MATHEMATICA–REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 19, N° 2, 1990, pp. 169–171

MESURES GÉNÉRALISÉES DE L'INFORMATION

ION PURCARU
(Bucarest)

Des généralisations des principales mesures de l'information sont proposées dans cet article.

Soit X une variable aléatoire discrète à la distribution $p = (p_k)_{k=\overline{1,n}} > 0$ complète $\left(\sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right)$ ou incomplète $\left(\sum_{k=1}^{n} p_k \leqslant 1\right)$. On suppose connues les mesures de l'information proposées et étudiées dans les travaux [1] – [8]. Considérons maintenant les expressions

$$(1) \qquad H_n^{\alpha,m,\beta}(p) = \frac{1}{m-\alpha} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{\alpha-m+\beta_k} \Big| \sum_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k} \right), \quad \alpha \neq m$$

$$(2) \qquad I_n^{\alpha,m,\beta}(p) = \frac{1}{1-2^{m-\alpha}} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k} - \sum_{k=1}^{n} p_k^{\alpha-m+\beta_k} \right), \quad \alpha \neq m$$

$$(3) \qquad E_n^{\alpha,m,\beta}(p) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{\alpha-m+\beta_k}$$

où $m \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta = (\beta_k)_{k=\overline{1,n}}$, $\beta_k \geqslant 1$, $k = \overline{1,n}$
en remarquant, pour toutes les trois, la positivité, la symétrie par rapport aux paramètres (p_k) ainsi que l'invariabilité pour toute transformation biunivoque de X.

On déduit sans difficulté les suivants:

Proposition 1. *Si* $m = \alpha + \gamma(1-\delta)$, $\beta_k = \gamma \geqslant 1$, $k = \overline{1,n}$, $\delta \geqslant 0$, $\delta \neq 1$, *alors*

$$(4) \qquad H_n^{\alpha,m,\beta}(p) \Rightarrow H_n^{\delta,\gamma}(p) = \frac{1}{\gamma(1-\delta)} \log_2 \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{\gamma\delta} \Big| \sum_{k=1}^{n} p_k^{\gamma} \right)$$

$$(5) \qquad I_n^{\alpha,m,\beta}(p) \Rightarrow I_n^{\delta,\gamma}(p) = \frac{1}{1-2^{\gamma(1-\delta)}} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k^{\gamma} - \sum_{k=1}^{n} p_k^{\gamma\delta} \right)$$

$$(6) \qquad E_n^{\alpha,m,\beta}(p) \Rightarrow E_n^{\delta,\gamma}(p) = \sum_{k=1}^{n} p_k^{\gamma\delta}.$$

Proposition 2. *Des expressions* (1)—(3) *on déduit que*

1) *si* $\beta_k = m = 1$, $k = \overline{1,n}$, *alors* (1) *est l'entropie d'ordre* α *de Rényi* (1961);

2) *si* $\beta_k = 1$, $k = \overline{1,n}$, *alors* (1) *est l'entropie de Varma* (1966);

3) *si* $\beta_k + \alpha - m = 2$, $k = \overline{1,n}$, *alors* (3) *est l'energie informationnelle d'Onicescu* (1966);

4) *si* $\beta_k = b$, $k = \overline{1,n}$, *alors* (1) *est l'entropie de Kapur* (1967);

5) *si* $m = 1$, *alors* (1) *est l'entropie de Rathie* (1970);

6) $\lim\limits_{\alpha\to m} H_n^{\alpha,m,\beta}(p) = -\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\, p_k \log_2 p_k$, *qui est l'entropie aux poids de Guiaşu* (1971), *où* $u_k = p_k^{\beta_k - 1} \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} p_k^{\beta_k}$, $k = \overline{1,n}$ *d'où, pour* $\beta_k = 1$, $k = \overline{1,n}$ *on retrouve l'entropie de Shannon* (1948);

7) $\lim\limits_{\alpha\to m} I_n^{\alpha,m,\beta}(p) = -\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\, p_k \log_2 p_k$, *qui est également l'entropie aux poids de Guiaşu* (1971), *où* $u_k = p_k^{\beta_k - 1}$, $k = \overline{1,n}$, *d'où, aussi pour* $\beta_k = 1$, $k = \overline{1,n}$, *on retrouve l'entropie de Shannon* (1948);

8) *si* $\beta_k = \log_{p_k}(-\log_2 p_k)$, $k = \overline{1,n}$, *alors* (3) *est aussi l'entropie aux poids de Guiaşu* (1971), *où* $u_k = p_k^{\alpha-m-1}$, $k = \overline{1,n}$, *d'où, pour* $\alpha - m = 1$, *on retrouve également l'entropie de Shannon* (1948);

9) *si* $\beta_k = m = 1$, $k = \overline{1,n}$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, *alors* (2) *est l'entropie de Behara et Nath* (1973);

10) $E_n^{\alpha,m,\beta}(p) = E_n^{m,m,\beta}(p)\, 2^{(m-\alpha)} H_n^{\alpha,m,\beta}(p) = E_n^{m,m,\beta}(p) - (1 - 2^{m-\alpha}) I_n^{\alpha,m,\beta}(p)$.

En vertu des considérations ci-dessus données,

a) l'expression (1) sera dénommée l'entropie de Rényi d'ordre α et type $[m, (\beta_1, \ldots, \beta_n)]$ tandis que sa forme (4) sera dénommée l'entropie de Rényi d'ordre δ et type γ;

b) l'expression (2) sera dénommée α-entropie de Behara et Nath de type $[m, (\beta_1, \ldots, \beta_n)]$ tandis que sa forme (5) sera dénomée δ-entropie de Behara et Nath de type γ;

c) l'expression (3) sera dénommée l'énergie informationnelle d'Onicescu d'ordre α et type $[m, (\beta_1, \ldots, \beta_n)]$ tandis que sa forme (6) sera dénommée énergie informationnelle d'Onicescu d'ordre δ et type γ.

Les expressions (1)—(3), dénommées mesures d'ordre α et type $[m, (\beta_1, \ldots, \beta_n)]$ de l'information, ainsi que leurs formes (4)—(6), nous montrent la possibilité de la définition d'une riche famille de mesures de l'information en interdépendance les unes avec les autres et qui tendent asymptotiquement vers l'entropie de Shannon.

R E F E R E N C E S

1. Behara M., Nath P., *Additive and non additive entropies of finite measurable partitions*, Lectures Notes in Math. **296**(1973), 102—138, Springer Verlag, Berlin.
2. Guiaşu S., *Weighted entropy*, Report on Math. Physics **2**(1971), 165—179.
3. Kapur J. N., *Generalized entropy of order* α *and type* β, Math. Seminar, Delhi, **4** (1967), 78—94.
4. Onicescu O., *Energie informationnelle*, St. Cerc. Math. **13**(1966), 1419—1421.
5. Rathie, P. N., *On a generalized entropie and a coding theorem*, J. Appl. Probab., **7** (1970), 124—133.
6. Rényi A., *A measure of entropy and information*, Proc. Fourth Berkeley Symp on Math., Univ. of California Press (1961), 541—561.
7. Shannon C. E., *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. Journal, **27** (1948), 379—428, 623—656.
8. Varma R. S., *Generalizations of Rényi's entropy of order* α, J. Math. Sci Delhi, **1** (1966), 34—38.

Reçu le 5.VII.1989

Département de Mathématiques
Académie d'Études Économiques
Bucarest, Roumanie