REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 21, N° 2, 1992, pp. 183–189

HOMMAGE
À L'OCCASION D'UN IMPORTANT ANNIVERSAIRE

ELENA POPOVICIU
(Cluj-Napoca)

1. Il y a 35 ans, en 1957, a été fondé l'Institut de Calcul de Cluj de l'Académie Roumaine. Le fondateur, l'académicien Tiberiu Popoviciu était, à ce moment, connu dans le monde entier par ses recherches concernant la théorie de l'approximation, la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur, l'analyse numérique et en même temps par l'orientation vers une interprétation des tendances des sciences mathématiques qui avait comme point de départ l'interdépendance de ses divers domaines. Ainsi, par exemple, dans sa vision, l'approximation, la convexité, le calcul numérique au sens moderne étaient en étroite connection avec l'analyse fonctionnelle dont les méthodes étaient toujours présentes dans ses recherches.

D'autre part les résultats qu'il a obtenus en convexité, approximation et analyse numérique ont enrichi l'analyse fonctionnelle avec une nouvelle direction concernant le comportement de certaines fonctionnelles et leurs représentations.

En 1957, l'Institut de Calcul de Cluj était l'un des premiers instituts d'Europe qui avaient comme objectif l'étude de la théorie et de la pratique du calcul. En ce qui concerne la théorie, elle était basée, en principal, sur les recherches de Tiberiu Popoviciu et puis de ses élèves dans les domaines dont nous avons parlé plus haut. La pratique du calcul dont nous venons de parler était une nouvelle direction, une nouvelle manière de concevoir le calcul, y compris aussi l'utilisation des ordinateurs.

L'école mathématique fondée et dirigée par Tiberiu Popoviciu, jusqu'à sa mort (1975) a eu d'importantes contributions dans les directions envisagées auparavant.

2. Comme hommage je désire présenter quelques idées qui se dégagent de l'orientation dont j'ai parlé. Je vais m'arrêter à la théorie de la convexité et celle de l'allure. Beaucoup de résultats que je présenterai ici sont contenus dans mes travaux.

Nos recherches sur la convexité d'ordre supérieur au sens de Tiberiu Popoviciu [7] et les généralisations obtenues par ses élèves [1, 2] ont comme point de départ un véritable principe. Nous essayons présenter certaines idées appartenant à ce principe. Pour mieux comprendre, remarquons qu'un important nombre de problèmes qu'on rencontre couramment dans les investigations mathématiques reviennent à l'étude d'un objet α (il peut être une fonction, une figure géométrique, un nombre, une équation, etc.). Des difficultés de calcul ou bien le manque de certaines propriétés ou, simplement, pour pouvoir appliquer, à l'étude du problème qui se pose, une méthode spéciale, on remplaçe l'objet α par un autre, disons $\tilde{\alpha}$. Ici intervient le principe dont nous avons parlé. On cherche à choisir $\tilde{\alpha}$ dans une classe spéciale qui contient des éléments avec des propriétés préférées qui conviennent pour le problème traité. Il s'agit d'une *classe type* une classe d'éléments *qui sont bons*, convenables pour le problème. Le choix est basé, evidemment, sur des critères bien précisés. Si α est une équation qu'on doit résoudre, l'équation $\tilde{\alpha}$ attachée à α est, en général, plus simple que α ou, en tout cas, plus commode à résoudre.

Nous sommes, souvent, en situation d'avoir besoin de mettre en évidence une classe ou bien un ensemble dont les éléments sont considérés comme modèles, comme typiques pour un problème qu'on doit étudier. Construire ou bien trouver de telles classes ou de tels ensembles d'éléments typiques devient une principe, une opération habituelle. C'est pourquoi on est conduit à considérer le problème de comparer les objets qui interviennent dans n'importe quel domaine de recherche avec les éléments d'une classe qui contient des objets qui servent comme modèles, comme types. Une telle comparaison nous permet de découvrir de nouvelles classes d'objets qui peuvent être importants pour les investigations qui nous intéressent.

Deux domaines importants sont les bénéficiaires du principe dont nous venons de parler : la théorie de l'approximation et la théorie de l'allure. Dans le cadre de l'Institut de Calcul de Cluj on a fait des recherches dans ces deux directions. En dehors, evidemment, de beaucoup d'autres.

3. Comme hommage à la mémoire de Tiberiu Popoviciu, je présenterai, ici, certains moments remarquables du développement de la théorie de l'allure, théorie que j'ai élaborée pour donner un même cadre à divers comportement y compris la convexité d'ordre supérieur elle même [7], [1], [4].

En 1980, après avoir défini la propriété de quasi-convexité d'ordre supérieur j'ai essayé à trouver une propriété, capable d'avoir comme cas particulier la quasi-convexité d'ordre supérieur ainsi que la convexité d'ordre supérieur. Je suis arrivée à une nouvelle théorie que j'ai appelée la théorie de l'allure. Je dois préciser que des cas particuliers d'allure, sous cette dénomination, sont donnés dans mes travaux publiés avant 1980, comme, par exemple [1], [2].

Pour mieux comprendre ce qui va suivre, je dois rappeler la définition de l'allure.

Soit donnés les ensembles non vides A et B. Supposons qu'on a construit pour B une partition

$B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, $m \geqslant 2$, $B_l \cap B_k = \emptyset$ pour $l \neq k$. Considérons aussi l'ensemble non vide d'opérateurs.

$$\mathscr{U} \subset \{U \mid U : A \to B\}. \tag{1}$$

Définition 1. L'élément $x \in A$ a l'allure (B_i, U) si $U(x) \in B_i$.

Définition 2. L'élément $x \in A$ a l'allure $(B_i, \mathscr{U})$ si l'on a $U(x) \in B_i$ pour chaque $U \in \mathscr{U}$.

Pour faire une liaison avec ce qu'on a présenté au début de ce travail, on remarque que si $\alpha = x$ et $\tilde{\alpha} = U(x)$ alors les définitions 1 et 2 nous donnent la possibilité d'obtenir des informations sur le comportement de α par rapport à l'opérateur $U \in \mathscr{U}$, d'après l'appartenence de $\tilde{\alpha}$ à une ou à une autre classe $B_i \subset B$. Je dois préciser, ici, que dans un autre travail [5] j'ai donné la définition du terme « comportement ».

Des cas particuliers remarquables d'allures s'obtiennent quand $B \subset A$. Ils interviennent dans la théorie de l'interpolation et dans la théorie de l'approximation. Dans le cas $B \subset A$, on peut faire la remarque suivante. Si les éléments U de l'ensemble (1) ont la propriété

$$\text{pour } x \in B \text{ on a } U(x) \in B \tag{2}$$

et la propriété plus forte

$$\text{pour } x \in B \text{ on a } U(x) = x, \tag{3}$$

alors les $x \in A$ qui ont des allures données par les définitions 1 et 2 peuvent être considérés comme des généralisations des éléments $y \in B$ et, généralement, ont peut attendre qu'un tel $x \in A$ aura des propriétés semblables à celles des éléments $y \in B$. Ainsi, par exemple, si $A = E$ est un espace linéaire et $B = S \subset E$ un sous-espace alors, dans le cas (3) U est un opérateur d'interpolation par rapport au sous-espace S (voir [2]), il s'agit, en effet d'un projecteur. Dans ce cas y sont contenus beaucoup de procédés d'interpolation et d'approximation. En particulier, ceux qui s'obtiennent par les sections d'un certain ordre d'une série trigonométrique, ou abstraite, de Fourier (dans le cas quand E est un espace de Hilbert) ou bien tous les procédés d'interpolation de type Lagrange nous offrent des exemples très intéressants.

Une autre remarque qu'on peut faire, concernant la définition 2, est la suivante. On peut élaborer une théorie comparative des allures si on considère, par exemple, au lieu de l'ensemble (1) deux sous-ensemble $\mathscr{U}_1$ et $\mathscr{U}_2$ de $\{U \mid U : A \to B\}$.

Définition 3. Si $\mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}_1$ alors l'allure $(B_i, \mathscr{U}_2)$ précède l'allure $(B_i, \mathscr{U}_1)$. Le terme «précède» peut être remplacé avec «est plus faible».

4. Pour me rapporter, maintenant, aux résultats de Tiberiu Popoviciu, en supposant que les notions de polynome d'interpolation et de différence divisée sont bien connues, j'énoncerai les théorèmes qui suivent.

Théorème 1. *La propriété d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, où $X \subseteq \mathbb{R}$, d'être convexe sur $Y \subseteq X$, d'un ordre n où n est fixé et $n \geqslant 0$, est une allure.*

On trouve la démonstration dans mon travail [5]. Mais pour expliciter un peu le contenu du théorème 1, considérons l'entier $n \geqslant 0$ et l'ensemble $X \subseteq \mathbb{R}$ contenant au moins $n+2$ points distincts. $\mathbb{R}$, comme d'habitude, signifie l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire l'axe réel. Pour chaque ensemble de points distincts de $\mathbb{R}$,

(4) $$x_1, x_2, \ldots, x_{n+2},$$

on peut considérer l'opérateur

(5) $$L_{n+1} = L(\mathscr{P}_{n+1}\,;\, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, \cdot)$$

défini sur l'ensemble des fonctions définies sur les points (4) et avec les valeurs en $\mathscr{P}_{n+1}$. Ainsi, pour une telle fonction f on peut considérer l'image

(6) $$L(\mathscr{P}_{n+1}\,;\, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f).$$

On a désigné par (6) le polynome de Lagrange de degré n construit pour f sur les points (4) et par (5) l'opérateur de Lagrange. Par $\mathscr{P}_m$ on a désigné l'ensemble des polynomes de degré tout au plus égal à m. Le polynome (6) est donc une combinaison linéaire des fonctions $e_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $e_i(x) = x^i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n+1$, c'est-à-dire

(7) $$L(\mathscr{P}_{n+1}\,;\, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i e_i$$

où les coefficients a_i sont bien connus (voir, par exemple [2]) et où

(8) $$a_{n+1} = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f]$$

est la différence divisée de f sur les points (4).

Tiberiu Popoviciu a considéré les fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ qu'il a nomées d'ordre n sur $Y \subseteq X$, pour lesquelles les différences divisées (8) gardent un même signe quand on considère de toutes les manières possibles les points (4) dans Y qui doit contenir au moins $n+2$ points distincts. Dans la monographie [7], la première sur les fonctions convexes, dans la littérature mathématique, on trouve les bases de la convexité d'ordre supérieur.

DÉFINITION 3 (de Tiberiu Popoviciu). La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dite convexe (non concave, polynomiale, non convexe respectivement concave) d'ordre n sur $Y \subseteq X$ d'après que l'on a

(9) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\,;\, f] > 0 \;(\geqslant 0,\ =,\ \leqslant 0 \text{ respectivement } < 0),$$

pour chaque choix des points (4) dans l'ensemble Y.

On remarque que la définition 3 permet de considérer les propriétés de convexité (non concavité, polynomialité, non convexité respectivement concavité) d'ordre n même sur un ensemble discret et, en particulier, sur l'ensemble (4) de points, lui même. Les propriétés de continuité, dérivabilité et encore d'autres pour les fonctions d'ordre n sur un ensemble précisé peuvent être trouver en [7].

5. Au lieu des fonctions e_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, on peut considérer un sistème de Tschebytschef φ_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ (voir [2]). Ce cas a été aussi considéré par Tiberiu Popoviciu [7]. On y fait intervenir une généralisation de la différence divisée (8).

La théorie non linéaire des fonctions d'ordre supérieur est contenue dans mes travaux (voir [1], [2], [3]).

6. La démonstration du théorème 1 s'obtient en remarquant que $\mathscr{P}_{n+1}$ peut être partitionné en faisant intervenir les trois cas particuliers dans lesquels l'on a dans (7) $a_{n+1} = 0$, $a_{n+1} > 0$, $a_{n+1} < 0$. Désignons les classes qui s'obtient par $\mathscr{P}_n$, $\mathscr{P}^+_{n+1}$, respectivement $\mathscr{P}^-_{n+1}$. On a donc $\mathscr{P}_{n+1} = \mathscr{P}^+_{n+1} \cup \mathscr{P}_n \cup \mathscr{P}^-_{n+1}$. Si l'on désigne par A l'ensemble des fonctions f définies sur X et par $\mathscr{U}_L$ l'ensemble des opérateurs (5), pour tous les choix des points distincts (4), alors, pour $B = \mathscr{P}_{n+1}$, l'allure $(\mathscr{P}^+_{n+1}, L_{n+1})$ revient à la convexité d'ordre n sur l'ensemble (4) et l'allure $(\mathscr{P}^+_{n+1}, \mathscr{U}_L)$ à la convexité d'ordre n sur X. De la même manière on obtient les correspondentes des allures $(\mathscr{P}_n, L_{n+1})$ $(\mathscr{P}^-_{n+1}, L_{n+1})$, $(\mathscr{P}_n, \mathscr{U}_L)$ et $(\mathscr{P}^-_{n+1}, \mathscr{U}_L)$.

Evidemment la théorie reste valable pour le cas non linéaire [5].

7. La propriété d'une fonction f d'être d'ordre n et liée aussi avec une certaine propriété de monotonie que nous avons envisagée en [3]. En faisant intervenir cette propriété de monotonie, on remarque que si f est convexe d'ordre n sur Y alors quelle que soit la suite de différences divisées

(10) $$([x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}\,;\, f])_{i=1}^{m-n-1}, \quad m \geqslant n+2,$$

pour les points $x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{i+n+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m-n-1$, $m \geqslant n+2$, de l'ensemble Y, on a

(11) $$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}\,;\, f] < [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+2}\,;\, f].$$

En faisant, maintenant, intervenir au lieu des paires (11) des différences divisées consécutives de la suite (10), des triplets

(12) $$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}\,;\, f] \quad [x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+2}\,;\, f],$$
$$[x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+n+3}\,;\, f],$$

nous avons considéré pour $m \geqslant n+3$ la propriété de la fonction $f : X \to \mathbb{R}$, exprimée par les inégalités

(13) $$[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n+2}\,;\, f] < \max\{[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}\,;\, f],$$
$$[x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+n+3}\,;\, f]\},$$

qu'on suppose satisfaites pour chaque ensemble de points

(14) $$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$$

de X. C'est-à-dire qu'on a fixé $m = n+3$, $i = 1$.

DÉFINITION 4. Si la fonction $f : X \to \mathbb{R}$, a la propriété

$$(15) \quad [x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f] < \max \{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f], [x_3, x_4, \ldots, x_{n+3}; f]\}$$

pour chaque choix des points (14) dans l'ensemble X, alors nous disons que f est strictement quasi convexe d'ordre n sur X (voir [4]). On suppose que l'ensemble X contient au moins $n + 3$ points distincts.

Nous avons démontré les théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 2. *La propriété de strictement quasi-convexité d'ordre n, sur X, de la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est une allure.*

THÉORÈME 3. *La propriété de strictement quasi-convexité d'ordre n de f sur l'ensemble X est une allure plus faible, au sens de la définition 3, que l'allure de convexité d'ordre n de la fonction f sur X.*

8. Il présente un intérêt special de remarquer que la convexité sur les graphes, qui a été définie par P. Soltan [8], est aussi une allure. Nous allons donner ce résultat dans un autre travail qui aura comme sujet la convexité d'ordre supérieur pour les fonctions qui sont définies sur un graphe.

9. Nous désirons souligner encore une idée qui se dégage de ce que nous avons dit jusqu'ici. Quand on construit l'image (6) de la fonction f, sous une forme cachée, on passe, premièrement par une transformation qui nous porte de la fonction f à sa restriction à l'ensemble de points (4). L'image (6) est, donc, une prolongement de cette restriction. Dans ce contexte, le comportement de f, par rapport à l'opérateur L_{n+1}, est exprimé par la propriété du prolongement dont nous venons de parler, d'être inclu précisement dans la classe $\mathscr{P}^+_{n+1}$, quand f est convexe d'ordre n, par exemple. Nous sommes donc dans la présence de l'idée d'étudier le comportement d'une fonction par rapport à un opérateur d'interpolation habituelle ou généralisée de diverses manières, à l'aide du comportement des prolongements des diverses restrictions considérées pour la fonction qui intervient.

10. Je dois finir sans oublier que pour Tiberiu Popoviciu la théorie des fonctions d'ordre n au sens que nous avons présenté plus haut est un domaine qui l'a passionné. Mais, en même temps ce domaine était à la base de nombreuses directions de recherche qu'il a cultivées et qui ont enrichi la science de résultats remarquables. Il ne faut pas oublier qu'en dehors de l'école mathématique qu'il a fondée, il a posé les bases de l'informatique en Roumanie en donnant non seulement beaucoup de travaux appartenant au fodements théoriques du calcul, mais en dirigeant, dans le cadre de l'Institut de Calcul de Cluj, comme directeur, la construction des premiers ordinateurs complètement transistorisés de Roumanie. C'était dans les années 1957–1965.

BIBLIOGRAPHIE

1. Elena Moldovan (Popoviciu), *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica, **1** (*24*), 49–80 (1959).
2. Elena Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, 1972.

3. Elena Popoviciu, *Sur une propriété de monotonie des différences divisées*, Mathematical Structures, Computational Mathematics, Mathematical Modeling, Sofia, 399–403 (1975).
4. Elena Popoviciu, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, L'Analyse Num. et la Théorie de l'Appr., **11**, 129–137 (1982).
5. Elena Popoviciu, *Sur certaines propriétés des fonctions quasi-convexes L'Analyse Num. et la Theorie de l'Appr.*, *12*, 1075–186 (1983).
6. Tiberiu Popoviciu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. Soc. Sci. Acad. Roumaine, **20**, 45–49 (1938).
7. Tiberiu Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Actualités Sci. et Ind. 992, Paris (1945).
8. V. G. Boltianski et Petru Soltan, *Geometrie combinatorique de certaines classe d'ensembles convexes*, Chişinău (1978), en russe.

Reçu le 25.IX.1991

Elena Popoviciu
str. Roşiori nr. 40
3400 Cluj-Napoca
Roumanie