MATHEMATICA – REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

L'ANALYSE NUMÉRIQUE ET LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 20, N^{os} 1–2, 1991, pp. 43–46

SUR UNE SUITE D'OPÉRATEURS D'INTERPOLATION ET D'APPROXIMATION DANS UN ESPACE DE HILBERT

MIRCEA IVAN
(Cluj-Napoca)

Résumé. Nous présentons un procédé d'interpolation et d'approximation dans un espace de Hilbert. En partant d'un ensemble de fonctions dénomées noyaux reproducteurs on construit une suite d'opérateurs de projection qui sont simultanément des opérateurs d'approximation et d'interpolation du type Gontcharov.

Le sujet traité a comme point de départ l'étude du travail *Two-dimensional reproducing kernel and surface interpolation* [1].

Nous essayons de mettre en évidence les notions et les idées de ce travail qui peuvent être généralisées.

Soit (X, ρ) un espace métrique borné et soit H un espace linéaire des fonctions réelles définies sur X, muni d'un produit scalaire

$$(\cdot,\ \cdot) : H \times H \to \mathbb{R}.$$

Supposons que H est un espace de *Hilbert* réel. L'éspace H est normé à l'aide de la norme

$$\| h \| = \sqrt{(h, h)},\ \ h \in H.$$

DÉFINITION 1. On appelle noyau réproducteur par rapport au point x et à l'espace H une fonction $K_x \in H$ qui vérifie la condition

$$(u,\ K_x) = u(x),\quad \forall\, u \in H. \tag{1}$$

Supposons que pour chaque $x \in X$ il existe un noyau K_x par rapport à l'espace H.

Supposons aussi que l'ensemble de noyaux reproducteurs vérifie la condition du type Lipschitz suivante
(2) il existe un nombre C tel que

$$\|K_x - K_y\| \leqslant C\rho\,(x,\ y),\ \text{pour tous les}\ x,\ y \in X.$$

Soit Y un sous-ensemble de X. Définissons l'indice de rareté de l'ensemble Y

$$I(Y) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \rho(x, y). \tag{3}$$

Supposons que l'enveloppe linéaire E de l'ensemble

$$\{K_y / y \in Y\} \text{ est fermée et soit } P : H \to E'$$

l'opérateur de projection orthogonale sur E.

Soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctionnelles linéaires bornées définies sur H et soit $F \in \mathscr{F}$. Désignons par $(\operatorname{Ker} F)^{\perp}$ le supplémentaire orthogonal de l'ensemble des zéros de la fonctionnelle F.

Supposons que pour toute $F \in \mathscr{F}$ on a

$$(\operatorname{Ker} F)^{\perp} \subseteq E. \tag{4}$$

THÉORÈME 1. *L'opérateur de projection P vérifie la condition d'interpolation du type Gontcharov suivante*

$$F(u) = F(Pu).$$

pour tout $u \in H$, $F \in \mathscr{F}$.

Démonstration. Soit $F \in \mathscr{F}$. Conformément au théorème de F. Riesz sur la forme générale d'une fonctionnelle linéaire dans un espace de *Hilbert* il existe un élément $f \in H$ tel que pour tout $u \in H$

$$F(u) = (u, f).$$

On sait que l'opérateur P est auto-adjoint, i.e.

$$P(u, v) = (u, Pv), \tag{5}$$

pour tous les $u, v \in H$.

Conformément à (4) on a $f \in E$. Il en découle

$$Pf = f.$$

On déduit successivement

$$F(u) = (u, f) = (u, Pf) = (Pu, f) = F(Pu),$$

pour tout $u \in H$. Le théorème est démontré.

THÉORÈME 2. *L'opérateur de projection orthogonale P vérifie l'inégalité*

$$|u(x) - Pu(x)| \leqslant C \|u\| \, I(Y), \tag{6}$$

pour tout $u \in H$, $x \in X$.

Démonstration. Conformément à (2) et à (5) on a

$$|u(x) - Pu(x)| = |(u, K_x) - (Pu, K_x)| =$$

$$= |(u, K_x) - (u, PK_x)| = |(u, K_x - PK_x)|,$$

pour tout $u \in H$ et pour tout $x \in X$.

En vertu de l'inégalité de *Cauchy-Bouniakosvki* on a

$$|(u, K_x - PK_x)| \leqslant \|u\| \, \| K_x - PK_x\|.$$

Vu que PK_x est l'élément de la meilleure approximation de K_x par des éléments de E et en vertu de (2) on a de plus

$$\|K_x - PK_x\| \leqslant \|K_x - K_y\| \leqslant C\rho(x, y),$$

pour tout $x \in X$ et $y \in Y$.

Par conséquent on obtient

$$|u(x) - Pu(x)| \leqslant C \|u\| \, I(Y),$$

pour tout $x \in X$, $u \in H$. Le théorème est démontré.

Soit maintenant une suite croissante des sous-ensembles $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X tels que

$$\lim_{n \to \infty} I(Y_n) = 0. \tag{7}$$

Remarquons que les enveloppes linéaires E_n, $n \in \mathbb{N}$, des ensembles Y_n, qu'on suppose fermées, vérifient les relations

$$n \in \mathbb{N} \quad E_n \subseteq E_{n+1}, \tag{8}$$

THÉORÈME 3. *La suite des opérateurs de projection orthogonale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relatifs à la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions :*

$$|u(x) - P_n u(x)| \geqslant |u(x) - P_{n+1} u(x)|, \; n \in \mathbb{N}, \; x \in X; \tag{9}$$

la suite $(P_n u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers u sur X pour tout $u \in H$.

On démontre le théorème 3 en appliquant le théorème 2 et la relation (8).

Les auteurs donnent un intéressant exemple dans [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. Cui Ming Gen, Zhang Mian, Deng Zhong Xing, *Two-dimensional reproducing kernel and surface interpolation.* J. Computational Mathematics, 4, 2, (1986), 177–181.

Reçu le 14 septembre 1990

Institutul Politehnic Cluj-Napoca
Str. Emil Isac 15
(3400) Cluj-Napoca
România