REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 21, N° 1, 1992, pp. 59–65

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE STEFFENSEN

ION PĂVĂLOIU
(Cluj-Napoca)

Soit X un espace de Banach et

(1) $$f(x) = 0$$

une équation, où $f : X \to X$ est une application et 0 est l'élément nul de l'espace X.

Désignons par $[u, v; f]$ la différence divisée du premier ordre de l'application f sur les points $u, v \in X$ et par $[u, v, w; f]$ la différence divisée de deuxième ordre de cette application sur les points $u, v, w \in X$. Ces différences ont été introduites dans les travaux [1], [2], [5], [6], [7]. Supposons leur symétrie comme fonctions des points sur lesquels elles sont définies. À côté de l'équation (1) nous considérons une application $g : X \to X$ à l'aide de laquelle nous construisons la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par le procédé itératif suivant :

(2) $$x_{n+1} = x_n - [x_n, g(x_n); f]^{-1} \cdot f(x_n) \quad n \in \mathbb{N}$$

x_0 étant un élément arbitraire de X.

Il est bien connu que la différence divisée $[x_n, g(x_n); f]$ est une application linéaire de X en lui même, la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sera bien définie dans le cas où cette application admettra une inverse pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

Nous admettrons le fait que l'application $[x_0, g(x_0); f]$ admet un inverse $[x_0, g(x_0); f]^{-1}$ et nous donnerons des conditions suplémentaires pour que tous les éléments de la suite $([x_n, g(x_n); f])_{n=0}^{\infty}$ soient inversables. En même temp nous donnerons des conditions pour la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, fournie par la relation (2).

On remarque que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, fournie par la méthode (2), coincide avec la suite $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ donnée par les égalités suivantes :

(3) $$y_{n+1} = g(y_n) - [y_n, g(y_n); f]^{-1} \cdot f(g(y_n)),$$

où $y_0 = x_0$, $n = 1, 2, \ldots$,

Considérons les nombres réels et positifs $B_0, K, \alpha, \rho, \lambda$ et $d_0 = \|f(x_0)\|$. Désignons par $q \geqslant 2$ un nombre réel quelconque. Considérons l'ensemble

(4) $$S = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leqslant \lambda\}, \; x_0 \in X$$

et désignons par a la plus petite racine de l'équation :

(5) $$(1 + \rho)t^2 - [2(1 + \rho) + \alpha d_0^{q-2}]t + 1 + \rho = 0.$$

En ce qui concerne la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par (2) on a le théorème suivant :

Théorème. *Si les applications f et g et les nombres réels B_0, K, α, ρ, λ et q vérifient les conditions suivantes :*

i. $\|f(g(x))\| \leqslant \alpha \|f(x)\|^{q-1}$ *pour chaque* $x \in S$;

ii. *la différence divisée* $[u, v; g]$ *est symétrique comme fonction de* u *et* v *et* $\|[u, v; g]\| \leqslant \rho$, *pour chaque* $u, v \in S$;

iii. $\|[u, v, w; f]\| \leqslant K$, *pour chaque* $u, v, w \in S$;

iV. *il existe l'application* $[x_0, g(x_0); f]^{-1}$ *et* $\|[x_0, g(x_0); f]^{-1}\| \leqslant B_0$;

V. $B_0^2 K(1 + \rho)\|f(x_0)\| \leqslant a$;

Vi. $\lambda \geqslant \max \{\mu, \ \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\|\}$ *où*

$$\mu = B_0 b^{\frac{1}{q-1}} \cdot \frac{c\delta_0}{1 - (c\delta_0)^{q-1}}, \quad c = \frac{1}{(1-a)^2}, \quad b = KB_0^2\alpha,$$

$$\delta_0 = b^{\frac{1}{q-1}} d_0;$$

Vii. $c\delta_0 < 1$;

alors l'équation (1) a au moins une solution $\bar{x} \in S$, $\bar{x} = \lim x_n$ *et on a la délimitation suivante :*

$$\|\bar{x} - x_n\| \leqslant B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot \frac{(c\delta_0)^{q^n}}{1 - (c \cdot \delta_0)^{q^n(q-1)}}$$

Démonstration. Désignons par :

$$D_i = [x_i, g(x_i); f] \quad \text{et} \quad \Gamma_i = D_i^{-1}, \ i = 0, 1, \ldots,$$

Si nous envisageons les notations ci-dessus, nous déduisons de (2) et (3 les relations suivantes :

(6) $$x_1 = x_0 - \Gamma_0 \cdot f(x_0)$$

(7) $$x_1 = g(x_0) - \Gamma_0 \cdot f(g(x_0))$$

d'où l'on déduit :

(8) $$\|x_1 - x_0\| \leqslant B_0 d_0$$

(9) $$\|x_1 - g(x_0)\| \leqslant B_0 \alpha d_0^{q-1}$$

En employant l'identité :

$$f(x_1) = f(x_0) + [x_0, g(x_0); f](x_1 - x_0) + [x_1, x_0, g(x_0); f](x_1 - x_0)(x_1 - g(x_0))$$

de iii, (6), (7), (8), (5) et de l'hypothèse $x_1 \in S$ on déduit :

(10) $$\|f(x_1)\| \leqslant KB_0^2 \alpha d_0^q.$$

Pour prouver que $x_1 \in S$ nous remarquons que la plus petite racine de l'équation (5) vérifie la relation $0 < a < 1$, donc $c = \dfrac{1}{(1-a)^2} > 1$

Alors de (8) il résulte que :

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant B_0 d_0 \leqslant B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c b^{\frac{1}{q-1}} d_0 \leqslant B_0 \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c\delta_0 \leqslant \mu \leqslant \lambda$$

c'est-à-dire $x_1 \in S$.

Par la suit nous prouvons l'existence de l'application $\Gamma_1 = D_1^{-1}$. En employant les propriétés des différences divisées et les hypothèses du théorème on a :

(11) $$\|D_0 - D_1\| = \|[x_0, g(x_0); f] - [x_1, g(x_1); f]\| \leqslant \|[x_0, g(x_0); f] - [x_1 g(x_0); f]\| + \|[x_1, g(x_0); f] - [x_1, g(x_1); f]\| \leqslant$$
$$\leqslant KB_0 d_0 + K\rho B_0 d_0 = K(1 + \rho)B_0 d_0.$$

Pour établir la dernière inégalité on emploie le fait que $g(x_0)$, $g(x_1) \in S$. Démontrons maintenant ces appartenances. En effect on a :

$$\|g(x_0) - x_0\| < \|g(x_0) - x_0\| + \rho\mu \leqslant \lambda$$

et

$$\|g(x_1 - x_0\| \leqslant \|g(x_1) - g(x_0)\| + \|g(x_0) - x_0\| \leqslant \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\| \leqslant \lambda.$$

De (11) on déduit :

$$\|\Gamma_0 \cdot (D_0 - D_1)\| \leqslant B_0^2 K(1 + \delta)d_0 \leqslant a.$$

Du fait que $0 < a < 1$ et de l'hypothèse (Vi) il résulte qu'on peut inverser l'opérateur

$$H_0 = I - \Gamma_0(D_0 - D_1),$$

où I représente l'application identique.

On a :

$$\|H_0^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - a}.$$

Remarquons par la suite que :

$$H_0 = \Gamma_0 D_1$$

c'est-à-dire

$$H_0^{-1} = D_1^{-1} \cdot \Gamma_0^{-1}$$

d'où l'on déduit

$$D_0^{-1} = \Gamma_1 = H^{-1}{}_0 \cdot \Gamma_0.$$

et

$$\|\Gamma_1\| \leqslant \frac{B_0}{1 - a}.$$

Si nous désignons par B_1 l'expression $\|\Gamma_1\|$, l'inégalité ci-dessus devient :

(12) $$B_1 \leqslant \frac{B_0}{1 - a}$$

Prouvons maintenant que :

$$B_1^2K(1+\rho)d_1 < a.$$

En effet de (10) et (12) on déduit

$$B_1^2K(1+\rho)d_1 \leqslant \frac{B_0^4K^2(1+\rho)\alpha d_0^q}{(1-a)^2} = \frac{[B_0^2\cdot K\cdot(1+\rho)d_0]^2}{(1-a)^2(1+\rho)}\cdot\alpha\cdot d_0^{q-2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{a^2\alpha d_0^{q-2}}{(1-a)^2(1+\rho)} = a.$$

La dernière égalité est justifiée du fait que a représente la plus petite racine de l'équation (5).

Supposons par la suite que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

α) il existe les opérateurs $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$;

β) $B_i \leqslant \dfrac{B_{i-1}}{1-a}$ où $B_i = \|\Gamma_i\|$ $i = 1, 2, \ldots, s$;

γ) $B_s^2K(1+\rho)d_s \leqslant a$, $d_s = \|f(x_s)\|$;

δ) $x_i \in S$, $g(x_i) \in S$, pour $i = 1, 2, \ldots, s+1$

Dans ces hypothèses, en employant une identité analogue à celle de laquelle on a déduit la relation (10), on a l'inégalité suivante :

$$\|f(x_{s+1})\| \leqslant KB_s^2\alpha\,\|f(x_s)\|^q \tag{13}$$

c'est-à-dire :

$$d_{s+1} \leqslant KB_s^2\alpha d_s^q.$$

Mais de β) il résulte l'inégalité suivante :

$$d_{s+1} \leqslant \frac{KB_0^2\alpha d_s^q}{(1-a)^{2s}}$$

où

$$d_{s+1} \leqslant bc^s d_s^q. \tag{14}$$

Des hypothèses de l'induction il résulte les inégalités suivantes :

$$d_{i+1} \leqslant bc^i d_i^q \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

En multipliant par $b^{\frac{1}{q-1}}$ les termes des dernières inégalités et en désignant par δ_i l'expression :

$$\delta_i = b^{\frac{1}{q-1}}d_i, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

nous obtenons :

$$\delta_{i+1} \leqslant c^i\cdot\delta_i^q, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Admettons maintenant l'existence des nombres :

$$\alpha_i \text{ et } \beta_i, \quad i = 0, 1, \ldots, s$$

tels que :

$$\delta_i \leqslant c^{\alpha_i}\delta^{\beta_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, s$$

où $\beta_0 = 1$ et $\alpha_0 = 0$. Alors on a :

$$\delta_{i+1} \leqslant c^i c^{q\alpha_i}\delta_0^{\beta_i q}.$$

c'est-à-dire

$$\delta_{i+1} \leqslant c^{q\alpha_i+i}\delta_0^{\beta_i q} = c^{\alpha_{i+1}}\cdot\delta_0^{\beta_{i+1}}$$

où $\alpha_{i+1} = q\alpha_i + i$ $\alpha_0 = 0$ $i = 0, 1, \ldots, s$;
et $\beta_{i+1} = q\cdot\beta_i$, $\beta_0 = 1$ $i = 0, 1, \ldots, s$.

Des relations ci-dessus nous déduisons facilement que :

$$\alpha_i = \frac{i-1-iq+q^i}{(q-1)^2}, \quad \beta = q^i, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Alors si nous envisageons le fait que $c > 1$, nous déduisons les inégalités suivantes :

$$\delta_{i+1} \leqslant (c\delta_0)^{q^{i+1}}; \quad i = 0, 1, \ldots, s. \tag{15}$$

Démontrons maintenant que l'application Γ_{s+1} existe.

En effet on a :

$$\|D_s - D_{s+1}\| = \|[x_s, g(x_s); f] - [x_{s+1}, g(x_{s+1}); f]\| \leqslant K(1+\rho)B_s d_s.$$

et

$$\|\Gamma_s(D_s - D_{s+1})\| \leqslant K(1+\rho)B_s^2 d_s \leqslant a.$$

Par conséquent l'application

$$H_s = I - \Gamma_s\cdot(D_s - D_{s+1}) = \Gamma_s D_{s+1}$$

admet une inverse pour laquelle

$$\|H_s^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-a}.$$

Des relations ci-dessus nous déduisons que :

$$D_{i+1}^{-1} = \Gamma_{i+1} = H_i^{-1}\Gamma_i$$

c'est-à-dire

$$\|\Gamma_{i+1}\| \leqslant \frac{B_i}{1-a}$$

ce qui nous conduit à l'inégalité suivante :

$$B_{s+1} \leqslant \frac{B_s}{1-a} \tag{16}$$

c'est-à-dire à l'inégalité β) pour $i = s+1$.

Démontrons maintenant qu'on a l'inégalité γ) pour $s+1$ c'est-à-dire :

$$B_{s+1}^2K(1+\rho)d_{s+1} \leqslant a.$$

En effet de (15) il résulte $d_s \leqslant d_0$ et alors de (13) et (16) déduisons :

$$B_{s+1}^2 K(1+\rho)d_{s+1} \leqslant \frac{B_s^2 K(1+\rho)}{(1-a)^2} K B_s^2 \alpha d_s^q =$$

$$= \frac{B_s^2 K(1+\rho)d_s}{(1-a)^2(1+\rho)} \alpha d_s^{q-2} \leqslant \frac{a^2 \alpha d_s^{q-2}}{(1-a)^2(1+\delta)} \leqslant a.$$

Démontrons par la suite l'appartenance de x_{s+1} et celle de $g(x_{s+1})$ a la sphère S.

On démontre facilement que $\alpha_{s+1} + \frac{s+1}{2} \leqslant q^{s+1}$, pour $q \geqslant 2$, pour chaque $s \in \mathbb{N}$; alors on déduit de (2)

$$\|x_{s+2} - x_{s+1}\| \leqslant \|\Gamma_{s+1}\| \cdot \|f(x_{s+1})\| \leqslant \frac{B_0}{(1-a)^{s+1}} d_{s+1} \leqslant$$

$$\leqslant B_0 \cdot c^{-\frac{s+1}{2}} \cdot c^{\alpha_{s+1}} \cdot \delta_0^{\beta_{s+1}} \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \leqslant c^{\alpha_{s+1}+\frac{s+1}{2}} \cdot \delta^{\beta_{s+1}} \cdot B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \leqslant$$

$$\leqslant B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^{s+1}}.$$

Des relations ci-dessus il résulte les inégalités suivantes :

$$\|x_{s+2} - x_0\| \leqslant \sum_{k=0}^{s+1} \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \sum_{k=0}^{s+1} (c\delta_0)^{q^k} <$$

$$< \frac{B_0 \cdot b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot c \cdot \delta_0}{1-(c \cdot \delta_0)^{q-1}} \leqslant \mu < \lambda.$$

et

$$\|g(x_{s+2}) - x_0\| \leqslant \|g(x_{s+2}) - g(x_{s+1})\| + \ldots + \|g(x_1) - g(x_0)\| +$$

$$+ \|g(x_0) - x_0\| \leqslant \rho\mu + \|g(x_0) - x_0\| \leqslant \lambda,$$

c'est-à-dire $x_{s+2} \in S$ et $g(x_{s+2}) \in S$.

Nous étudions par la suite la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Des inégalités.

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \frac{B_0}{b^{\frac{1}{q-1}}} (c\delta_0)^{q^k},$$

que sont vraies pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il résulte

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leqslant B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} \cdot \sum_{k=n}^{n+p-1} \cdot (c\delta_0)^{q^k} \leqslant$$

(17)
$$\frac{B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^n}}{1-(c\delta_0)^{(q-1)q^n}}.$$

pour chaque $n, p \in \mathbb{N}$

En envisageant le fait que $c \cdot \delta_0 < 1$ et le fait que l'espace X est complet, il résulte que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est convergente.

Désignons par $\bar{x}$ la limite ; $\lim_{n\to\infty} x_n$. De l'inégalité (17) en y faisant $p \to \infty$ on déduit :

$$\|\bar{x} - x_n\| \leqslant \frac{B_0 b^{-\frac{1}{q-1}} (c\delta_0)^{q^n}}{1-(c\delta_0)^{(q-1)q^n}}$$

De $\delta_n \leqslant (c\delta_0)^{q^n}$ il résulte que :

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}) = 0.$$

ce qui signifie que $\bar{x}$ est la solution de l'équation (1).

BIBLIOGRAPHIE

1. Balasz M şi Goldner G., *Diferenţe divizate în spaţii Banach şi unele aplicaţii ale lor.* St. cerc. mat. 21, 7, (1969), pp. 985–995.
2. Diaconu Adrian. *Interpolation dans les espaces abstraits. Méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles obtenus par l'interpolations inverse.* III Research Seminar of Functional Analysis and Numerical Methodes. Preprint Nr. 1 1985, pp. 21–70
3. Lică Dionis. *Analiza funcţională şi rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor neliniare.* Editura Ştiinţa, Kişinău, 1975.
4. Păvăloiu I. *Sur la méthode de Steffensen pour la résolution des équations opérationnelles non linéaires.* Revue Roumaine de Mathematiques pures et appliquées. **XIII**, *1*, (1968) pp. 149–158.
5. Păvăloiu I. *Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor.* Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
6. Ul'm, S. *Ob obobscennîh razdelennîh raznostiah* I, Izv. Acad. Nauk. Estonskoi S. S. R. **16**, *1*, (1967) pp. 13–26.
7. Ul'm, S. *Ob obobscennîh razdelennîh raznostiah* II, Izv. Acad. Nauk. Estenoskoi S. S. R. **16**, *2*, (1967) pp. 146–155.

Reçu le 20.XII. 1990

Institutul de Calcul
Str. Republicii, 37
3400 Cluj-Napoca
România