REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 21, N° 1, 1992, pp. 15–29

IDENTIFIZIERUNG DES ZUSTANDSPARAMETERS FÜR VISKOELASTISCHE MATERIALIEN (I)

H. BUGGISCH, P. MAZILU und H. WEBER
(Karlsruhe)

Starting from the general stress-strain relation for a linear viscoelastic material, which is in agreement with the "principle of inertia", a new identification procedure is proposed. Instead of running one long-range relaxation experiment, following a *single* suitably specified deformation history, material characterization is done using the data of n short relaxation experiments following n different deformation histories. To interpret these data a direct non-iterative algorithm has been developed. Compared with other methods, for example, curve fitting by using Gauss'method, this direct method is numerically stable and allows a simple direct evaluation of the error due to the scattering of experimental data. The method has been applied to the determination of the relaxation times of an unsaturated polyester material.

VORWORT. Die allgemeine Strategie für die Parameteridentifikation gründet sich auf die Vorschriften der positivistischen Einstellung in der Wissenschaft. Ernst Mach, der Vorkämpfer dieser Einstellung, behauptet:

„... die Wissenschaft habe von prinzipiell beobachtbaren Daten auszugehen und diese nach Regeln und Gesetzen miteinander zu verknüpfen."

Für die viskoelastischen Materialien sind die beobachtbaren Parameter die Verzerrungen und die Spannungen.

In der vorliegenden Arbeit wird von folgenden Regeln und Gesetzen Gebrauch gemacht:

1. Die Kausalabhängigkeiten. Das ist ein Grundprinzip, welches behauptet, daβ jede Abhängigkeiten sich mit Hilfe der momentanen und der vergangenen Werte der verknüpften Parameter ausdrücken läβt. Für viskoelastische Materialien lauten solche Abhängigkeiten

$$\underset{\sim}{\sigma}(t) = \mathscr{F}\begin{pmatrix} t \\ \underset{\sim}{\varepsilon} \\ -\infty \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \underset{\sim}{\varepsilon}(t) = \mathscr{G}\begin{pmatrix} t \\ \underset{\sim}{\sigma} \\ -\infty \end{pmatrix}.$$

2. Die Annahme der Linearität und Stetigkeit der Funktionale $\mathscr{F}$ oder $\mathscr{G}$.
3. Das Riesz-Fréchet-Theorem erlaubt die analytische Darstellung der Funktionale $\mathscr{F}$ oder $\mathscr{G}$.
4. Das verallgemeinerte Trägheitsprinzip. Es ist immer möglich, einen endlichen Satz von strukturellen Parametern zu identifizieren, die den inneren Zustand des Materials beschreiben. Ausgehend von einem Zustand, in dem alle Parameter Null sind, verschwinden die Spannungen oder Verzerrungsgeschwindig-

keiten immer und bleiben auch dann Null, wenn die Verzerrungsgeschwindigkeiten oder die Spannungen Null sind.

Aufgrund dieser Regeln und Gesetze kann man ein Verfahren entwickeln, welches die Identifizierung aller innerer Parameter ermöglicht. Die Grundsteine eines solchen Identifikationsverfahrens in der Physik wurden von Dühring, Mach und Hertz gelegt. Ausgehend von einer kritischen Überprüfung der Fundamente der klassischen Mechanik und insbesondere der Konzepte der Kausalität, Trägheit, Gleichzeitigkeit und Wechselwirkungs-Übertragung haben Dühring, Mach und Hertz die Richtlinien für eine post-newtonische Mechanik gesetzt.

Die Gedankengänge, die im folgenden dargestellt sind, wurden von diesen Richtlinien geprägt.

Der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit widmet sich der Theorie der inertialen Konstitutivsysteme. Die allgemeine Theorie wird auf Boltzmann-Volterra — und auf Kelvin-Voigt-Materialien mit oder ohne innere Parameter angewendet.

Thermomechanische Modellvorstellungen unter Ausnutzung der Onsagerschen Symmetriebeziehungen wurden in diesem Abschnitt berücksichtigt.

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich mit der Untersuchung der Objektivität und den Isotropieeigenschaften der abgeleiteten Konstitutivgesetze.

Im dritten Abschnitt wird das Problem der Photoviskoelastizität betrachtet.

Im letzten Abschnitt wird ein konkretes Verfahren für die Parameteridentifikation präsentiert.

Der erste Abschnitt wurde unter der Leitung von Ernst Becker angefangen und später von P. Mazilu in selbständiger Arbeit weitergeführt.

Die Abschnitte 2, 3 und 4 entstanden in Zusammenarbeit aller drei Autoren.

Das gesamte Forschungsvorhaben wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell unterstützt, im Rahmen der Forschungsprojekte Be 317/22—1 und Bu 485/5—2, die von Herrn Ernst Becker und Herrn. H. Buggisch beantragt wurden.

1. Materialtheorie auf Basis des Trägheitsprinzips

1.1. *Allgemeine Theorie*

Es sei $X_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $t \in (-\infty, \infty)$ eine Menge der Funktionen, die im folgenden *Kräfte* genannt und $Y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $t \in \in (-\infty, \infty$ eine weitere Menge von Funktionen, die als *Flüsse* bezeichnet werden.

Eine konstitutive Gleichung ist durch fie Beziehung

$$Y_i(t) = F_i\left(\overset{t}{\underset{-\infty}{X_1}}, \ldots, \overset{t}{\underset{-\infty}{X_m}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

definiert, wobei F_i ein Funktional der Kraftgeschichte ist.

Folgende Arbeitshypothesen seien angenommen:

1. Die Funktionale F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sind in X_i linear.

2. Den beschränkten und stückweise stetig ableitbaren Kraftgeschichten $X_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ entsprechen beschränkte und stückweise stetige Flußgeschichten $Y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so daß Sprünge $[X_i](t) = X_i(t+0) - X_i(t-0)$ und $[\dot{X}_i](t) = \dot{X}_i(t+0) - \dot{X}_i(t-0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ die Flußsprünge $[Y_i](t) = M_{ij}[\dot{X}_j](t) + N_{ij}[X_j](t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ verursachen, wobei M_{ij}, N_{ij} bestimmte Konstanten sind.

3. Die Funktionale F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ sind gegenüber einer Zeitverschiebung invariant, d. h. es gilt

$$F_i\left(\overset{t+\Delta t}{\underset{-\infty}{X_1}}(\cdot + \Delta t), \ldots, \overset{t+\Delta t}{\underset{-\infty}{X_m}}(\cdot + \Delta t)\right)\Bigg|_{t+\Delta t} = F_i\left(\overset{t}{\underset{-\infty}{X_1(\cdot)}}, \ldots, \overset{t}{\underset{-\infty}{X_m(\cdot)}}\right)\Bigg|_t .$$

Mit dieser Annahme kann man beweisen, daß die konstitutive Gleichung (1.1) in der Form

$$Y_i(t) = M_{ij}\dot{X}_j(t) + N_{ij}X_j(t) + \int_{-\infty}^{t} L_{ij}(t-\tau)\, X_j(\tau)\, d\tau \tag{1.2}$$

mit stetigen und beschränkten Kernen $L_{ij} : [0, \infty) \to R$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ darstellbar ist.

An dieser Stelle seien zwei Definitionen eingeführt, die durch den ersten Teil des Galilei'schen Trägheitsprinzips motiviert sind. (Dieser Teil des Trägheitsprinzips besagt: „Ohne Einwirkung von Kräften bleibt per Körper in Ruhe".)

Definition 1. Die Fluß-Kraft-Beziehung (1.1) bildet genau dann ein *inertiales Konstitutivsystem*, wenn aus

$$X_i(t) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m \text{ für } t \geqslant 0, \text{ und}$$

$$Y_i(+0) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

immer folgt, daß

$$Y_i(t) = 0 \text{ für alle } t > 0 \text{ gilt}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Definition 2. Die Fluß-Kraft-Beziehung (1.1) bildet genau dann ein *relaxierendes Konstitutivsystem*, wenn aus

$$X_i(+0) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$Y_i(t) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, n, \text{ alle } t \geqslant 0$$

immer folgt, daß

$$X_i(t) = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m \text{ für alle } t > 0 \text{ gilt.}$$

Folgende Aussage läßt sich direkt beweisen:

Bildet die Beziehung (1. 2) eine eindeutige Abbildung zwischen den Kraftgeschichten X_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ und den Flußgeschichten Y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dann ist ein ***konstitutives System** genau dann inertial, wenn es ein relaxierendes System ist.*

Zum Beweis bemerken wir, daß (1. 2) nur dann eine umkehrbar eindeutige Abbildung ergibt, wenn $M = 0$ ist. Ist $M = 0$, dann reduziert sich (1. 2) auf

$$Y_i(t) = N_{ij} X_j(t) + \int_{-\infty}^{t} L_{ij}(t-\tau)\; X_j(\tau)\, d\tau .$$

Es sei angenommen, diese Beziehung bilde ein inertiales, aber kein relaxierendes Konstitutivsystem. Dann existiert eine Kraftgeschichte $X_i^0(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, so daß $X_i^0\ (+0) = 0$, $X_i^0(t) \neq 0$ für $t > 0$ und $Y_i^0\ (t) = 0$ für $t \geqslant 0$ gilt.

Betrachtet wird nun eine zweite Kraftgeschichte:

$$X_i^*(t) = \begin{cases} X_i^0(t), & \text{wenn } t \leqslant 0 \\ 0 & \text{, wenn } t > 0. \end{cases}$$

Da die Kraft-Fluß-Beziehung ein inertiales Konstitutivsystem bildet, muß $X_i^*(t)$ wieder $Y_i^0(t)$ entsprechen. Dadurch haben wir zwei Kraftgeschichten $X_i^0(t)$ und $X_i^*(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ gefunden, denen ein und dieselbe Flußgeschichte $Y_i^0(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ zugeordnet ist. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme der Eindeutigkeit. Damit ist bewiesen, daß ein inertiales System immer relaxierend ist. Der Beweis, daß ein relaxierendes System immer inertial ist, ist mit der gleichen Beweistechnik möglich.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß für die inertialen Konstitutivsysteme die Kerne L_{ij} in Gleichung (1. 2) notwendigerweise eine spezielle Form haben müssen.

Zur Vorbereitung definiert man die Vektoren $\underset{\sim}{X}$, $\underset{\sim}{Y}$, $\underset{\sim}{L}_i$, $\underset{\sim}{M}_i$, $\underset{\sim}{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \underset{\sim}{L}_i &= (L_{i1},\ L_{i2},\ \ldots,\ L_{im}) \\ \underset{\sim}{M}_i &= (M_{i1},\ M_{i2},\ \ldots,\ M_{im}) \\ \underset{\sim}{N}_i &= (N_{i1},\ N_{i2},\ \ldots,\ N_{im}) \end{aligned}$$

und die Matrizen $\mathbb{L}$, $\mathbb{M}$ und $\mathbb{N}$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{L}_1 \\ \underset{\sim}{L}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{L}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{M}_1 \\ \underset{\sim}{M}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{M}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbb{N} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{N}_1 \\ \underset{\sim}{N}_2 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{N}_n \end{pmatrix}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird vereinbart, daß mit $\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{Y}$ das Skalarprodukt $\underset{\sim}{X}\,\underset{\sim}{Y}$ gemeint ist. Dann läßt sich $\underset{\sim}{X}\underset{\sim}{Y}$ (1. 2) in der

folgenden kompakten Form schreiben:

$$Y_i(t) = \underset{\sim}{M}_i \dot{\underset{\sim}{X}}(t) + \underset{\sim}{N}_i \underset{\sim}{X}(t) + \int_{-\infty}^{t} \underset{\sim}{L}_i(t-\tau)\; \underset{\sim}{X}(\tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

oder

$$\underset{\sim}{Y}(t) = \mathbb{M} \dot{\underset{\sim}{X}}(t) + \mathbb{N} \underset{\sim}{X}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathbb{L}(t-\tau)\; \underset{\sim}{X}(\tau)\, d\tau . \tag{1.4}$$

Zuerst beweisen wir ein Lemma bezüglich der Kerne L_{ij} der Vektorintegrale in (1.3).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß bei geeigneter Wahl der Flüsse die Vektorfunktionen $\underset{\sim}{L}_i$, $\underset{\sim}{L}_i : [0, \infty) \to R^m$ unabhängige Funktionen sind. Es sei S der n-dimensionale Raum der Vektorfunktionen

$$S = \left\{ \underset{\sim}{L} : [0, \infty) \to R^m / \underset{\sim}{L} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underset{\sim}{L}_i,\ \alpha_i \in R \right\}.$$

Es seien $\underset{\sim}{L}_i^{(t)} : [0, \infty) \to R^m$ die Vektorfunktionen mit verschobenem Argument.

$$\underset{\sim}{L}_i^{(t)}(-\tau) = \underset{\sim}{L}_i(t-\tau), \quad i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

Es gilt nun das folgende Lemma:

Lemma. *Die Funktionen $\underset{\sim}{L}_i^{(t)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ gehören für alle $t > 0$ genau dann zu S, wenn*

$$\mathbb{L}(t) = e^{-\mathbb{A}t}\,\mathbb{C} \tag{1.5}$$

gilt, wobei $\mathbb{A}$ und $\mathbb{C}$ $n \times n$- bzw. $n \times m$-Matrizen sind.

Beweis. Die Eigenschaft, daß $\underset{\sim}{L}_i^{(t)}$ zu S gehören, falls sie die Form (1.5) haben, folgt unmittelbar aus der Identität:

$$\mathbb{L}(t-\tau) = e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\,\mathbb{C} = e^{-\mathbb{A}t}\, e^{\mathbb{A}\tau}\,\mathbb{C}.$$

Nun soll folgendes nachgewiesen werden: Falls $\underset{\sim}{L}_i^{(t)}$ zu S gehören, dann haben sie die Form (1.5). Nehmen wir an, daß $\underset{\sim}{L}_i^{(t)} \in S$ für alle $t > 0$ und für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt.

Dann folgt:

$$\underset{\sim}{L}_i^{(t)}(-\tau) = \underset{\sim}{L}_i(t-\tau) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t)\, \underset{\sim}{L}_i(-\tau). \tag{1.6}$$

Bezeichnet man durch Λ die Matrix

$$\Lambda = (\lambda_{ij}), \quad i, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ n.$$

Dann hat Gleichung (1.6) die Form:

$$\mathbb{L}(t-\tau) = \Lambda\,(t)\; \mathbb{L}(-\tau). \tag{1.7}$$

Setzt man in (1.7) $\tau = 0$ ein, dann erhält man

$$\mathbb{L}(t) = \Lambda(t)\ \mathbb{L}(0). \tag{1.8}$$

Gleichungen (1.7) und (1.8) ergeben zusammen

$$\Lambda(t-\tau)\ \mathbb{L}(0) = \Lambda(t)\ \mathbb{L}(-\tau), \tag{1.9}$$

die für $t = 0$ sich wie folgt reduziert

$$\Lambda(t-\tau)\ \mathbb{L}(0) = \Lambda(0)\ \mathbb{L}(-\tau). \tag{1.10}$$

Da L_t eine Basis von S ist, folgt daraus

$$\det\ |\ \Lambda\ (t)| = 0.$$

Unter Ausnutzung der Gleichung (1.7) kann man die konstitutive Gleichung (1.4) wie folgt aufschreiben:

$$\underset{\sim}{Y}(t) = \mathbb{M}\dot{\underset{\sim}{X}}(t) + \mathbb{N}\underset{\sim}{X}(t) + \Lambda(t)\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbb{L}(-\tau)\ \underset{\sim}{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.11}$$

Ist die Kraftgeschichte hinreichend glatt, dann erhält man durch Differenzierung nach der Zeit

$$\dot{\underset{\sim}{Y}}(t) = \mathbb{M}\ddot{\underset{\sim}{X}}(t) + \mathbb{N}\dot{\underset{\sim}{X}}(t) + \dot{\Lambda}(t)\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbb{L}(-\tau)\ \underset{\sim}{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \Lambda(t)\ \mathbb{L}(-t)\ \underset{\sim}{X}(t). \tag{1.12}$$

Beachtet man die Bedingung

$$\Lambda(t)\ \mathbb{L}(-t) = \mathbb{L}(0),$$

die aus Gleichung (1.7) folgt, dann wird man auf die Identität geführt,

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbb{L}(-\tau)\ \underset{\sim}{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \Lambda^{-1}(t)\ \ \Lambda(t)\int\limits_{-\infty}^{t} \mathbb{L}(-\tau)\ \underset{\sim}{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \Lambda^{-1}(t)\ [\underset{\sim}{Y}(t) - \mathbb{M}\dot{\underset{\sim}{X}}(t) - \mathbb{N}\underset{\sim}{X}(t)].$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit Gleichung (1.12):

$$\dot{\underset{\sim}{Y}}(t) = \mathbb{L}(0)\ \underset{\sim}{X}(t) + \dot{\Lambda}(t)\ \ \Lambda^{-1}(t)\ \ [\underset{\sim}{Y}(t) - \mathbb{M}\ \dot{\underset{\sim}{X}}(t) - \mathbb{N}\ \underset{\sim}{X}(t)]. \tag{1.13}$$

Die Invarianz des konstitutiven Gesetzes bezüglich einer beliebigen Zeitverschiebung wird genau dann erfüllt, wenn

$$\dot{\Lambda}(t)\ \Lambda^{-1}(t) = -\mathbb{A}$$

mit einer konstanten $n\times n$-Matrix $\mathbb{A}$ gilt. Das bedeutet:

$$\Lambda(t) = \mathrm{e}^{-\mathbb{A}t}.$$

Bezeichnet man

$$\mathbb{C} = \mathbb{L}(0),$$

dann folgt aus Gleichung (1.8) die Gleichung (1.5).

Mit Hilfe dieser Lemmas kann man das folgende Theorem beweisen:

Theorem 1. *Die Beziehung (1.11) bildet genau dann ein inertiales Konstitutivsystem, wenn sie einen exponentiellen relaxierenden Kern von der Form* (1.5):

$$\underset{\sim}{Y}(t) = \mathbb{M}\ \dot{\underset{\sim}{X}}(t) + \mathbb{N}\ \underset{\sim}{X}(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\ \mathbb{C}\ \underset{\sim}{X}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.14}$$

besitzt.

Beweis Falls (1.14) gilt, so folgt aus den Bedingungen

$\underset{\sim}{X}(t) = 0$ für $t \geqslant 0$ und $\underset{\sim}{Y}(0) = 0$

$\underset{\sim}{Y}(t) = 0$ für $t > 0$.

Damit bildet (1.14) ein inertiales Konstitutivsystem.

Für den Beweis des zweiten Teiles ist es ausreichend, daß für $t > 0$ und $\tau \leqslant 0$

$$\underset{\sim}{L}_i^{(t)} \in S,\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

gilt, was mit einem Widerspruchsbeweis gezeigt wird. Es sei für $t_0 > 0$ und $i_0 \in (1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ angenommen

$$\underset{\sim}{L}_{i_0}(t_0) \notin S.$$

Weiterhin sei der Funktionsraum

$$H = \left\{\underset{\sim}{F} : [0, \infty) \to R^m / \int\limits_0^\infty t\ \mathrm{e}^{-t}\ |\underset{\sim}{F}|^2 \mathrm{d}\tau < +\infty\right\}$$

betrachtet, wobei das Integral im Lebesque'schen Sinn definiert ist. Führt man im H-Raum das Skalarprodukt

$$\langle \underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{G}\rangle := \int\limits_0^\infty t\ \mathrm{e}^{-1}\ \underset{\sim}{F}(t)\ \underset{\sim}{G}(t)\ \mathrm{d}t;\ \underset{\sim}{F},\ \underset{\sim}{G} \in H$$

und die entsprechende Norm

$$\|\underset{\sim}{F}\|^2 = \int\limits_0^\infty t\ \mathrm{e}^{-t}\,|\underset{\sim}{F}|^2\,\mathrm{d}t$$

ein, dann ist H ein Hilbert-Raum (vgl. [1]). Da die Komponenten des relaxierenden Kernes stetige und beschränkte Funktionen sein sollen (vgl. Arbeitshypothese des Abschn. 1. 1), gilt

$$\underset{\sim}{L}_{i_0}^{(t_0)} \in H.$$

Aufgrund des Projektions-Theorems in Hilbert-Räumen, läßt $L_{i_0}^{(t_0)}$ sich wie folgt abspalten,

$$L_{i_0}^{(t_0)}(\tau) = L_i(t_0-\tau) = \mathring{L}(-\tau) + L_i^{\perp}(-\tau), \quad \tau < 0,$$

wobei $L_i^0 \in S$ und $L_i^{\perp} \perp S$ sind. $X(t)$ sei die Kraftge-schichte

$$X(t) = \begin{cases} |t|\, e^{-|t|} L_{i_0}^{\perp}(-t) & \text{für } t < 0 \\ 0 & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases}$$

mit der Anfangsbedingung $X(-\infty) = 0$. Dieser Kraftgeschichte entspricht die Flußgeschichte $Y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, so daß.

$$Y_i(0) = \int_{-\infty}^{0} L_i(-\tau) X(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} |\tau|\, e^{-|\tau|} L_i(-\tau)\, L_i^{\perp}(-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\tau} L_i(\tau)\, L_i^{\perp}(\tau)\, d\tau = 0$$

und

$$Y_{i_0}(t_0) = \int_{-\infty}^{0} L_{i_0}(t-\tau)\, X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{0} \mathring{L}_{i_0}(-\tau) + L_{i_0}^{\perp}(-\tau)\, X(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} \tau\, e^{-\tau} L_{i_0}(\tau)\, L_{i_0}^{\perp}(\tau)\, d\tau > 0$$

gelten.

Hieraus folgt, daß (1.11) nur dann ein inertiales Konstitutiv-system bildet, wenn $L_i^{\perp} = 0$ gilt. Das bedeutet

$$L_i^{(t)} \in S,\ i = 1, 2, \ldots, n \text{ für alle } t \geqslant 0.$$

Aufgrund des Lemmas folgt dann (1.5). Dadurch wir (1.14) voll *bewiesen.*

Theorem 2. *Ein konstitutives Inertialsystem bildet nur dann auch ein relaxierendes System, wenn $M = 0$ gilt.*

Beweis. Es soll bewiesen werden, daß die Beziehun (1.14) mit $Y(t) = 0$ für $t > 0$ und $X(0) = 0$ zu $X(t) = 0$ für $t > 0$ führt, genau dann, wenn $\mathbb{M} = 0$ gilt.

Setzt man $Y(t) = 0$ in die Beziehung (1.14) ein, dann erhält man die Integro-Differential-Gleichung

$$\mathbb{M}\dot{X}(t) + \mathbb{N} X(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\, \mathbb{C} X(\tau) d\tau = 0 \tag{1.15}$$

mit der Anfangsbedingung

$$X(0) = 0. \tag{1.16}$$

Durch Differenzierung aus (1.15) erhält man

$$\mathbb{M}\ddot{X}(t) + \mathbb{N}\dot{X}(t) - \mathbb{A}\int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\, \mathbb{C} X(\tau)\, d\tau = 0. \tag{1.17}$$

Multipliziert man (1.15) mit $\mathbb{A}$ und addiert es zu (1.17), dann erhält man die Differentialgleichung

$$\mathbb{M}\ddot{X} + (\mathbb{A}\mathbb{M} + \mathbb{N})\dot{X} + \mathbb{A}\,\mathbb{N}\, X = 0. \tag{1.18}$$

Unter der Anfangsbedingung (1.16) nimmt (1.18) nur dann die triviale Lösung an, wenn $\mathbb{M} = 0$ gilt. Das beweist das Theorem.

1.2. *Boltzmann-Volterra-und Kelvin-Voigt-Materialien ohne innere Parameter*

Ein Boltzmann-Volterra Material ist durch eine Spannungs-Verzerrungs-Beziehun in der Form

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{K}(t-\tau)\,\dot{\varepsilon}(\tau)\, d\tau \tag{1.19}$$

definiert. Hier bedeuten σ und ε die Spannungen *bzw.* die Verzerrungen in der vektoriellen Form.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

$\mathbb{K}(t)$ ist der relaxierende Kern mit den Komponenten $K_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, 3, \ldots, 6$, $t \in [0, \infty)$.

Es seien $\dot{\varepsilon}$ als Kraft X und σ als Fluß Y zu betrachten. Dann stellt (1.19) eine konstitutive Beziehung vom Typus (1.4) dar, die dem Fall $\mathbb{M} = \mathbb{N} = 0$ und $\mathbb{L} = \mathbb{K}$ entspricht. Gemäß dem Grundtheorem folgt, daß das Boltzmann-Volterra-Gesetz (1.19) genau dann en inertiales Konstitutivsystem bildet, wenn

$$\mathbb{K}(t) = e^{-\mathbb{A}t}\, \mathbb{C}, \tag{1.21}$$

mit $\mathbb{A}$ und $\mathbb{C}$ 6x6-Matrizen, gilt.

Natürlich stellt der relaxierende Kern (1.21) nicht den allgemein relaxierenden Kern dar. Bei den meisten viskoelastischen Materialien liegen neben Spannungen und Verzerrungen innerer Parameter vor, die in der Anwendung des Trägheitsprinzips eine Rolle spielen. Die Anwesenheit dieser Parameter wird in dem nächsten Abschnitt betrachtet.

Jetzt soll die allgemeine Form der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung, die ein Kelvin-Voigt Material beschreibt, betrachtet werden. Es sei

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbb{G}(t-\tau)\,\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(t)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1.22}$$

wobei $\mathbb{G}(t)$ eine Matrixfunktion mit den Komponenten $G_{ij}(t)$, $t \in [0, \infty)$ bezeichnet. Nehmen wir an, daß der Kern $\mathbb{G}$ hinreichend glatt ist.

Durch Differenzieren und eine partielle Integration wird (1.18)

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) = \mathbb{G}(0)\,\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(t) + \dot{\mathbb{G}}(0)\,\underset{\sim}{\sigma}(t) - \int_{-\infty}^{t} \ddot{\mathbb{G}}(t-\tau)\,\underset{\sim}{\sigma}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.23}$$

Mit σ als Kraft X, $\dot{\varepsilon}$ als Fluß Y und mit $\mathbb{M} = \dot{\mathbb{G}}(0)$, $\mathbb{N} = \mathbb{G}(0)$ und $\mathbb{L}(t) = -\mathbb{G}(t)$ stellt (1.19) ein konstitutives Gesetz des Typus (1.12) dar. Als Konsequenz der Annahme, daß das Kelvin-Voigt Materialgesetz mit $\underset{\sim}{\sigma}$ als Kraft und $\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ als Fluß ein konstitutives Inertialsystem bildet, gilt eine Spannungs-Verzerrungs-Beziehung der Form

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) = \mathbb{M}\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(t) + \mathbb{N}\underset{\sim}{\sigma}(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\,\mathbb{C}\,\underset{\sim}{\sigma}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1.24}$$

wobei $\mathbb{M}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{A}$ und $\mathbb{C}$ 6×6-Matrizen bezeichnen.

Bemerkung. Die Boltzmann-Volterra Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen, die dem Kern (1.21) entsprechen, bilden gleichzeitig konstitutive Inertial- sowie relaxierende Systeme. Die Kelvin-Voigt Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (1.24) bilden nur dann auch relaxierende Systeme, wenn $\mathbb{M} = 0$ gilt.

1.3 *Boltzmann-Volterra-Materialien mit inneren Parametern*

Das Experiment zeigt, daß nicht alle viskoelastischen Boltz mann-Volterra Materialien, mit Hilfe relaxierender Kerne vom Typus (1.21) beschreibbar, sind. Das bedeutet, daß es Boltzmann-Volterra Materialien gibt, die in Spannung und Verzerrungsgeschwindigkeit kein konstitutives Inertialsystem bilden. Gemäß des Trägheitsprinzips sollen Körper ohne Einwirkung von Kräften in Ruhe bleiben. Demzufolge soll für Boltzmann-Volterra Materialien, für die (1.21) nicht gilt, die Existenz bestimmter innerer Kräfte angenommen werden.

Diese inneren Kräfte, die wir „innere Spannungen" nennen werden, sind durch die folgende Definition eingeführt:

Definition. Eine Menge von linear unabhängigen Parametern

$$s_1, s_2, \ldots, s_n$$

bildet ein vollständiges System von inneren Spannungen, falls

1. ihre Elemente mit den Verzerrungsgeschwindigkeiten durch ein inertiales Konstitutivsystem verbunden sind und
2. die Spannungen $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$ linear abhängige Funktionen von $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sind.

Anmerkung. Durch diese Definition sind die inneren Spannungen nicht eindeutig bestimmt.

Es sei nun ein System mit der minimal erforderlichen Zahl n von inneren Spannungen betrachtet. Gegeben sei mit $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ein solches System. Es ist verständlich, daß jedes beliebige andere Umkehrbar eindeutig mit $s_1, s_2, \ldots, s_n$ verbundene System $s_1', s_2', \ldots, s_n'$ auch ein vollständiges System von inneren Spannungen bildet.

Im folgenden wird die Frage der Bestimmung eines vollständigen Systems innerer Spannungen untersucht.

Es sei angenommen, daß zwischen den Verzerrungen und den inneren Spannungen s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ konstitutive Beziehungen gelten, für die alle Arbeitshypothesen des Abschnitts 1. 1 erfüllt sind. Dann haben diese konstitutiven Beziehungen die Form

$$s_i(t) = \underset{\sim}{M}_i\ddot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) + \underset{\sim}{N}_i\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) + \int_{-\infty}^{t} \underset{\sim}{L}_i(t-\tau)\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.25}$$

wobei $\underset{\sim}{L}_i : [0, \infty) \to R^6$ relaxierende Kerne der inneren Spannungen sind. Bildet man den Vektor $\underset{\sim}{s}$ mit s_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ als Komponenten, dann läßt sich (1. 25) in die kompakte Form

$$\underset{\sim}{s}(t) = \mathbb{M}\ddot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) + \mathbb{N}\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathbb{L}(t-\tau)\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.26}$$

umschreiben.

Gemäß Theorem 1 bildet (1.26) ein inertiales Konstitutivsystem genau dann, wenn

$$\mathbb{L} = e^{-\mathbb{A}t}\,\mathbb{C}, \tag{1.27}$$

gilt, wobei $\mathbb{A}$ $n \times n$ – und $\mathbb{C}$ $n \times 6$-Matrizen sind.

Gemäß der Definition des vollständigen Systems von inneren Spannungen, soll die Spannung $\underset{\sim}{\sigma}$ eine lineare Funktion von $\underset{\sim}{s}$ sein.

$$\underset{\sim}{\sigma} = \mathbb{G}\,\underset{\sim}{s}, \tag{1.28}$$

wobei $\mathbb{G}$ eine $6 \times n$-Matrix ist. Mit (1. 27) und (1. 28) wird die konstitutive Gleichung (1.26)

$$\underset{\sim}{\sigma}(t) = \mathbb{G}\mathbb{M}\ddot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) + \mathbb{G}\mathbb{N}\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) + \mathbb{G}\int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\,\mathbb{C}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{1.29}$$

Vergleicht man aber (1.29) mit (1.19) folgt, daß

$$\mathbb{G}\,\mathbb{M} = \mathbb{G}\,\mathbb{N} = 0 \tag{1.30}$$

gilt.

Das bedeutet, daß die Matrizen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{N}$ keinen Einfluß auf die Spannungs-Verzerrungs – Beziehung haben. Man kann dann durch eine geeignete Änderung der Definition der inneren Spannungen die Matrizen $\mathbb{M}$ und $\mathbb{N}$ immer zu Null machen. Dann lauten die Ausdrücke für die inneren Spannungen und für die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

$$\underset{\sim}{s}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\,\mathbb{C}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\tau)\,d\tau \tag{1.31}$$

bzw.

$$\underset{\sim}{\sigma}(t) = \mathbb{C}\int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\,\mathbb{G}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\tau)\,d\tau. \tag{1.32}$$

Aus (1.27) folgt durch Differentiation

$$\dot{\underset{\sim}{s}} = \mathbb{C}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \mathbb{A}\,\underset{\sim}{s} \tag{1.33}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\underset{\sim}{s}(-\infty) = 0.$$

Gemäß der Definition des vollständigen Systems von inneren Spannungen soll die Spannung $\underset{\sim}{\sigma}$ eine Funktion von $\underset{\sim}{s}$ sein. Wegen der vorausgesetzten Linearität ist diese Beziehung in der Form

$$\underset{\sim}{\sigma} = \mathbb{G}\,\underset{\sim}{s} \tag{1.34}$$

darstellbar, wobei $\mathbb{G}$ eine $6 \times n$-Matrix ist. Multiplikation der Gleichung (1.33) von links mit $\mathbb{G}$ liefert :

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \mathbb{G}\,\mathbb{C}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \mathbb{G}\,\mathbb{A}\,\underset{\sim}{s}. \tag{1.35}$$

Führt man die Abkürzungen

$$\mathbb{H} = (\mathbb{G}\mathbb{C})^{-1}$$

und

$$\mathbb{B} = (\mathbb{G}\mathbb{C})^{-1}\,\mathbb{G}\,\mathbb{A}$$

ein, dann geht Gleichung (1. 35) in die Form

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \mathbb{H}\,\dot{\underset{\sim}{\sigma}} + \mathbb{B}\,\underset{\sim}{s} \tag{1.36}$$

über.

Diese konstitutive Beziehung verallgemeinert zusammen mit (1. 33) das konstitutive Gesetz von Maxwell. In speziellen Fällen $n = 6$ und $G = I$ reduziert sich Gleichung (1. 36) auf die Maxwell'sche Konstitutiv-Gleichung.

Das Resultat der vorliegenden Untersuchung kann wie folgt zusammengefaßt werden :

Ein viskoelastisches Material vom Boltzmann-Volterra-Typ besitzt genau dann ein vollständiges System innerer Spannungen, wenn der relaxierende Kern exponentielle Form

$$\mathbb{K}(t) = \mathbb{G}\,e^{-\mathbb{A}t}\,\mathbb{C} \tag{1.37}$$

hat, wobei $\mathbb{G}$, $\mathbb{A}$ und $\mathbb{C}$ $6\times n$-, $n\times n$- und $n\times 6$-Matrizen bezeichnen.

Ist $\underset{\sim}{s}$ ein vollständiges System innerer Spannungen, dann ist das konstitutive Gesetz in folgender Form darstellbar :

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \mathbb{G}\,\mathbb{C}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \mathbb{G}\,\mathbb{A}\,\underset{\sim}{s}, \quad \sigma(-\infty) = 0, \tag{1.38}$$

$$\dot{\underset{\sim}{s}} = \mathbb{C}\,\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} - \mathbb{A}\,\underset{\sim}{s}, \quad \underset{\sim}{s}(-\infty) = 0. \tag{1.39}$$

1.4 *Kelvin-Voigt-Materialien it inneren Parametern*

Es seien jetzt Kelvin-Voigt-Materialien vom Typus (1.23) betrachtet. Wie in Abschnitt 1.2 gezeigt, bildet die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung im allgemeinen in Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeit allein kein inertiales Konstitutiv-system.

Genau wie im Fall der Boltzmann-Volterra-Materialien müssen dann innere Parameter eingeführt werden. Im folgenden werden wir diese inneren Parameter als „innere Verzerrungen" bezeichnen. Wir führen diese inneren Verzerrungen durch folgende Definition ein :

Definition. Eine Menge von linear unabhängigen Parametern

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n$$

bildet ein vollständiges System von inneren Verzerrungen, falls

1. ihre Elemente mit den Spannungen durch ein inertiales Konstitutivsystem verbunden sind, und
2. die Verzerrungsgeschwindigkeiten linear abhängige Funktionen der inneren Verzerrungsgeschwin-digkeiten $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$ sind.

Wie im Fall der Boltzmann-Volterra-Spannungs-Verzerrungs-Beziehung sei angenommen, daß zwischen den Spannungen $\underset{\sim}{\sigma}$ und den inneren Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot q_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, konstitutive Beziehungen gelten, für die alle Arbeitshypothesen des Abschnitts 1. 1 erfüllt seien. Dann sind die inneren Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot q_i$ mit den Spannungen $\underset{\sim}{\sigma}$ durch eine Beziehung der Form

$$\dot q_i(t) = \underset{\sim}{M}_i\,\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(t) + \underset{\sim}{N}_i\,\underset{\sim}{\sigma}(t) + \int_{-\infty}^{t} \underset{\sim}{L}_i(t-\tau)\,\underset{\sim}{\sigma}(\tau)\,d\tau \tag{1.40}$$

verbunden.

Bildet man den Vektor q mit q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ als Kom
dann läßt sich (1. 40) in die kompakte Form

$$\dot{\underset{\sim}{q}}(t) = \mathbb{M}\,\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(t) + \mathbb{N}\,\underset{\sim}{\sigma}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathbb{L}(t-\tau)\,\underset{\sim}{\sigma}(\tau)\,d\tau \qquad (1.41)$$

umschreiben.

Wendet man wieder das Theorem 1 an, dann erhält man die Beziehung

$$\dot{\underset{\sim}{q}}(t) = \mathbb{M}\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(t) + \mathbb{N}\,\underset{\sim}{\sigma}(t) + \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\,\mathbb{C}\,\underset{\sim}{\sigma}(\tau)\,d\tau, \qquad (1.42)$$

wobei $\mathbb{A}$ eine $n+n$-und $\mathbb{C}$ eine $n \times 6$-Matrix ist.

Da die Verzerrungsgeschwindigkeiten von den inneren Verzerrungsgeschwindigkeiten linear abhängen

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \mathbb{G}\,\dot{\underset{\sim}{q}},$$

folgt aus (1.42)

$$\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(t) = \mathbb{G}\mathbb{M}\dot{\underset{\sim}{\sigma}}(t) + \mathbb{G}\mathbb{N}\,\underset{\sim}{\sigma}(t) + \mathbb{G}\int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbb{A}(t-\tau)}\mathbb{C}\underset{\sim}{\sigma}(\tau)\,d\tau. \qquad (1.43)$$

Ist die Matrix $\mathbb{M}$ nicht Null, wie es normalerweise für die Kelvin--Voigt-Materialien der Fall ist, dann bildet (1.42) in Spannungen und inneren Verzerrungsgeschwindigkeiten ein inertiales, aber kein relaxierendes Konstitutivsystem. Das bedeutet, daß es Spannungsgeschichten $\sigma(t)$, $t \leqslant 0$, mit $\sigma(0) = 0$ gibt, so daß für $t > 0$ die Spannungen nicht verschwinden, obwohl für $t \geqslant 0$ $\dot{q}(t) = 0$ gilt.

LITERATURVERZEICHNIS

1. A. Mukherjea, K. Pothoven, *Real and Functional Analysis*, Plenum Press, New York and London, 1978
2. W. Pogorzelski, *Integral equations and their applications*, Vol. 1, Oxford, Pergamon, Warsaw, OWN, 1966
3. I. Gyarmaty, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1970
4. C. Truesdell, *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York, 1969
5. Ch. Soret, *De la conductibilité calorifique dans les cristaux*, J. Phys. (Paris) **2** (1983) 241—259
6. P. Curie, *A propos des éléments de cristallographie physique de M. Ch. Sorel*, Arch. Soc. Phys. Hist., Nat. Genève **29** (1893) 237—254
7. W. Voigt, *Fragen der Kristallphysik I*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **3** (1903) 87—89
8. P. J. Dunlop, L. J. Gostings, *Interacting flows in liquid diffusion*, J. Amer. Chem. Soc. **77** (1955) 5238—5249
9. D. G. Miller, *Thermodynamics of irreversible processes, the experimental verification of the Onsager reciprocal relations*, Chem. Rev. **60** (1960) 15—37
10. P. Mazilu, *Die Onsager'schen Reziprozitätsbeziehungen in der Thermodynamik der Boltzmann-Volterra-Materialien*, ZAMM **65** (1985) 3, 137—139
11. W. A. Day, *The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory*, Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1972

12. L. Onsager, *Reciprocal relations in irreversible processes*, Phys. Rev., II. Ser. **37** (1931), **38** (1931)
13. E. Dühring, *Kritische Geschichte der Prinzipien der Mechanik*, Berlin, 1873
14. E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, F. A. Brockhaus, Leipzig, 1897
15. H. Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1963
16. P. Mazilu, *Sur la loi constitutive de Boltzmann-Volterra*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. *I* (1973) 951—952
17. P. Mazilu, *On the constitutive law of Boltzmann-Volterra*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **18** (1973) 1067—1069
18. P. Mazilu, *The equation of heat conduction*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **23** (1978) 419—435
19. P. Mazilu, *Über den Zusammenhang zwischen den jüngsten geophysischen Messungen der Gravitationskonstante und den Experimenten von Brush and Eötvös*, Ing.—Archiv **5** (1987) 287—296
20. P. Mazilu, *Actio-Reactio mit endlicher Wellengeschwindigkeit, abgeleitet aus dem Trögheitsprinzip*, Acta Mechanica **79** (1989) 233—257
21. H. Weber, *Ein nichtlineares Stoffgesetz für die ebene photoviskoelastische Spannungsanalyse*, Rheol. Acta **22** (1983) 114—122
22. H. Weber, *Einachsiges nichtlineares photoviskoelastisches Verhalten von PVC-weich und UP-Leguval*, Rheol. Acta **20** (1981) 85—93
23. H. Buggisch, P. Mazilu und H. Weber, *Parameter identification for viscoelastic materials*, Rheologica Acta **27** (1988) 363—368

Eingegangen am 1. April 1991

Institut für Mechanische Verfahrenstechnik
und Mechanik der Universität Karlsruhe (TH)
D—7500 Karlsruhe, Germany