculons :

$$M_n^{\mu^*,p}[e_1](x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \cdot$$

$$\cdot \frac{\sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q-i+b+1) \cdot \dfrac{kp+i+a+1}{pn+q+a+b+2}}{\sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q-i+b+1)} =$$

$$= \frac{p}{np+q+a+b+2} \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}^1 \cdot p_{n,k}(x),$$

où

$$c_{n,k}^1 = \frac{\sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q-i+b+1) \cdot (i+a+1)}{(np+q+a+b+2) \cdot \sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q-i+b+1)}.$$

En utilisant la relation $\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_{n,k}(x) = n \cdot x$ et l'inégalité

$$0 \leqslant c_{n,k}^1 \leqslant \frac{q+a+1}{np+q+a+b+2}, \text{ il résulte :}$$

$$M_n^{\mu^*,p}[e_1](x) = \frac{np}{np+q+a+b+2} \cdot x + 0(1/n) \text{ uniformément} \tag{4}$$

par rapport à $x \in [0,1]$, quand $n \to \infty$.

Par ailleurs :

$$M_n^{\mu^*,p}[e_2](x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \cdot$$

$$\cdot \frac{\sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q-i+b+1) \cdot \dfrac{(kp+i+a+2)(kp+i+a+1)}{(pn+q+a+b+3)(pn+q+a+b+2)}}{\sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q-i+b+1)} =$$

$$= \frac{p^2}{(np+q+a+b+3)(pn+q+a+b+2)} \cdot \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}^2 \cdot p_{n,k}(x)$$

où

$$c_{n,k}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q-i+b+1) \cdot (kp(2i+2a+p+3) + (i+a+2) \cdot (i+a+3))}{(pn+q+a+b+3) \cdot (pn+q+a+b+2) \cdot \sum_{i=0}^{q} D_i \cdot \beta(kp+i+a+1, pn-pk+q+b-i+1)}$$

En utilisant la relation $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \cdot p_{n,k}(x) = n(n-1) \cdot x^2$ et l'inégalité : $0 \leqslant c_{n,k}^2 \leqslant \dfrac{np(2q+2a+p+3) + (q+a+2)(q+a+1)}{(np+q+a+b+3)(np+q+a+b+2)}$, on a :

$$M_n^{\mu^*,p}[e_2](x) = \frac{p^2 \cdot n(n-1)}{(np+q+a+b+3)(np+q+a+b+2)} \cdot x^2 + 0(1/n), \tag{5}$$

uniformément par rapport à $x \in [0,1]$ quand $n \to \infty$.

D'après (3), (4), (5) il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : si $n > n_0$, $\| M_n^{\mu^*,p}[e_j] - e_j \| < \varepsilon/2$, $j = 0, 1, 2$ et en vertu de (2) on a : $\| M_n^{\mu,p}[e_j] - e_j \| < \varepsilon$. Alors on peut utiliser le théorème de Korovkin.

BIBLIOGRAPHIE

1. Durrmeyer J. L. : *Une formule d'inversion de la transformée de Laplace. Applications à la théorie de moments*. Thèse de 3-e cycle. Faculté des Sciences de l'Univ. de Paris, 1967.
2. Păltănea R. : *Sur un opérateur polynômial défini sur l'ensemble des fonctions intégrables*. Research Semin. Babeş-Bolyai Univ. Cluj-Napoca Preprint nr. 2, 1983, 101—106.

Reçu le 5.V.1987

Universitatea din Braşov
Catedra de Matematică
Str. Karl Marx nr. 50
Braşov, România