MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 18, N° 1, 1989, pp. 37—49

SUL RIFERIMENTO INTRINSECO DI UNA TRASFORMAZIONE PUNTUALE TRA DUE SPAZI EUCLIDEI

LANDO DEGOLI
(Modena)

Riassunto: Introducendo uno speciale riferimento intrinseco, il sistema algebrico di nono grado delle rette inflessionali di una trasformazione puntuale tra due S_3 euclidei si spezza in sistemi di secondo grado, consentendo di determinare le equazioni separate delle singole rette inflessionali e delle proiettività caratteristiche esistenti tra le coppie di rette corrispondenti.

1. Introduzione. Di una corrispondenza puntuale T tra due S_r Euclidei complessi nell'intorno di una coppia (O, O') di punti corrispondenti a Jacobiana $\neq 0$, sono note le seguenti proprietà.

Nell'intorno del primo ordine della coppia (O, O') se P è un punto infinitamente vicino ad O al quale corrisponde il punto P' infinitamente vicino ad O', si ha che la corrispondenza fra le direzioni OP, OP' è una proiettività non degenere ω.

Nella geometria metrica il rapporto $\dfrac{OP}{O'P'} = \chi$, detto modulo o coefficiente di dilatazione lineare, dipende soltanto dalla direzione OP.

Nell'intorno del secondo ordine di(O, O') si considerano quelle direzioni uscenti da O (da O') per le quali T conserva le inflessioni delle curve uscenti da O (da O') dette *direzioni inflessionali (o caratteristiche) di T nella coppia* (O, O').

Le direzioni inflessionali uscenti da O (da O') sono in geberale (vedi : [11]) :

$$2^r - 1.$$

Tra le coppie di rette caratteristiche corrispondenti in ω, consideriamo le proiettività in cui ai tre punti infinitamente vicini del flesso in O corrispondono i tre punti infinitamente vicini del flesso in O'.

Tali proiettività sono dette *proiettività caratteristiche di T in* (O, O') (vedi : [12]).

Riferendo la trasformazione puntuale ai tre assi, che si corrispondono nella proiettività ω, la trasformazione assume la forma :

$$y_i = a_i x_i + \sum_{k,n} b_{ikn} x_k x_n + [3] \quad (i, k, n = 1, 2, \ldots, r)$$

dove le a_i, b_{ikn} sono costanti con $a_i \neq 0$, avendo supposto la Jacobiana $\neq 0$ e dove $[3]$ rappresenta i termini di ordine > 2.

Sappiamo ancora che le coppie di punti di S_r, S_r' che si corrispondono nella proiettività caratteristiche (e, quindi, appartenenti alle rette caratteristiche) sono quelle soddisfacenti alle seguenti :

$$\binom{r}{2} + r$$

equazioni, che costituiscono *le equazioni della configurazione caratteristica* (vedi : [12]) :

$$a_k x_k y_i - a_i y_k x_i = 0$$

$$(i, k, n = 1, 2, \ldots, r, \ i \ k)$$

$$\sum_{k,n} \frac{1}{a_k} b_{ikn} x_n y_k + y_i - a_i x_i = 0$$

e le equazioni complessive delle rette inflessionali uscenti da 0 sono :

$$\frac{\sum_{k,n} b_{ikn} x_k x_n}{a_1 x_1} = \frac{\sum_{k,n} b_{2kn} x_k x_n}{a_2 x_2} = \ldots = \frac{\sum_{k,n} b_{rkn} x_k x_n}{a_r x_r}$$

Nell'S_3 Euclideo quindi le rette caratteristiche sono 7 e, finora, è risultato assai ardua determinare le loro equazioni.

Infatti, anche riferendo (vedi : [2]) la trasformazione puntuale ai *triedri principali*, cioé a quelle coppie di triedri ortogonali corrispondenti nella proiettività ω, tale riferimento non permette di pervenire alle equazioni delle rette inflessionali, né alle loro proiettività caratteristiche perchè le equazioni complessive di tali rette sono date da un sistema di nono grado!

Scopo del presente lavoro è di introdurre un riferimento proiettivo capace di risolvere completamente tale annoso problema in S_3.

2. Riferimento intrinseco. Nel caso della corrispondenza tra due S_3 Euclidei, la transformazione T referita ad assi che si corrispondono nella proiecttività assume la forma :

$$\begin{aligned} x' &= ax + a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\ (1) \qquad y' &= by + b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3] \\ z' &= cz + c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3] \end{aligned}$$

Le equazioni della configurazione caratteristica risultano :

$$\begin{aligned} axy' - byx' &= 0 \\ (2) \qquad axz' - czx' &= 0 \\ byz' - czy' &= 0 \end{aligned}$$

dove :

$$x' - ax + \frac{1}{a} a_{11} xx' + \frac{1}{b} a_{22} yy' + \frac{1}{c} a_{33} zz' + \frac{2}{b} a_{12} xy' + \frac{2}{a} a_{13} zx' + + \frac{2}{c} a_{23} yz' = 0$$

$$(3) \qquad y' - by + \frac{1}{a} b_{11} xx' + \frac{1}{b} b_{22} yy' + \frac{1}{c} b_{33} zz' + \frac{2}{b} b_{12} xy' + \frac{2}{a} b_{13} zx' + + \frac{2}{c} b_{23} yz' = 0$$

$$z' - cz + \frac{1}{a} c_{11} xx' + \frac{1}{b} c_{22} yy' + \frac{1}{c} c_{33} zz' + \frac{2}{b} c_{12} xy' + \frac{2}{a} c_{13} zx' + + \frac{2}{c} c_{23} yz' = 0$$

Infine le equazioni complessive delle rette caratteristiche sono :

$$\begin{aligned} (4) \qquad & by(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz) = \\ & = ax(b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz) \\ & cz(b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz) = \\ & = by(c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz) \\ & ax(c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz) = \\ & = cz(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz) \end{aligned}$$

Queste ultime tre equazioni non sono evidentemente indipendenti. Esse formano sì un sistema di nono grado, ma non dànno altrettante rette inflessionali in quanto solo sette di esse soddisfano all 'ultima equazione.

Infatti, ponendo : $x = 0$, otteniamo due soluzioni comuni alla prima ed alla terza equazione del sistema e precisamente :

$$x = 0$$

$$a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz = 0$$

le quali in generale non soddisfano alla seconda equazione.

Le altre soluzioni del sistema, dedotte dalla prima ed ultima equazione di (4) soddisfano sempre la seconda, onde esistono in generale sette soluzioni del sistema (4) e si può concludere, come è noto, che : „*Le rette inflessionali di una trasformazione puntuale tra due S_3 sono in generale sette.*

Per determinare le equazioni singole delle rette inflessionali, riferiremo la trasformazione T ad un triedro di riferimento tale che i suoi piani contengano ciascuno due rette inflessionali.

In tal modo una sola delle sette rette inflessionali non giace su nessuno dei piani di riferimento ed appare spontaneo assumere tale retta, nel caso proiettivo, come retta unità, cioé come retta di equazione :

$$x = y = z \quad (x' = y' = z')$$

Gli assi di tale triedro sono intrinsecamente collegati con le rette caratteristiche e per distinguerlo dal ***triedro principale*** (vedi : [2]) e dai *triedri caratteristici* (vedi : [5]) lo chiameremo ***triedro intrinseco*** ed i suoi spigoli saranno detti *assi intrinseci* o *rette intrinseche*. Esiste il :

TEOREMA. *Data una generica trasformazione puntuale, esistono 630 terne di assi intrinseci in generale distinti tra loro.*

Infatti i piani che contengono due qualunque delle rette inflessionali sono $\binom{7}{2}$, i piani che contengono due qualunque delle rimanenti sono $\binom{5}{2}$ ed infine i piani che contengono due qualunque delle tre rimanenti sono $\binom{3}{2}$, onde in totale si hanno :

$$\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2} = 630$$

terne di assi intrinseci, come volevasi dimostrare.

Perché una retta inflessionale giaccia sul piano xz, dovrà avere per equazione :

$$y = 0, \quad x = hz$$

Sostituendo nel sistema algebrico (4) ricaviamo :

$$(5) \quad \begin{cases} b_{11}h^2 + 2b_{13}h + b_{33} = 0 \\ ac_{11}h^3 + (2ac_{13} - ca_{11})h^2 + (ac_{33} - 2ca_{13})h + ca_{33} = 0 \end{cases}$$

Se vogliamo che anche il piano xy goda della stessa proprietà, imponendo che :

$$z = 0, \quad y = kx$$

sia soluzione del sistema (4) otterremo :

$$(6) \quad \begin{cases} c_{22}k^2 + 2c_{12}k + c_{11} = 0 \\ ba_{22}k^3 + (2ba_{12} - ab_{22})k^2 + (ba_{11} - 2ab_{12})k + ab_{11} = 0 \end{cases}$$

Infine imponendo al piano yz di contenere le rette inflessionali :

$$x = 0, \quad z = jy$$

si ottiene :

$$(7) \quad \begin{cases} a_{33}j^2 + 2a_{23}j + a_{22} = 0 \\ cb_{33}j^3 + (2cb_{23} - bc_{33})j^2 + (cb_{22} - 2bc_{23})j + bc_{22} = 0 \end{cases}$$

Perché le rette :

$$x = y = z, \quad x' = y' = z'$$

si corrispondano, per le equazioni della configurazione caratteristica dovrà essere :

$$(8) \qquad a = b = c$$

e perché la retta $x = y = z$ risulti una soluzione del sistema (4) dovrà essere :

$$(9) \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} = b_{11} + b_{22} + b_{33} + 2b_{12} + \\ + 2b_{13} + 2b_{23} = c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23}$$

Per la (8) le seconde equazioni dei sistemi (5), (6), (7) perdono i coefficienti a, b, c.

In ciascuno di questi sistemi formati da un'equazione di secondo e da una di terzo grado dividiamo l'equazione di terzo grado per la corrispondente di secondo e prendiamo in considerazione i resti delle divisioni.

Essi sono di primo grado in h, k, j, e, dovendo essere nulli rispettivamente per due valori di tali incognite (cioè per le radici delle equazioni di secondo grado), saranno identicamente nulli.

Uguagliando perciò a zero i coefficienti nell'espressione dei resti, si ottiene :

$$(10) \quad \begin{aligned} c_{33}b_{11}b_{33} - b_{33}^2c_{11} + 2(a_{33}b_{11}b_{13} - a_{13}b_{11}b_{33}) &= 0 \\ a_{11}b_{11}b_{33} - b_{11}^2a_{33} + 2(b_{13}b_{33}c_{11} - b_{11}b_{33}c_{13}) &= 0 \\ a_{11}c_{22}c_{11} - c_{11}^2a_{22} + 2(c_{12}b_{11}c_{22} - b_{12}c_{11}c_{22}) &= 0 \\ b_{22}c_{11}c_{22} - c_{22}^2b_{11} + 2(a_{22}c_{11}c_{12} - a_{12}c_{11}c_{22}) &= 0 \\ a_{22}a_{33}b_{22} - a_{22}^2b_{33} + 2(a_{23}a_{33}c_{22} - a_{22}a_{33}c_{23}) &= 0 \\ a_{22}a_{33}c_{33} - a_{33}^2c_{22} + 2(a_{22}a_{23}b_{33} - a_{22}a_{33}b_{23}) &= 0 \end{aligned}$$

Queste uguaglianze assieme alle (8) ed alle (9) sono le dieci condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti della trasformazione T' perchè il riferimento sia quello voluto.

Il numero dei coefficienti essenziali diminuisce perciò da 21 ad 11.

Inoltre se scriviamo le equazioni della trasformazione inversa T' si ottiene :

$$x = a'x' + a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x'z' + 2a'_{23}y'z' + [3]$$

$$y = b'y' + b'_{11}x'^2 + b'_{22}y'^2 + b'_{33}z'^2 + 2b'_{12}x'y' + 2b'_{13}x'z' + 2b'_{23}y'z' + [3]$$

$$z = c'z' + c'_{11}x'^2 + c'_{22}y'^2 + c'_{33}z'^2 + 2c'_{12}x'y' + 2c'_{13}x'z' + 2c'_{23}y'z' + [3]$$

in cui per la nota corrispondenza delle settime rette inflessionali $x = y = z$, $x' = y' = z'$ dovrà essere:

$$a' = b' = c'$$

Inoltre tra i coeficienti delle due trasformazioni sussistono le relazioni:

$$a \cdot a' = 1$$

e ancora:

$$\frac{a_{ik}}{a'_{ik}} = \frac{b_{ik}}{b'_{ik}} = \frac{c_{ik}}{c'_{ik}} = -a^3 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Si può verificare immediatamente che anche nello spazio S'_r i coefficienti della trasformazione inversa soddisfano alle condizioni (8), (9) e (10).

3. Equazioni delle rette inflessionali. Dalle prime equazioni dei sistemi (5), (6) e (7) ricaviamo:

$$h = \frac{-b_{13} \pm \sqrt{b_{13}^2 + b_{11}b_{33}}}{b_{11}}$$

$$k = \frac{-c_{12} \pm \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}}{c_{22}}$$

$$j = \frac{-a_{23} \pm \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{33}}$$

Per cui le equazioni delle singole rette caratteristiche riferite agli assi intrinseci ed adagiate sui piani del triedro di riferimento sono:

$$(11) \qquad \begin{aligned} x &= 0 \qquad z = \frac{-a_{23} \pm \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{33}}\, y \\ y &= 0 \qquad x = \frac{-b_{13} \pm \sqrt{b_{13}^2 - b_{11}b_{33}}}{b_{11}}\, z \\ z &= 0 \qquad y = \frac{-c_{12} \pm \sqrt{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}}{c_{22}}\, x \end{aligned}$$

La settima retta inflessionale ha, come sappiamo l'equazioni:

$$x = y = z$$

Le equazioni complessive delle prime sei rette si possono anche scrivere:

$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad a_{33}z^2 + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz = 0 \\ y &= 0 \qquad b_{11}x^2 + b_{33}z^2 + 2b_{13}xz = 0 \\ z &= 0 \qquad c_{22}y^2 + c_{11}x^2 + 2c_{12}xy = 0 \end{aligned}$$

Le rette corrispondenti nello spazio S'_3 hanno equazioni del tutto analoghe alle precedenti.

4. Equazioni delle proiettività caratteristiche. Le equazioni della configurazione caratteristica nel riferimento intrinseco assumono la forma:

$xy' = yx', \quad xz' = zx', \quad yz' = zy'$

$$(13) \qquad \begin{aligned} &ax' - a^2x + a_{11}xx' + a_{22}yy' + a_{33}zz' + 2a_{12}xy' + 2a_{13}zx' + 2a_{23}yz' = 0 \\ &ay' - a^2y + b_{11}xx' + b_{22}yy' + b_{33}zz' + 2b_{12}xy' + 2b_{13}zx' + 2b_{23}yz' = 0 \\ &az' - a^2z + c_{11}xx' + c_{22}yy' + c_{33}zz' + 2c_{12}xy' + 2c_{13}zx' + 2c_{23}yz' = 0 \end{aligned}$$

Tenendo presente le (13) e le equazioni delle rette inflessionali, si ottengono subito dalle (11) le equazioni delle proiettività caratteriche sulle prime sei coppie di rette. Esse sono:

$$(14) \qquad \begin{aligned} z' &= \frac{az}{1 + (c_{11}h^2 + 2c_{12}h + c_{33})\dfrac{z}{a}} \\ x' &= \frac{ax}{1 + (a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11})\dfrac{x}{a}} \\ y' &= \frac{ay}{1 + (b_{33}j^2 + 2b_{23}j + b_{22})\dfrac{y}{a}} \end{aligned}$$

dove al posto di h, k, j vanno poste le radici delle equazioni:

$$\begin{aligned} b_{11}h^2 + 2b_{13}h + b_{33} &= 0 \\ c_{22}k^2 + 2c_{12}k + c_{11} &= 0 \\ a_{33}j^2 + 2a_{23}j + a_{22} &= 0 \end{aligned}$$

La proiettività caratteristica nella coppia di rette:

$$x = y = z, \quad x' = y' = z'$$

assume la seguente forma:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{ax}{1 + (a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23})\dfrac{x}{a}} \\ y' &= \frac{ay}{1 + (b_{11} + b_{22} + b_{33} + 2b_{12} + 2b_{13} + 2b_{23})\dfrac{y}{a}} \\ z' &= \frac{az}{1 + (c_{11} + c_{22} + c_{33} + 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23})\dfrac{z}{a}} \end{aligned}$$

5. Il riferimento intrinseco nella geometria metrica. Nella geometria affine e quindi in quella metrica è ancora possibile scegliere il riferimento in modo che i piani del triedro di riferimento contengano ciascuno due rette inflessionali, ma la settima retta inflessionale, che non giace su nessuno dei piani di riferimeno, non avrà in generale le equazioni: $x = y = z$ $(x' = y' = z')$. Inoltre le rette aventi tale equazione non si corrispondono in generale nella proiettività ω, onde sarà:

$$a \neq b, \quad b \neq c, \quad a \neq c.$$

Le condizioni a cui debbono soddisfare i coefficienti della trasformazione T perchè le rette inflessionali appartengano ai piani del triedro intrinseco sono le stesse già viste in precedenza cioè le condizioni estratte da (5), (6) e (7). Dividendo ogni equazione di terzo grado in h, k, j per la corrispondente di secondo grado ed uguagliando a zero i coefficienti dei resti ottenuti, risultano le seguenti relazioni tra i coefficienti della trasformazione:

$$a_{13} = \frac{ab_{33}(c_{33}b_{11} - b_{33}c_{11}) + 2a_{33}b_{11}b_{13}}{2cb_{11}b_{33}}$$

$$a_{12} = \frac{ac_{22}(b_{22}c_{11} - b_{11}c_{22}) + 2ba_{22}c_{11}c_{12}}{2bc_{11}c_{22}}$$

$$b_{12} = \frac{bc_{11}(a_{11}c_{22} - c_{11}a_{22}) + 2ac_{12}b_{11}c_{22}}{2ac_{11}c_{22}}$$

$$b_{23} = \frac{ba_{33}(a_{22}c_{33} - a_{33}c_{22}) + 2ca_{22}a_{23}b_{33}}{2ca_{22}a_{33}}$$

$$c_{13} = \frac{cb_{11}(a_{11}b_{23} - b_{11}a_{33}) + 2ab_{13}b_{33}c_{11}}{2ab_{11}b_{33}}$$

$$c_{13} = \frac{ba_{33}(a_{22}c_{33} - a_{33}b_{22}) + 2ca_{22}a_{23}b_{33}}{2ca_{22}a_{33}}$$

Ne consegue che nel caso metrico perchè il riferimento sia quello voluto, occorre che il numero dei coefficienti essenziali passi da 21 a 15.

Le equazioni delle rette caratteristiche giacenti sui piani del triedro di riferimento risultano esattamente le stesse già viste nel caso proiettivo e sono date dalle (12). Ben diverse sono le equazioni della settima retta inflessionale. Per determinarle scriviamo le prime due equazioni del sistema (4) ordinate secondo le potenze decrescenti della x, dopo di che, eliminando la x mediante il determinante di Sylvester otterremo:

$$(14) \qquad \begin{vmatrix} a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 - a_3b_0 \\ a_0b_2 & a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_0b_3 & a_1b_3 - a_3b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 \end{vmatrix} = 0$$

in cui è:

$$\begin{aligned} a_0 &= ab_{11} \\ a_1 &= 2(ab_{12} - ba_{11})y + 2ab_{13}z \\ a_2 &= (ab_{22} - 2ba_{12})y^2 + (2ab_{23} - 2ba_{13})yz + ab_{33}z^2 \\ a_3 &= -ba_{22}y^3 - 2ba_{23}zy^2 - ba_{33}z^2y \\ b_1 &= -bc_{11}y + cb_{11}z \\ b_2 &= -2bc_{12}y^2 + 2(cb_{12} - bc_{13})yz + 2cb_{13}z^2 \\ b_3 &= -bc_{22}y^3 + (cb_{22} - 2bc_{23})zy^2 + (2cb_{23} - bc_{33})z^2y + cb_{33}z^3 \end{aligned}$$

L'equazione (14) è di nono grado omogenea in y, z. Intersecando le rette inflessionali col piano:

$$z = \lambda$$

cioè sostituendo λ al posto di z nella (14), si ottiene un'equazione in y di cui conosciamo otto radici e precisamente:

le sei radici corrispondenti all'intersezione del suddetto piano con le sei rette inflessionali giacenti sui piani del triedro di riferimento:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = \infty, \quad y_4 = \infty, \quad y_5 = \frac{1}{j_1}\lambda, \quad y_6 = \frac{1}{j_2}\lambda$$

dove j_1 e j_2 sono le due radici dell'equazione di secondo grado tra le (7), inoltre esistono altre due soluzioni nulle:

$$y_7 = 0, \quad y_8 = 0$$

perché le prime due equazioni del sistema (4) ammettono le soluzioni:

$$y = 0$$
$$b_{11}x^2 + b_{33}z^2 + 2b_{13}xz = 0$$

soluzioni, che non soddisfano in generale la terza equazione del sistema.

Eliminando le otto radici, si ottiene:

$$(15) \qquad y = \frac{\alpha a_{23} - \beta a_{22}}{\alpha a_{22}}\lambda$$

dove:

$$(16) \qquad \begin{aligned} \alpha &= b_1A - a_0(B + C - 2D) + c_1E - F \\ \beta &= c_1A - a_0(B_1 + C_1 - 2D_1) + b_1E_1 - F_1 \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} A = {} & (du - gr)(mw + nt - ps - eq - fs) + \\ & + (dv - hr + en - gs)(mh + ns - ek + pr - dq) + \\ & + (dw - jr + ev - hs + fu - gt)(mu + nr - dk) \end{aligned}$$

$$B = u^2(mw + nt - fk + ps - eq) + 2uv(mh + ns - ek + pr - dq) + \\ + (v^2 + 2rt)(mu + nr - dk)$$

$$C = r^2(dw + ev + fu - gt - hs - jr) + 2rw(dv + eu - gs - hr) + \\ + (s^2 + 2rt)(du - gr - dk)$$

$$D = (nu - gk)(rw + sv + tu) + (nv + pu - gq - hk)(rv + st) + \\ + rs(nw + ov - hq - jk)$$

$$E = (du - gr)(mv + ns + pr - ek - dq) + \\ + (dv + eu - gs - hr)(mu + nr - dk)$$

(17)

$$F = (nv + pu - gq - hk)^2 v + 2k(nu - gk)(nw + pv - hq - jk) + \\ + 2q(nu - gk)(nv + pu - gq - hk)$$

$$B_1 = u^2(mi + pt - fq) + 2uv(mw + nt + ps - fq - eq) + \\ + (v^2 + 2uw)(mv + ns + pr - ek - dq) + \\ + 2(vw + ui)(mu + br - dk)$$

$$C_1 = r^2(di + ew + fv - ht - js) + 2rs(dw + jv + fu - gt - hw - jr) + \\ + 2st(du - gr) + (s^2 + 2rt)(dv + eu - gs - hr)$$

$$D_1 = (nu - gk)(ir + sw + tv) + (nv + pu - gq - hk)(rw + sv + tu) + \\ + ru(ni + pw - jq) + (rv + su)(nw + pv - hq - jk)$$

$$E_1 = (du - gr)(mi + ps - fq) + \\ + (dv + eu - gs - hr)(mw + nt + ps - fk - eq) + \\ + (dw + ev + fu - gt - jr - hs)(mv + ns + pr - ek - \\ - dq) + (di + ew + fv - ht - js)(mu - nr - dk)$$

$$F_1 = q(nv + pu - gq - hk)^2 + 2q(nu - gk)(nw + pv - hq - jk) + \\ + 2k(nu - gk)(ni + pw - jq) - 2(nv + pu - gq - hk) \\ (nw + pv - hq - jk)$$

in cui è:

(18)

$d = ab_{22} - 2ba_{12}$	$j = -ba_{33}$	$r = -2bc_{12}$
$e = 2(ab_{23} - ba_{13})$	$k = -bc_{11}$	$s = 2(cb_{12} - bc_{13})$
$f = ab_{33}$	$m = ab_{11}$	$t = 2cb_{13}$
$g = -ba_{22}$	$n = 2ab_{12} - ba_{11}$	$u = -bc_{22}$
$h = -2ba_{23}$	$p = 2ab_{13}$	$v = cb_{22} - 2bc_{23}$
$i = cb_{33}$	$q = cb_{11}$	$w = 2ab_{23} - bc_{33}$

Ordinando la prima e l'ultima equazione del sistema (4) secondo le potenze decrescenti di y, eliminando y tra le due equazioni e ripetendo un analogo calcolo, si ottiene in x, z, la quale per $z = \lambda$ porge un'equazione di nono grado omogenea in x e λ, di cui si conoscono otto radici: le sei corrispondenti alle intersezioni del piano $z = \lambda$ con le prime sei rette inflessionali: $x = 0$, $x = 0$, $x = \infty$, $x = \infty$, $x = h_1\lambda$, $x = h_2\lambda$ e le altre due radici nulle, che non soddisfano la restante equazione del sistema (4).

Eliminando le otto radici si ottiene:

$$x = \frac{\gamma b_{13} + \delta b_{11}}{\gamma b_{11}} \lambda \tag{19}$$

dove γ e δ si ottengono, come α e β, dalle (16) e (17), ponendo però in quest'ultime invece dei valori dati dalle (18) i valori seguenti:

(20)

$d = ba_{11} - 2ab_{12}$	$j = -ab_{33}$	$r = -2ac_{12}$
$e = 2(ba_{13} - ab_{23})$	$k = -ac_{11}$	$s = 2(ca_{12} - ac_{23})$
$f = ba_{33}$	$m = ba_{22}$	$t = 2ca_{23}$
$g = -ab_{11}$	$n = 2ba_{12} - ab_{22}$	$u = -ac_{11}$
$h = -2ab_{13}$	$p = 2ba_{23}$	$v = ca_{11} - 2ac_{13}$
$i = ca_{13}$	$q = ca_{22}$	$w = 2ca_{13} - ac_{33}$

ossia scambiando nelle espressioni di α e β:

$$a,\ a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$$

rispettivamente con:

$$b,\ b_{22},\ b_{11},\ b_{33},\ b_{12},\ b_{23},\ b_{13}$$

e viceverssa e lasciando inalterati i seguenti coefficienti:

$$c,\ c_{11},\ c_{22},\ c_{33},\ c_{12},\ c_{13},\ c_{23}$$

Quindi, riassumendo, per le (15) e (19) le equazioni della retta inflessionale non giacente su nessuno dei piani del triedro intrinseco sono:

$$x = \frac{\gamma b_{13} - \delta b_{11}}{\gamma b_{11}} \lambda$$

$$y = \frac{\alpha a_{23} - \beta a_{22}}{\alpha a_{22}} \lambda$$

$$z = \lambda$$

Come abbiamo visto le equazioni delle rette caratteristiche giacenti sui piani del triedro intrinseco sono le stesse tanto in geometria proiettiva che in geometria metrica, sempre però che si tratti dello spazio S_3. A causa però del fatto che nella geometria metrica non è più vero che sia $a = b = c$ le suddette equazioni sono leggermente diverse in S'_3. Esse risultano :

$$x' = 0 \qquad z' = \frac{-a_{23} \pm \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}}{a_{33}} \frac{c}{b} y'$$

$$y' = 0 \qquad x' = \frac{-b_{13} \pm \sqrt{b_{13}^2 - b_{11}b_{33}}}{b_{11}} \frac{a}{c} z'$$

$$z' = 0 \qquad y' = \frac{-c_{12} \pm \sqrt{c_{11}^2 - c_{11}c_{22}}}{c_{22}} \frac{b}{a} x'$$

Questo leggero cambiamento si riflette anche sulle proiettività caratteristiche sulle coppie di rette inflessionali. Per le prime sei coppie di rette si ottiene :

$$x' = \frac{ax}{1 + (a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11})\dfrac{x}{a}}$$

$$y' = \frac{by}{1 + (b_{33}j^2 + 2b_{23}j + b_{22})\dfrac{y}{b}}$$

$$z' = \frac{cz}{1 + (c_{11}h^2 + 2c_{13}h + c_{33})\dfrac{z}{c}}$$

dove al posto di h, k, j vanno poste le radici delle equazioni di secondo grado delle (5), (6), (7) :

Posto :

$$M = \frac{\alpha a_{23} - \beta a_{22}}{\alpha a_{22}}, \qquad N = \frac{\gamma b_{13} - \delta b_{11}}{\gamma b_{11}}$$

le equazioni della settima retta inflessionale in S_3 ed in S'_3 risultano :

$$z = \lambda \qquad z' = \lambda'$$

$$y = M\lambda \qquad y' = M\frac{a}{c}\lambda'$$

$$x' = N\lambda \qquad x' = N - \frac{b}{c}\lambda'$$

Sostituendo tali espressioni nelle equazioni della configurazione caratteristica, si ottiene le equazioni della proiettività caratteristica sulla settima coppia di rette inflessionali. Essa può essere scritta in una delle

seguenti forme equivalenti :

$$\lambda' = \frac{aN\lambda}{\dfrac{a}{c}M + (a_{11}N^2 + a_{22}M^2 + 2a_{12}MN + 2a_{23}M + 2a_{13}N + a_{33})\dfrac{\lambda}{c}}$$

$$\lambda' = \frac{bM\lambda}{\dfrac{b}{c}M + (b_{11}N^2 + b_{22}M^2 + 2b_{12}MN + 2b_{23}M + 2b_{13}N + b_{33})\dfrac{\lambda}{c}}$$

$$\lambda' = \frac{c\lambda}{1 + (c_{11}N^2 + c_{22}M^2 + 2c_{12}MN + 2c_{13}N + 2c_{23}M + c_{33})\dfrac{\lambda}{c}}$$

BIBLIOGRAFIA

1. Ceck, E., *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces*, Casopis Post. Mat., **74** (1949), 32—48.
2. Creangă I., *Sulle trasformazioni degli intorni del 2° ordine di due punti corrispondenti nelle corrisfondenze puntuali tra due spazi euclidei*, Rend. di Matematica, Serie V, Vol. 4, Bologna, pp. 177—189.
3. Degoli, L., *Classification intégrale des transformations ponctuelles entre deux plans*, Serdica, Bulgaricae Mathematicae Publicationes, **13** (1987), 2, Sofia.
4. Eugeni F., *Alcune proprietà delle trasformazioni puntuali tra piani affini* Riv. Mat. Univ. Parma **11** (1970), 2, 289—306.
5. Martini, Giulia, *Sulle trasformazioni puntuali tra due spazi nel caso conforme*, Rend. Istit. Lombardo Scienze e Lettere **82** (1949), Milano, 225—232.
6. Martini, Giulia, *Ricerche locali sulle trasformazioni puntuali tra due spazi*, Atti Accad. Scienze Ist. di Bologna **10** (1962—63), 11, 209—223.
7. Muracchini, L., *Trasformazioni puntuali tra due spazi che posseggono un'unica congruenza di curve caratteristiche*, Rend. Sem. Matem. Univ. e Polit. Torino, **12** (1952—53), 159—176.
8. Sangermano, C., *Sulle corrispondenze puntuali degeneri fra spazi lineari*, Mem. Accad. Scienze Ist. Bologna, **8** (1951), 10, 29—36.
9. Speranza, F., *Le trasformazioni di un piano in sé approssimabili con una trasformazione quadratica dotata di una conica di punti uniti*, Boll. Unione Matem. Ital., **19** (1964), 3, Bologna 53—59.
10. Vaona G., *Le trasformazioni tra due spazi che posseggono iperpiani di rette caratteristiche*, Rend. Semin, Matem. Univ. e Polit. Torino, **12** (1952—53), 195—238.
11. Villa, M., *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari : I Intorno del e 2° ordine, II Intorno del 3° ordine, III Trasformazioni Cremoniane osculatrici, IV Direzioni caratteristiche. Invarianti del 2° e del 3° ordine*, Rend. Accademia dei Lincei, **4** (1948), 8, Firenze, 53—71, 192—196, 295—303.
12. Villa, M., *La configurazione caratteristica di una trasformazione puntuale tra due spazi lineari*, Rend. Accademia d'Italia Ser. VII, vol. **IV** (1941), Roma 217—245.
13. Villa, M., *Le trasformazioni puntuali* Art. VIII del Repertorio di Matematiche, Cedam-Padova (1951) 225—260.

Ricevuto il 22 Aprile 1988

Prof. Lando Degoli
Via Berengario 82/C
41012 Carpi (Modena)
Italy