

## REMARQUE SUR UN THÉORÈME DE LA MOYENNE DE TIBERIU POPOVICIU

ELENA POPOVICIU  
(Cluj-Napoca)

1. Dans notre travail [4] nous avons évoqué quelques moments significatifs concernant l'organisation de l'activité dans l'Institut de Calcul de Cluj de l'Académie Roumaine. Comme nous l'avons précisé, l'Institut a été fondé, en 1957, par l'académicien Tiberiu Popoviciu. Ce tome de notre revue est un hommage offert par les élèves et les collaborateurs de Tiberiu Popoviciu, après 35 ans d'activité de l'Institut dont il a été le directeur jusqu'à sa mort (en 1975).

On peut trouver des détails concernant l'organisation de l'Institut de Calcul dans beaucoup de travaux comme, par exemple, en [1], [4]. Nous n'insisterons plus ici. Le but de cette note est de souligner quelques idées qui peuvent être considérées comme fondamentales pour les recherches mathématiques de Tiberiu Popoviciu et de ses collaborateurs.

2. Je me propose de présenter une idée qui peut être considérée comme fondamentale non seulement pour la théorie de l'interpolation mais aussi pour l'analyse mathématique tout entière. Il s'agit de la question suivante.

Etant donné un ensemble non vide  $G$  et un sousensemble aussi non vide  $H$  qui est différent de  $G$ , on considère un ensemble non vide  $\mathcal{U}$ , d'opérateurs

$$(1) \quad \mathcal{U} = \{U \mid U : G \rightarrow H\}.$$

Soit aussi  $A$  une fonctionnelle  $A : G \rightarrow \mathbb{R}$ . La question qui se pose est de préciser les conditions qui assurent la valabilité de la proposition quel que soit l'élément  $g \in G$ , il existe un opérateur  $U \in \mathcal{U}$  qui satisfait la relation

$$(2) \quad A(g) = A(U(g)).$$

La relation (2) exprime une propriété de la moyenne dont les cas particuliers se trouvent en grand nombre dans l'analyse mathématique. Pour en trouver des exemples, on peut consulter mon livre [1]. En précisant d'une manière convenable les conditions imposées à la fonctionnelle  $A$  et aux opérateurs de l'ensemble  $\mathcal{U}$ , on obtient un très important théorème de Tiberiu Popoviciu. Pour pouvoir en donner l'énoncé il faut rappeler quelques notations et notions.

Soit  $H = \mathcal{P}_{n+1}$  l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à  $n + 1$  et  $G$  l'espace  $C_{[a,b]}$  des fonctions continues sur l'intervalle compact  $[a, b]$ . Dans les travaux de Tiberiu Popoviciu et spécialement dans sa monographie [6] on peut trouver la définition des fonctions d'ordre  $n$ . Soit fixé le nombre entier  $n \geq -1$ .

Les éléments de  $\mathcal{P}_{n+1}$  sont des combinaisons linéaires  $\sum_{i=0}^{n+1} a_i e_i$  où les  $a_i$  sont des nombres réels et les fonctions  $e_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$  ont les valeurs  $e_i(x) = x^i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . Si les points distincts

$$(3) \quad x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$$

et les nombres

$$(4) \quad y_1, y_2, \dots, y_{n+2}$$

sont donnés alors l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  contient un élément et un seul qui prend sur les points (3) les valeurs respectives (4). Avec ces données, on peut construire l'opérateur de Lagrange

$$(5) \quad L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; g)$$

L'opérateur (5) rattaché à chaque élément  $g \in C_{[a,b]}$  un élément et un seul de l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  qui s'appelle le polynôme de Lagrange de la fonction  $g$  sur les points (3). Si on exprime ce polynôme sous la forme

$$(6) \quad L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; g) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i(g) e_i$$

alors le coefficient  $a_{n+1}(g)$  est

$$(7) \quad a_{n+1}(g) = [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; g]$$

c'est-à-dire la différence divisée de la fonction  $g$  sur les points (3).

D'après la définition de Tiberiu Popoviciu, la fonction  $g$  est d'ordre  $n$  sur l'intervalle  $[a, b]$  si les différences divisées (7) gardent un même signe quand on prend de toutes les manières possibles les points (3). Comme on peut le voir dans [6], la fonction  $g$  d'ordre  $n$  sur  $[a, b]$  est dite

$$(8) \quad \begin{array}{l} \text{convexe (non-concave, polynomiale, non convexe,} \\ \text{respectivement concave) d'ordre } n, \end{array}$$

si les différences divisées (7) satisfont les inégalités

$$(9) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; g] > 0 \quad (\geq 0, = 0, \leq 0, \text{ respectivement, } < 0)$$

pour chaque choix des points (3) de l'intervalle  $[a, b]$ .

Je dois ajouter que pour définir la propriété de la fonction  $g$  d'être d'ordre  $n$  sur  $[a, b]$  où bien chacune des propriétés (8), il n'est pas nécessaire de supposer que  $g$  est continue sur  $[a, b]$ . Les inégalités (9) ont un sens quel que soit l'ensemble  $Y \subseteq [a, b]$  contenant au moins  $n + 2$  points distincts. Ici, on a considéré le cas  $g \in C_{[a,b]}$  pour assurer les conditions qui interviennent dans l'énoncé du théorème de la moyenne de Tiberiu Popoviciu que nous allons donner.

3. Le théorème de la moyenne dont nous allons parler a été utilisé par son auteur dans l'étude des fonctionnelles linéaires qui interviennent comme reste dans les procédés d'approximation (dérivation numérique, intégration numérique et encore d'autres). Dans ce contexte, une fonctionnelle  $A: C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$ , linéaire, est de degré d'exactitude  $n$  si l'on a

$$(10) \quad A(e_i) = 0 \text{ pour } i = 0, 1, \dots, n \text{ et } A(e_{n+1}) \neq 0.$$

THÉORÈME (Tiberiu Popoviciu). Si la fonctionnelle linéaire  $A: C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$  a le degré d'exactitude  $n$  et elle ne s'annule sur aucune fonction convexe d'ordre  $n$  alors, quelle que soit la fonction  $g \in C_{[a,b]}$ , il existe un ensemble de points distincts  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}$  dans l'intervalle  $[a, b]$  ainsi que l'on a

$$(11) \quad A(g) = A(e_{n+1}) [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; g].$$

On a appliqué ce théorème à l'étude de la forme du reste dans les procédés linéaires d'approximation. L'auteur du théorème a donné aussi des critères pour décider que la fonctionnelle  $A$  ne s'annule pas sur des fonctions convexes d'un ordre précisé.

Un calcul simple nous permet de faire la remarque que l'égalité (11) revient à

$$(12) \quad A(g) = A(L(\mathcal{P}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; g)).$$

Mais l'égalité (12) est un cas particulier de la relation (2).

On remarque sans difficulté que pour arriver de (12) à (11) on fait intervenir la linéarité de la fonctionnelle  $A$  et la relation (7). L'égalité (12) est un cas particulier d'une propriété de la moyenne que j'ai obtenue en étudiant les ensembles interpolatoires non linéaire [1]. Dans le cas non linéaire, comme on peut le voir dans [3], pour obtenir l'analogie de (12) en remplaçant  $\mathcal{P}_{n+1}$  par un ensemble interpolatoire d'ordre  $m$  quelconque  $\mathcal{F}$ , on donne une propriété de convexité (non concavité,  $\mathcal{F}$  — polynomialité, non convexité, concavité) par rapport à l'ensemble  $\mathcal{F}$ . Il est intéressant à souligner que, dans le cas des ensembles interpolatoires non linéaires, on fait intervenir une propriété de monotonie de certaines suites d'éléments de  $\mathcal{F}$ , qui prennent, chacun les mêmes valeurs sur  $m$  points avec une fonction  $f$  supposée  $\mathcal{F}$ -convexe ( $\mathcal{F}$ -concave). Pour comprendre il faut voir [1]. Mais j'ai souligné ici qu'une propriété de monotonie intervient dans la démonstration parce que, dans le cas des ensembles interpolatoires linéaires, comme par exemple dans le cas de  $\mathcal{P}_n$ , les divers théorèmes de la moyenne ont comme point de départ une certaine propriété de monotonie des différences divisées (voir [1]). Il existe, donc, dans la démonstration des théorèmes de la moyenne très générales une certaine propriété de monotonie, cette situation étant semblable à celle qu'on rencontre quand on démontre les théorèmes de la moyenne pour les intégrales définies, la démonstration ayant à la base une inégalité qui exprime aussi une propriété de monotonie. J'ai insisté parce que les théorèmes de la moyenne ont un rôle important non seulement dans l'analyse classique mais aussi dans l'analyse fonctionnelle moderne.

4. Avant de finir cette note dédiée en hommage à la mémoire de Tiberiu Popoviciu, je vais m'arrêter à un autre cas d'interpolation qui me semble très intéressant. J'ai étudié ce cas il y a quelques années.

Soit  $\mathcal{F}$  un ensemble interpolatoire d'ordre  $m \geq 1$  sur un intervalle compact  $[a, b]$ . C'est-à-dire, pour chaque ensemble

$$(13) \quad x_1, x_2, \dots, x_m$$

de points distincts de  $[a, b]$  et quels que soient les nombre

$$(14) \quad y_1, y_2, \dots, y_m,$$

l'ensemble  $\mathcal{F}$  contient une fonction et une seule,  $\varphi$  qui satisfait les conditions

$$(15) \quad \varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Si les nombres (14) sont les valeurs sur les  $x_i$  d'une fonction  $f$  que nous pouvons rencontrer dans l'étude d'un problème, alors il sera commode de désigner la fonction  $\varphi$  par

$$(16) \quad \varphi = I(\mathcal{F}; x_1, x_2, \dots, x_m; f).$$

Généralement,  $\mathcal{F}$  n'est pas linéaire mais on en obtient comme cas particulier l'ensemble  $\mathcal{P}_{m-1}$  de polynômes qui est un ensemble linéaire. Au lieu de ce cas particulier on peut considérer, encore, l'ensemble  $\mathcal{T}_m$  engendré par  $m$  fonctions  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , supposées continues sur  $[a, b]$  et formant un système de Tchebytschef sur  $[a, b]$ . C'est aussi un cas particulier très important, en faisant, naturellement l'hypothèse que les  $\varphi_i$  ne se réduisent pas à  $e_i, i = 1, 2, \dots, m$ .

Dans tous les cas considérés plus haut, soit  $1 \leq p \leq m - 1$  et soit

$$(17) \quad u_1, u_2, \dots, u_p$$

des points distincts fixés dans l'intervalle  $[a, b]$ . Soit  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$  le sous-ensemble des fonctions de  $\mathcal{F}$  qui ont sur les points (17) les valeurs aussi fixés

$$(18) \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p.$$

L'ensemble  $\mathcal{H}$  est interpolatoire d'ordre  $m - p$  sur n'importe quel sous-ensemble de  $[a, b]$  qui ne contient pas les points (17). Quand  $\mathcal{F} = \mathcal{P}_{m-1}$  et les nombres (18) sont égaux à zéro, on obtient un cas particulier très intéressant. Mais le cas  $\mathcal{F} = \mathcal{P}_{m-1}$  et le sous-ensemble  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{P}_{m-1}$  est intéressant aussi pour un choix quelconque de nombres (18). Dans ce cas les différences divisées qui interviennent

$$(19) \quad [u_1, u_2, \dots, u_p, x_1, x_2, \dots, x_{m-p}; f]$$

pour une fonction  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  doivent avoir le sens suivant. Les points (17) sont fixés et au lieu de  $f(u_i)$  on a toujours  $f(u_i) = \gamma_i, i = 1, 2, \dots, p$ .

L'ensemble  $\mathcal{H}$  n'est plus linéaire et avec les différences divisées (19) dans lesquels les  $u_i$  restent fixés et seulement les  $x_i$  seront choisis de toutes les manières possibles mais sans passant par  $u_i, i = 1, 2, \dots, p$ , on obtient une convexité (non concavité,  $\mathcal{H}$ -polynomialité, non convexité, respectivement concavité) par rapport à  $\mathcal{H}$ , avec restriction. C'est ce qu'on a quand

$$(20) \quad [u_1, u_2, \dots, u_p, x_1, x_2, \dots, x_{m-p}; f] > 0 \quad (\geq 0, = 0, \leq 0, < 0).$$

Je fait seulement la remarque que dans ce cas l'analogie du théorème que nous venons de donner plus haut a dans son énoncé aussi une relation de la forme (2).

#### BIBLIOGRAPHIE

1. Elena Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Editura Dacia, 1972.
2. ———, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, L'Analyse Numérique et la Th. de l'Appr., 11, 129–137 (1992).
3. ———, *Introduction à l'étude comparative des ensembles de fonctions interpolatoires*, Mathematica, 6 (29), 145–155 (1964).
4. ———, *Hommage à l'occasion d'un important anniversaire*, Revue d'Analyse Numérique et de Th. de l'Appr.
5. Tiberiu Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une et de deux variables réelles*, Mathematica, 8, 1–85 (1934).
6. ———, *Les fonctions convexes*, Actualités Sci. et Ind., 992, Paris, 1945.
7. ———, *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*, Mathematica 1 (24), 1, 95–142 (1959).
8. ———, *La simplicité du reste dans certaines formules de quadrature*, Mathematica, 6 (29), 1, 157–184 (1964).

Reçu le 19 juin 1992

Str. Rosiori 40  
3400 — Cluj-Napoca  
Roumanie