

NOTE SUR LA FIDÉLITÉ ENTROPIQUE
 D'UN CANAL DE COMMUNICATIONS

ION PURCARU
 (Bucarest)

Une mesure informationnelle de la fidélité de la transmission d'un canal de communications est proposée dans cette note.

Soit \mathcal{S} un système aléatoire réel quelconque et $\mathcal{D}[\mathcal{S}] = \{\mathcal{T}_j\}_{j \in J}$, $\mathcal{T}_j \cap \mathcal{T}_k = \Phi$, $j \neq k \cup \mathcal{T}_j = \mathcal{S}$, une certaine décomposition de \mathcal{S} . Dénons par $H(\mathcal{T}_j)$ et $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k)$ l'entropie de Shannon de \mathcal{T}_j et de \mathcal{T}_j conditionnée par \mathcal{T}_k , dont les expressions et les propriétés sont supposées connues (voir [1], [2]). On dit que \mathcal{T}_j et \mathcal{T}_k sont entropiquement indépendantes et on écrit \mathcal{T}_j e.i. \mathcal{T}_k si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_j)$, sachant qu'on a toujours $0 \leq H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) \leq H(\mathcal{T}_j)$. On dit aussi que \mathcal{T}_j est complètement dépendant de \mathcal{T}_k et on écrit \mathcal{T}_j c.d. \mathcal{T}_k si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = 0$. Si $H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) = H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_j) = 0$ on dit que \mathcal{T}_j et \mathcal{T}_k sont réciproquement complètement dépendants et on écrit \mathcal{T}_j r.c.d. \mathcal{T}_k .

PROPOSITION. La fonction $d : \mathcal{D}[\mathcal{S}] \times \mathcal{D}[\mathcal{S}] \rightarrow [0, 1]$

$$(1) \quad d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = \frac{H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_j)}{H(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k)}$$

est une métrique sur $\mathcal{D}[\mathcal{S}]$.

Preuve. A la suite des propriétés de l'entropie de Shannon (voir [1], [2]) on déduit facilement que

- a) $d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) \geq 0$ pour tout $\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k \in \mathcal{D}[\mathcal{S}]$;
- b) $d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_j$ r.c.d. \mathcal{T}_k (particulièrement si $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_k$);
- c) $d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) = d(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_j)$ pour tout $\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k \in \mathcal{D}[\mathcal{S}]$;

On observe que pour tout $a \geq c > 0$, $b > 0$ on a la relation

$$(2) \quad \frac{a}{a+b} \geq \frac{c}{c+b}$$

Ecrivons maintenant

$$d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i) + d(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_k) = \left(\frac{H(\mathcal{T}_j/\mathcal{T}_i)}{H(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i)} + \frac{H(\mathcal{T}_i/\mathcal{T}_k)}{H(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_k)} \right) + \left(\frac{H(\mathcal{T}_i/\mathcal{T}_j)}{H(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)} + \frac{H(\mathcal{T}_k/\mathcal{T}_i)}{H(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_i)} \right)$$

Puisqu'on a toujours

$$H(\mathcal{T}_i) \leq H(\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k) \leq H(\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_i)$$

on obtient la relation

$$\frac{H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_i)}{H(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i)} + \frac{H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k)}{H(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_k)} \geq \frac{H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_i) + H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k)}{H(\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k) + H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_i)}$$

D'autre part, puisque (voir [2])

$$\begin{aligned} H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_i) &\geq H[\mathcal{T}_j|(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_i)] = H[(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i)|\mathcal{T}_k] - H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k) \geq \\ &\geq H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_k) - H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k) \end{aligned}$$

on peut écrire que

$$H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_i) + H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k) \geq H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_k)$$

et, par conséquent, de (2) on déduit que

$$(3) \quad \frac{H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_i)}{H(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i)} + \frac{H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_k)}{H(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_k)} \geq \frac{H(\mathcal{T}_j|\mathcal{T}_k)}{H(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k)}$$

En changeant j avec k en (3) il résulte que

$$(4) \quad \frac{H(\mathcal{T}_k|\mathcal{T}_i)}{H(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_i)} + \frac{H(\mathcal{T}_i|\mathcal{T}_j)}{H(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)} \geq \frac{H(\mathcal{T}_k|\mathcal{T}_j)}{H(\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_j)}$$

et par l'addition des relations (3) et (4) nous allons obtenir que

$$d) \quad d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) \leq d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_i) + d(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_k) \quad \text{pour tout } \mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k, \mathcal{T}_i \in \mathcal{D}[\mathcal{S}]$$

et l'affirmation de la proposition est vérifiée.

On remarque facilement que $d(\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k) \leq 1$, avec égalité si et seulement si \mathcal{T}_j e.i. \mathcal{T}_k .

Supposons maintenant que \mathcal{S} est un système de transmission de l'information dont les éléments principaux sont respectivement la source d'émission E , la source de réception R et le canal de communications $C = C(E, R)$ dont le fonctionnement peut-être perturbé par une source de bruitage B . Dans ce cas, sachant que $H(E/R)$ et $H(R/E)$ représentent les quantités d'information perdue dans les deux sens de la transmission de l'information par le canal de communications à cause des bruits, on peut dire que l'expression $d(E, R)$ nous donne des renseignements sur la qualité de la transmission par canal. Ainsi, si $\alpha(E, R) = 0$, on peut dire qu'on ne perd rien par canal, pouvant considérer qu'on a une transmission totale ou parfaite du message émis.

Dans l'autre extrémité, si $d(E, R) = 1$, on peut dire qu'on perd par canal toute l'information émise ou bien qu'on a émis un message et à cause des bruits du canal on a réceptionné un autre message, pouvant considérer qu'on a une transmission sans aucune fidélité.

Dénotons alors par

$$(5) \quad \Phi(C) = \Phi[C(E, R)] = 1 - d(E, R)$$

et remarquons que

a) $\Phi(C)$ existe pour tout canal de communications $C(E, R)$

b) $\Phi[C(E, R)] = \Phi[C(R, E)]$

c) $0 \leq \Phi(C) \leq 1$

d) $\Phi(C) = 0 \Leftrightarrow E$ e.i. R , ce qui signifie que l'émission et la réception de l'information sont assez loin l'une de l'autre, en ce qui concerne la fidélité de la transmission par canal et on peut dire qu'on a émis un message et on a réceptionné un autre message.

e) $\Phi(C) = 1 \Leftrightarrow E$ r.c.d. R , ce qui signifie que l'émission et la réception de l'information sont identiques du point de vue du message transmis par canal ou bien qu'on a une transmission de maximum-fidélité. Généralement, si $\Phi(C)$ est proche de 1 on dit qu'on a une transmission de haute-fidélité.

Compte tenu des considérations ci-dessus données, l'expression $\Phi(C)$ sera dénommée coefficient de fidélité entropique ou informationnelle du canal de communication $C(E, R)$.

RÉFÉRENCES

1. Guîasu, S., *Information theory with applications*, McGraw-Hill, 1977.
2. Purcaru, I., *Information et corrélation*, Editura Științifică și Enciclopedică, 1988.
3. Watanabe, S., *Knowing and guessing*, Wiley, 1969.

Reçu le 7.XI.1989

Département de Mathématiques
Académie d'Études Économiques
Bucarest, Roumanie