MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 20, N^{os} 1–2, 1991, pp. 3–9

IN MEMORIAM

ELENA POPOVICIU
(Cluj)

1. En 1991, le 16 février, les disciples et les collaborateurs de l'académicien Tiberiu Popoviciu ont rendu un hommage à la mémoire de ce grand savant qui a enrichi les mathématiques modernes de nouvelles directions de recherche et qui a été le fondateur de l'école roumaine de théorie de l'approximation et d'analyse numérique. La théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur qu'il a donnée dans sa thèse de doctorat, à Paris et qui a été développée dans beaucoup de ses travaux a été et ne cesse pas d'être le point de départ de nombreuses recherches dont les auteurs se trouvent dans divers grands centres universitaires du monde.

J'ai eu la grande chance d'être l'élève de Tiberiu Popoviciu. J'ai suivi, comme étudiante, non seulement les cours qu'il donnait à la Faculté de Mathématiques de Cluj, mais aussi le Séminaire scientifique qu'il a fondé en 1947 à Cluj et dont le cercle d'idées était étroitement lié à la théorie de l'approximation, la théorie de la convexité et l'analyse numérique. Le Séminaire dont je viens de parler était une école de recherche. Les membres étaient de jeunes mathématiciens et aussi des professeurs. C'est dans ce Séminaire que j'ai présenté les premiers résultats que j'ai obtenus sur les fonctions douées d'une propriété de convexité. Il est très important de souligner que dans les recherches de Tiberiu Popoviciu la convexité, l'approximation, la théorie du calcul (l'analyse numérique) étaient étroitement liées. La théorie de l'interpolation, au sens moderne, était le liant de ces trois directions dont j'ai parlé.

Comme hommage à la mémoire de Tiberiu Popoviciu à 85 ans de sa naissance, je vais m'arrêter à certaines idées directrices de la théorie de la convexité.

2. Soit $n \geqq 0$ un entier fixé et $X \subseteq \mathbb{R}$. Supposons que l'on a card $X \geqq n + 2$. Considérons une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. Désignons par $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n. Les points distincts

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \qquad x_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots, n+1$$

étant donnés, on peut construire le polynôme de degré n

$$(2) \qquad P = L(\mathscr{P}_n\,;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\,;\ f)$$

qui satisfait les conditions

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n attaché à la fonction f et aux nœuds (1). Pour construire le polynôme (2), on a utilisé seulement la restriction de la fonction f aux nœuds (1). Désignons cette restriction par h. Le polynôme P est un prolongement de h à l'ensemble $\mathbb{R}$, mais il est utile d'analyser ce prolongement seulement sur l'ensemble X où la fonction f est définie.

Si au lieu de l'ensemble $\mathscr{P}_n$ on considère un autre ensemble de fonctions $\mathscr{F}$ ayant la propriété qu'il contient pour chaque ensemble (1) de points distincts un élément et un seul, F, satisfaisant les conditions $F(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$, alors la fonction F est aussi une prologement de la fonction h, à l'ensemble X. Dans nos travaux [1], [2], nous avons appelé un ensemble $\mathscr{F}$ dont les éléments sont des fonctions continues sur X et qui satisfait les conditions d'existence et d'unicité de la fonction F que nous avons considérée plus haut, ensemble interpolatoire d'ordre $n + 1$, sur X. En faisant une comparaison entre f et le prologement P(ou bien F), on obtient des informations sur le comportement de f par rapport aux éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_n$ (ou bien $\mathscr{F}$). La voie la plus naturelle de faire cette comparaison est celle d'analyser les différences $f(x) - P(x)$ (ou bien $f(x) - F(x)$) pour $x \in X$ et $x \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n + 1$.

Dans le cas $\mathscr{F} = \mathscr{P}_n$ cette différence s'exprime d'une manière élégante. Soit $x = x_{n+2}$ et

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} < x_{n+2}. \tag{3}$$

Dans ce cas

$$f(x_{n+2}) - L(\mathscr{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) = \tag{4}$$

$$= (x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2)\ldots(x_{n+2} - x_{n+1})\,[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f].$$

Par $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ on a désigné la différence divisée de la fonction f sur les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$. Si les inégalités (3) sont satisfaites alors, d'après la formule (4), le signe de la différence $f(x_{n+2}) - P(x_{n+2})$ est le signe de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$. Compte tenu de cette situation, on peut considérer, comme dans les travaux [5] et [6], la classe des fonctions f pour lesquelles l'une et toujours la même des cinq conditions

$$f(x_{n+1}) - P(x_{n+1}) > 0, \ \geqq 0, = 0, \leqq 0, \ <0 \tag{5}$$

est remplie, quels que soient les points (3) de l'ensemble X. On arrive ainsi, à la définition qui a été donnée par Tiberiu Popoviciu [5]. Nous allons donner ici les définitions de Tiberiu Popoviciu.

DÉFINITION 1. La fonction f s'appelle convexe (non concave, polynômiale, non convexe, respectivement concave) d'ordre n sur l'ensemble X si l'on a dans (5) le signe > 0 ($\geqq 0$, $= 0$, $\leqslant 0$ respectivement <0), toujours, quels que soient les points (3) de l'ensemble X.

DÉFINITION 2. La fonction f s'appelle convexe (non concave, polynômiale, non convexe respectivement concave) d'ordre n sur X, si l'on a toujours

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0 \ (\geqq 0, = 0, \leqq 0, \text{ respectivement } < 0) \tag{6}$$

quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ de l'ensemble X.

Les deux définitions sont équivalentes.

3. Si $H \in \mathscr{P}_{n+1}$ et $H \notin \mathscr{P}_n$ alors, quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, on a ou bien, toujours, $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; H] > 0$ ou bien, toujours, $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; H] < 0$. On remarque, donc, que la propriété introduite par les définitions 1 et 2 est une généralisation du comportement des éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_{n+1}$ par rapport aux éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_n$. Cette généralisation est assez naturelle car

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; V] \tag{7}$$

où

$$V = L(\mathscr{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f). \tag{8}$$

La relation d'égalité (7) peut être le point de départ pour obtenir de nouvelles propriétés en remplaçant la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \cdot]$ par d'autres fonctionnelles qui gardent les propriétés essentielles des différences divisées.

4. Les fonctions f pour lesquelles dans (5) on a, toujours, l'inégalité > 0 ou bien, toujours, l'inégalité < 0, ne peuvent prendre les valeurs d'un polynôme de degré n qu'au plus sur $n + 1$ points distincts de l'ensemble X. Si la fonction f a cette propriété, alors nous disons qu'elle est $(n + 1)$-valente par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}_n$, sur X. C'est une très importante propriété qu'on trouve, pour la première fois dans la thèse de doctorat [5] de Tiberiu Popoviciu. Cette propriété a eu un grand rôle dans la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur.

Les fonctions $f: X \to \mathbb{R}$ pour lesquelles une des cinq situations qui se présentent dans la formule (6) et toujours la même a lieu, quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ de l'ensemble X s'appellent fonctions d'ordre n sur l'ensemble X. Comme on peut facilement remarquer, les éléments de l'ensemble $\mathscr{P}_{n+1}$ sont des fonctions d'ordre n sur n'importe quel ensemble X contenant au moins $n + 2$ points distincts de $\mathbb{R}$. On peut donc faire la suivante

REMARQUE. La classe des fonctions d'ordre n sur un ensemble précisé représente une généralisation de l'ensemble $\mathscr{P}_{n+1}$, c'est-à-dire la propriété d'une fonction d'être d'ordre n généralise l'appartenence à l'ensemble $\mathscr{P}_{n+1}$. On peut distinguer parmi les fonctions d'ordre n sur X deux sous-ensembles

(9) $\mathscr{C}(\mathscr{P}_n, X, +) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0$

quels que soient les points $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$, distincts$\}$ et

(10) $\mathscr{C}(\mathscr{P}_n, X, -) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] < 0,$

quels que soint les points $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$, distincts$\}$.

L'ensemble (9) contient les éléments de $\mathscr{P}_{n+1}$ avec le coefficient de x^{n+1} positif et les fonctions f qui ne se réduisent pas à des polynômes de degré $n + 1$ mais qui satisfont l'inégalité

(11) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0$$

quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, distincts de X.

L'ensemble (10) contient les éléments de $\mathscr{P}_{n+1}$ avec le coefficient de x^{n+1} négatif et les fonctions f qui ne se réduisent pas à des polynômes de degré $n + 1$ mais qui satisfont l'inégalité

(12) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] < 0,$$

quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, distincts de X.

L'existence des fonctions qui satisfont l'inégalité (11) quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, distincts de X et qui ne sont pas des polynômes de degré $n + 1$ est assurée (pour des exemples voir [3]). L'existence des fonctions qui satisfont l'inégalité (12) quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, distincts de X et qui ne sont pas des polynômes de degré $n + 1$ est aussi assurée (voir [3]). Il en résulte, donc, que les fonctions d'ordre n, comme nous l'avons déjà remarqué, nous donnent une vraie généralisation des polynômes de degré $n + 1$. L'ensemble des fonctions d'ordre n sur un X précisé contient les polynômes de degré $n + 1$ et encore d'autres fonctions ne se réduisant pas à des polynômes. *Les éléments de l'ensemble* (9) *et de l'ensemble* (10) *sont des fonctions* ($n + 1$)-*valentes par rapport à l'ensemble* $\mathscr{P}_n$. Cette proposition est fondamentale dans la théorie des fonctions d'ordre n. D'une manière naturelle se pose la question de la validité de la réciproque de cette proposition. La réciproque n'est pas vraie (voir des exemples dans mon travail [3]). Mais, comme on peut le voir dans [2] [3], le théorème que nous allons donner est vrai.

THÉORÈME 1. *Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et elle est ($n + 1$)-valente par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}_n$, sur $[a, b]$, alors elle appartient à l'un des ensembles* (9) *ou* (10), *c'est-à-dire elle est convexe ou concave d'ordre n sur $[a, b]$.*

Le théorème 1, formulé avec d'autres notations par Tiberiu Popoviciu, a été généralisé aussi pour le cas où l'ensemble $\mathscr{P}_n$ est remplacé par un ensemble interpolatoire $\mathscr{F}$ qui n'est pas nécessairement linéaire (voir mes travaux [1], [2] [3] et d'autres).

L'idée de Tiberiu Popoviciu de mettre en évidence les fonctions qui ont la propriété d'être ($n + 1$)-valentes par rapport à $\mathscr{P}_n$ a une très grande importance pour la théorie de la convexité d'ordre supérieur et pour les généralisations de cette théorie. Ainsi, dans [3], nous avons donné à cette propriété une interprétation qui a été le point de départ pour la définition de la convexité par rapport à un procédé d'interpolation que j'ai considéré dans un espace abstrait [3]. Voyons quelle est cette interprétation. On peut énoncer le

THÉORÈME 2. *Si la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est ($n + 1$)-valente par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}_n$ sur X alors la valeur $L(\mathscr{P}_{n+1}; u_1, u_2, \ldots, u_{n+2}; f)$ de l'opérateur $L(\mathscr{P}_{n+1}; u_1, u_2, \ldots, u_{n+2}; \cdot)$ sur f, quels que soient les points distincts $u_1, u_2, \ldots, u_{n+2}$ de l'ensemble X, ne peut pas se réduire à un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_n$.*

On a aussi le

THÉORÈME 3. *Si la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est ($n + 1$)-valente par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}_n$ sur X et si les deux systèmes de points distincts $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ et $w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}$ de l'ensemble X sont distincts alors les polynômes d'interpolation $L(\mathscr{P}_n; v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}; f)$ et $L(\mathscr{P}_n; w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}; f)$ sont distincts.*

Pour souligner l'importance de la propriété de ($n + 1$)-valence par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}_n$ et les deux interprétations contenues dans les théorèmes 2 et 3, considérons un espace linéaire E et un sous-espace F de E.

DÉFINITION 3. Le sous-espace F de E est dit interpolatoire par rapport à l'opérateur linéaire $U : E \to E$, si les conditions suivantes sont remplies : 1) quel que soit $x \in E$ l'on a $U(x) \in F$; 2) si $x \in F$ alors on a $U(x) = x$.

DÉFINITION 4. Le sous-espace F de E est dit interpolatoire par rapport à l'ensemble non vide $\mathscr{U}$ d'opérateurs linéaires définis sur E et à valeurs dans E si F est interpolatoire par rapport à chaque élément de U [3].

On remarquera immédiatement que l'on a $U^2 = U$.

Considérons maintenant pour l'espace E deux sous-espaces $F_1 \subset F_2$ et deux ensembles non vides $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ d'opérateurs linéaires définis sur E et à valeurs dans E. On suppose que F_1 est interpolatoire par rapport à l'ensemble $\mathscr{U}_1$ d'opérateurs et F_2 est interpolatoire par rapport à l'ensemble $\mathscr{U}_2$ d'opérateurs.

Avec les hypothèses que nous venons de formuler, la propriété qui intervient comme conclusion dans l'énoncé du théorème 2 peut, maintenant, s'exprimer de la manière suivante pour un $x \in E$

(13) quel que soit l'opérateur $U \in \mathscr{U}_2$, on a $U(x) \notin F_1$.

La propriété qui intervient comme conclusion dans l'énoncé du théorème 3, peut s'exprimer de la manière suivante, pour un $x \in E$

(14) quels que soient les opérateurs distincts U et V de l'ensemble $\mathscr{U}_1$ on a $U(x) \neq V(x)$.

dans l'énoncé (14), on supposera, naturellement que l'ensemble $\mathscr{U}_1$ contient au moins deux éléments disticts.

On remarquera, immédiatement, en se basant sur les théorèmes 3 et 4, que les deux propriétés (13) et (14) peuvent être considérées comme des analogues de la propriété de $(n+1)$-valence par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}_n$.

Pour l'étude des propriétés (13) et (14) on peut consulter mes travaux [1], [2], [3].

5. Considérons, maintenant, une autre direction vers laquelle on peut développer les idées contenues dans les recherches de Tiberiu Popoviciu.

Soit, comme nous l'avons déjà considéré, $f : X \to \mathbb{R}$. Considérons, aussi, les points

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \tag{15}$$

de l'ensemble X où card $X \geqq m$. Soit $n \geqq 1$, $m \geqq n+2$. Dans [3] j'ai démontré, sans en utiliser la propriété de linéarité des différences divisées, les théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 4. *Si* $f \in \mathscr{C}(\mathscr{P}_n, X, +)$ *alors*

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f] < [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1}; f], \tag{16}$$

quel que soit $i = 2, \ldots, m-n-1$.

THÉORÈME 5. *Si* $f \in \mathscr{C}(\mathscr{P}_n, X, -)$ *alors*

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f] > [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1}; f], \tag{17}$$

quel que soit $i = 2, \ldots, m-n-1$.

On peut généraliser les deux propriétés de monotonie (16) et (17) pour le cas où au lieu de $\mathscr{P}_n$ on considère un ensemble interpolatoire $\mathscr{F}$ quelconque.

6. On remarque que la convexité et la concavité d'ordre n sont étroitement liées à l'analyse de la suite des différences divisées

$$([x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f])_{i=1}^{m-n-1} \tag{18}$$

correspondantes à la suite de points (15) de l'ensemble X. On obtient les propriétés de monotonie (16) et (17) en faisant un comparaison entre les termes consécutifs de la suite (18), en considérant chaque fois deux termes consécutifs. D'une manière naturelle, se pose la question de trouver la nouvelle propriété qui s'en dégage si on compare entre eux trois termes successifs de la suite (18), en considérant toutes les successions possibles, c'est-à-dire les

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}; f],\ [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+1}; f],\ [x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+n+1}; f] \tag{19}$$

quand on suppose $m \geqq n+3$ et $i = 2, \ldots, m-n-2$.

En comparant les différences divisées (19), je suis arrivée à la découverte d'une nouvelle propriété.

DÉFINITION 5. La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ s'appelle quasi-convexe (respectivement strictement quasi-convexe) d'ordre n sur l'ensemble X si l'on a

$$[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f] \leqq \max \{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f], [x_3, x_4, \ldots, x_{n+3}; f]\} \tag{20}$$

respectivement

$$[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f] < \max\{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f], [x_3, x_4, \ldots, x_{n+3}; f]\}) \tag{21}$$

quels que soient les points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ de l'ensemble X.

Pour $n = 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on obtient les fonctions pour lesquelles, si $x_1 < x_2 < x_3$ et $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, 3$, l'on a

$$f(x_2) \leqq \max \{f(x_1), f(x_3)\} \tag{22}$$

(respectivement

$$f(x_2) < \max \{f(x_1), f(x_3)\}), \tag{23}$$

quels que soient les points $x_1 < x_2 < x_3$ de l'intervalle $[a, b]$.

Les fonctions avec les propriétés (22) respectivement (23) pour n'importe quelle manière de choisir les points $x_1 < x_2 < x_3$ dans l'intervalle $[a, b]$, ont été données pour la première fois par Tiberiu Popoviciu [6].

Il faut remarquer qu'au lieu de faire l'analyse de la suite (18) en considérant les triplets de termes consécutifs, on peut considérer des successions de 4, 5, ..., termes de la suite (18).

Je dois ajouter, encore, que la méthodologie de recherche de Tiberiu Popoviciu était basée sur les théorèmes de la moyenne qu'il a donnés dans ses œuvres. Les théorèmes de la moyenne qu'on y trouve se rapportent à la théorie linéaire de l'interpolation. Comme je l'ai démontré [3] les analogues des théorèmes de Tiberiu Popoviciu restent valables pour la théorie non linéaire de l'interpolation aussi.

BIBLIOGRAPHIE

1. Moldovan (Popoviciu), Elena, *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica (Cluj), **1**, **(24)** (1959), 49–80.
2. ,, Sur l'interpolation généralisée, ibidem, **2**, **(25)** (1960), 143–147.
3. Popoviciu, Elena, *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, Cluj, 1972.
4. ,, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, **11**, (1982) 129–137.
5. Popoviciu, Tiberiu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une et de deux variables réelles*, Mathematica (Cluj), **VIII**, (1933), 1–85.
6. ,, *Deux remarques sur les fonctios convexes*, Bull. Sos. Sci. Acad. Roumaine, **20** (1938), 45–49.
6. ,, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

Reçu le 5.IX.1990

str. Roșiori 40
3400 Cluj-Napoca
Roumanie