MATHEMATICA — REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 19, N° 2, 1990, pp. 151 – 155

POINTS FIXES COMMUNS

MIHAI CRĂCIUN
(Pașcani)

Introduction. Dans cet article on présente quelques théorèmes d'existence des points fixes communs pour deux applications en espaces métriques, complets où la matrique de l'espace satisfait des inégalités non-linéaires.

Définition 1. Soit X un ensemble et $\mathscr{F} = \{f_i | i \in I, f_i : X \to X\}$. Le point $x \in X$ est un point fixe commun pour la famille $\mathscr{F}$ et $f_i(x) = x$, $\forall\, i \in I$.

L'ensemble des points fixes communs de la famille F est noteé par :

$$F_{\mathscr{F}} = \{x | f_i(x) = x, \quad \forall\, i \in I,\ x \in X\}.$$

Définition 2. Soit (X, d) un espace métrique. L'application $f: X \to X$ est une application Picard s'il y a $x^* \in X$ a.i.

$$F_f = \{x^*\}$$

et $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge à x^*(uniforme) pour tout $x_0 \in X$.

Théorème 1. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f, g : X \to X$, deux applications ayant la propriété qu'il y a $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+)$ continu et aussi $\varphi(0) = 0$, $\varphi(r) \leqslant \frac{r}{2}$, $\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi^k(t) < \infty$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$ de soite que :*

$$d(f(g(x)),\ g(y)) \leqslant d(x,\ y) + \varphi(d(x,\ g(y))), \qquad \forall\, x,\ y \in X \tag{1}$$

Dans ces conditions $\Phi \neq F_g \subset F_f$.

Démonstration. On considére la suite :

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = g(x_1),\ x_3 = f(x_2),\ x_4 = g(x_3),\ \ldots,$$
$$x_{2n} = g(x_{2n-1}),\ x_{2n+1} = f(x_{2n})\ , \ldots,$$

x_0 arbitraire de X.

$$d(x_{2n},\ x_{2n+1}) = d(g(x_{2n-1}),\ f(x_{2n})) = d(g(x_{2n-1}),\ f(g(x_{2n-1}))) \leqslant$$
$$\leqslant d(x_{2n-1},\ x_{2n-1}) + \varphi(d(x_{2n-1},\ g(x_{2n-1}))) = \varphi(d(x_{2n-1},\ x_{2n})) \leqslant$$
$$\ldots \leqslant \varphi^{2n}(d(x_0,\ x_1)).$$

Par conséquent, $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \varphi^n(d(x_0, x_1))$ et on aura

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant \varphi^{n+p-1}(d(x_0, x_1)) + \varphi^{n+p-2}(d(x_0, x_1)) + \dots + \varphi^n(d(x_0, x)) \to 0; \quad n \to \infty$$

il en résulte la suite (x_n) qui est une suite Cauchy et, puisque X est un espace metrique complet, on aura $x_n \to x^* \in X$. On montre que x^* est un point fixe pour g; on a :

$$d(x^*, g(x^*)) \leqslant d(x^*, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, g(x^*)) =$$
$$= d(x^*, x_{2n+1}) + d(f(x_{2n}), g(x^*)) = d(x^*, x_{2n+1}) + d(f(g(x_{2n-1})), g(x^*)) \leqslant$$
$$\leqslant d(x^*, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x^*) + \varphi(d(x_{2n-1}, g(x^*))),$$

on a obtenu que :

$$d(x^*, g(x^*)) \leqslant d(x^*, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x^*) +$$
$$+ \varphi(d(x_{2n-1}, g(x^*))),$$ on fait $n \to \infty$ il en résulte

$$d(x^*, g(x^*)) \leqslant \varphi(d(x^*, g(x^*))) \leqslant \frac{1}{2} d(x^*, g(x^*));$$

il en résulte $d(x^*, g(x^*)) = 0$ donc $x^* = g(x^*)$.
Partant de l'hypothèse $x^* = g(x^*)$, montrons que $x^* = f(x^*)$.
Selon l'idée du professeur I.A.RUS, on fait $x = y$ en (1); il en résulte :

$$d(f(g(x)), g(x)) \leqslant \varphi(d(x, g(x)), \quad x^* \in F_g \ \text{donc} \ x^* = g(x^*),$$

et il en résulte immédiatement que

$$d(f(x^*), x^*) \leqslant \varphi(d(x^*, x^*)) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow f(x^*) = x^*.$$

Observations. 1. On pouvait poser la condition $\varphi(r) < r$, $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$.

2°. Si $\varphi = 0$ en (1), on a $d(f(g(x)), g(x)) \leqslant f(x, y)$; on fait $x = y$ et on obtient $d(f(g(x)), g(x)) \leqslant 0$; il en résulte $f(g(x)) = g(x)$, donc $F_f = \{g(x) \mid x \in X\}$.
Le problème se pose quand $F_f = F_g = \{x^*\}$. La théorème suivant résond à ce problème.

Théorème 2. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f, g : X \to X$ deux aplications ayant la propriété qu'il y a $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continuu et aussi $\varphi(0) = 0$, $\varphi(r) \leqslant \frac{r}{2}$, $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k(t) < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, de sorte que :*

$$d(f(g(x)), g(y)) \leqslant \beta d(x, y) + \varphi(d(x, g(y))) \quad (2)$$
$$\forall x, y \in X \ \text{et} \ \beta \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

Dans ces conditions on à : $F_f = F_g = \{x^*\}$.

Démonstration. On a à prouver l'unicité de x^*, le reste étant justifié conformément au théorème 1. Soit

$$x^* = g(x^*), \ y^* = g(y^*); \ \text{on a}$$
$$d(x^*, y^*) = d(x^*, g(y^*)) \leqslant d(x^*, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, g(y^*)) =$$
$$= d(x^*, x_{2n+1}) + d(f(g(x_{2n-1})), g(y^*)) \leqslant d(x^*, x_{2n+1}) + \beta d(x_{2n-1}, y^*) +$$
$$+ \varphi(d(x_{2n-1}, g(y^*))) \leqslant d(x^*, x_{2n+1}) + \beta d(x_{2n-1}, y^*) +$$
$$+ \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, g(y^*)).$$

On a obtenu :

$$d(x^*, y^*) \leqslant d(x^*, x_{2n+1}) + \beta d(x_{2n-1}, y^*) + \frac{1}{2} d(x_{2n-1}, g(y^*)).$$

On fait $n \to \infty$ dans la dernière relation : il en résulte

$$d(x^*, y^*) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \beta\right) d(x^*, y^*)$$

on obtient $d(x^*, y^*) = 0$ c'est-à-dire $x^* = y^*$. Pour $x^* = g(x^*)$, $x^* = f(x^*)$, $y^* = f(y^*)$ on a :

$$d(x^*, y^*) = d(f(g(x^*)), f(y^*)) \leqslant \beta d(x^*, y^*) + \varphi(d(x^*, f(y^*))) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\beta + \frac{1}{2}\right) d(x^*, y^*)$$

qui implique $d(x^*, y^*) = 0$ donc $x^* = y^*$, c'est-à-dire $F_f = F_g = \{x^*\}$.

Observations. Si $f = g$ en (2), on obtient dans les conditions de l'énoncé que f est une application Picard. Lorsque f est une application Picard, g est aussi une application Picard.

Quant aux suites des applications, on peut donner le théorème suivant qui a lieu si :

$$d(f_n(g_n(x)), g_n(x)) \leqslant \psi(d(x, g_n(x))), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \text{avec}$$
$$\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \ \psi \ \text{continue et} \ \psi(0) = 0.$$

Théorème 3. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f_n, g_n : X \to X$ deux suites d'applications $f_n \xrightarrow[X]{u} f$, $g_n \xrightarrow[X]{u} g$. Si*

(i) $F_{g_n} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) f et g satisfont les conditions du théorème 2; alors on a : $F_{f_n} \supset F_{g_n}$ et $x_n \to x^*$.

Démonstration : On a $d(x_n, f_n(x_n)) = d(g_n(x_n), f_n(g_n(x_n))) \leqslant \psi(d(x_n, g_n(x_n))) = \psi(0) = 0$ il en resulte $x_n = f_n(x_n)$.
Par conséquent : $F_{f_n} \supset F_{g_n}$.

Soit

$$x_n \in F_{g_n}, \text{ on a } d(x_n, x^*) = d(g_n(x_n), f(x^*)) \leqslant$$

$$\leqslant d(g_n(x_n), g(x_n)) + \beta d(x_n, x^*) + \varphi(d(g(x_n), x^*)) \leqslant$$

$$\leqslant d(g_n(x_n), g(x_n)) + \beta d(x_n, x^*) + \frac{1}{2} d(g(x_n), g_n(x_n)) + \frac{1}{2} d(g_n(x_n), x^*) =$$

$$d(g_n, (x_n), g(x_n)) + \beta d(x_n, x^*) + \frac{1}{2} d(g_n(x_n), g(x_n)) + \frac{1}{2} d(x_n, x^*).$$

Donc :

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{3}{1-2\beta} d(g_n(x_n), g(x_n)).$$

On fait $n \to \infty$, il en résulte $d(x_n), x^*) \to 0$ donc $x_n \to x^*$.

Commentaires. On pouvait demander :

$$d(f_n(g_n(x_n)), g_n(y)) \leqslant d(x, y) + \psi(d(x, g_n(y))) \tag{3}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $x, y \in X$ et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ψ continue et $\psi(0) = 0$.
Lorsque $\psi = 0$ en (3), on a $d(f_n(g_n(x)), g_n(y)) \leqslant d(x, y)$, pour $x = y$ on obtient $F_{f_n} = \{g_n(x) \mid x \in X\}$ et $n \in \mathbb{N}$.
De pareils résultats appareissent dans le cas où (X, d) est un espace métrique généralisé. On les présente ci-dessous.

Théorème 4. *Soit (X, d) un espace métrique généralisé complet et $f, g : X \to X$, deux applications ayant la propriété qu'il y a $\varphi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ continuu et aussi $\varphi(0) = 0$, $\varphi(r) < r$, $\forall r \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k(t) < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ de sorte que :*

$$d(f(g(x)), g(y)) \leqslant d(x, y) + \varphi(d(x, g(y))), \forall x, y \in X. \tag{4}$$

Dans ces conditions : $\emptyset \neq F_g \subset F_f$.

Démonstration. Voir le théoreme 1.

Théorème 5. *Soit (X, d) un espace metrique généralisé complet et f, $g : X \to X$ deux applications ayant la propriété que $\exists \varphi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ continuu et aussi $\varphi(0) = 0$, $\varphi(r) \leqslant \frac{1}{2}(I - A) \cdot r$, $\forall r \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k(t) < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^n$ de sorte que :*

$$d(f(g(x)), g(y)) \leqslant A d(x, y) + \varphi(d(x, g(y))), \quad \forall x, y \in X, \quad A \in M_{nn}(\mathbb{R}_+)$$

et A est convergent à zéro. Dans ces conditions, on a $F_f = F_g = \{x^*\}$.

Démonstration. Voir la demonstration du théorème 2 ; on y ajoute des modifications non essentielle. Pour des suites d'applications, on peut donner le théorème suivant qui se produit si on satisfait les hypothèses

supplémentaires suivantes :

$$d(f_n(g_n(x)), g_n(x)) \leqslant \psi(d(x, g_n(x))), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad \psi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$$

continue et $\psi(0) = 0$.

Théorème 6. *Soit (X, d) un espace métrique géneralisé complet et $f, g : X \to X$, **deux suites** d'applications $f_n \overset{u}{\underset{X}{\to}} f$, $g_n \overset{u}{\underset{X}{\to}} g$. Si*

(i) $F_{g_n} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) f et g satisfait les conditions du théorème 5,

alors on a $F_{f_n} \supset F_{g_n}$ et $\forall x_n \in F_{g_n}$, $x_n \to x^*$, pour $n \to \infty$.

REFERENCES

1. Brezis, Haiin, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Massen, Paris, New York, Barcelone, Milan, Mexico, Sao Paulo, 1983.
2. Rus I.A., *Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
3. — *Some remarks on the common fixed point theorems*. Mathematica, 21(44) (1979) 63—66.
4. —*Results and problems in the metricalcommon fixed point theory*, Mathematica, 21(44) (1979) 189—194.
5. — *Approximation of common fixed point in a generalized metric space*, Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, 8, (1979) 83—87.
6. — *Bessaga Mappings*, Proceedings of the Colloquium on Approximation and Optimization, Cluj-Napoca, oct. 25—27, 1984.

Reçu le 26.III.1990

Şc. gen. Paşcani
5725 — Paşcani
Jud. Iaşi
România