REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

Tome 23, N° 2, 1994, pp. 127–138

IDENTIFIZIERUNG DES ZUSTANDSPARAMETERS FÜR VISKOELASTISCHE MATERIALIEN (III)

H. BUGGISCH, P. MAZILU und H. WEBER

(Karlsruhe)

2. ÜBER OBJEKTIVITÄT UND ISOTROPIE

2.1. OBJEKTIVITÄT

Die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (1.32) und (1.43) bilden objecktive Konstitutivgleichungen, d.h. eine infinitesimale starre Drehung eines Körpers verursacht keine zusätzlichen Spannungen.
Eine infinitesimale starre Drehung wird durch einen antimetrischen Tensor ω_{ij}

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.1}$$

charakterisiert. Die Komponenten dieses Tensors sind so klein, daß ihr Quadrat vernachlässigbar ist

$$\sum_{i,\, j=1}^{3} \omega_{ij}\, \omega_{ij} = 0. \tag{2.2}$$

Um die Objektivität zu beweisen, reich es zu beweisent, daß die infinitesimalen Verzerrungen oder Verzerrungsgeschwindigkeiten bei einer infinitesimalen starren Drehung des Körpers unverändert bleiben. Gemäß den konstitutiven Gleichungen (1.32) und (1.43) bleiben auch die Spannungskomponenten unverändert. Im Rahmen der infinitesimalen Formänderungen bedeuted das, daß keine zusätzlichen Spannungen verursacht werden.

2.2. ISOTROPE SPANNUNGS-VERZERRUNGS-BEZIEHUNGEN

Die konstitutiven Gesetze (1.32) und (1.43) sind isotrop, wenn sie invariant gegenüber endlichen starren Drehungen des Koordinatensystems bleiben.
Eine starre Drehung wird von einer orthogonalen Matrix $Q(QQ^T = I)$ dargestellt. Die Invarianz gegenüber der starren Drehung des Koordina-

tensystems eines konstitutiven Gesetzes der Form

$$\Phi(\sigma, \varepsilon) = 0 \tag{2.3}$$

edeutet (im Rahmen der infinitesimalen Theorie), daß mit (2.3) auch

$$\Phi(Q,\ \sigma Q^T,\ Q\ \varepsilon Q^T) = 0 \tag{2.4}$$

gilt. Hier bezeichnet $\Phi(\cdot\,,\cdot)$ einen allgemeinen Operator, der vom Spannungstensor σ und dem infinitesimalen Verzerrungstensor ε abhängt, für die Boltzmann-Volterra-Materialien. Für viskoelastische Materialien lautet die Bedingung (2.4) wie folgt:

1. Für Boltzmann-Volterra Materialien

$$Q\ \sigma Q^T = \int_{-\infty}^{t} \mathfrak{G} e^{-A(t-\tau)}\, \mathfrak{C} Q\ \varepsilon Q^T\, d\tau\ ; \tag{2.5}$$

2. für Kelvin-Voigt Materialien

$$Q\ \dot\varepsilon\ Q^T = \overline{M}\, Q\ \sigma\, Q^T + \overline{N} Q\ \sigma Q^T + \int_{-\infty}^{t} \overline{\mathfrak{G}}\, e^{-A(t-\tau)}\, \mathfrak{C}\, Q\ \sigma(\tau)\, Q^T\, d\tau \tag{2.6}$$

wobei σ und ε jetzt in Tensor-Form geschrie ben sind und $\overline{\mathfrak{G}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ von je drei Indizes und $\overline{M}$, $\overline{N}$ von vier Indizes abhängen.
Die Isotropiebedingung (2.5) ist erfüllt, wenn

$$Q^T\, \overline{\mathfrak{G}}\, e^{-\overline{A}t}\, \overline{\mathfrak{C}}\, Q = \mathfrak{G}\, e^{-At}\, \mathfrak{C} \tag{2.7}$$

für alle $t \in (-\infty, \infty)$ gilt. Für (2.6) soll neben (2.7) auch

$$Q\, M\, Q^T = M^T \tag{2.8}$$

und

$$Q^T N\, Q = N$$

gelten.

Beispiele:

1. Boltzmann-Volterra-Materialien

Es sei J_1 die 6×7 — Matrix

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.9}$$

$J_C(\lambda, \mu)$ die 7×6 — Matrix

$$J_C(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 2\mu & & & & & \\ & 2\mu & & & 0 & \\ & & 2\mu & & & \\ & & & \mu & & \\ & & & & \mu & \\ & 0 & & & & \mu \\ \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2.10}$$

die von den Parametern λ und μ abhängt, und $J_A(\alpha, \alpha_0)$, der exponentiellen Diagonalmatrix der Ordnung 7

$$J_A(\alpha, \alpha_0, t) = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} & & & & \\ & e^{-\alpha t} & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & e^{-\alpha t} & \\ & & & & e^{-\alpha_0 t} \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

die von den Parametern α und α_0 abhängt.

Wir definieren die Matrizen $\mathfrak{G}$, A und $\mathfrak{C}$. Dabei ist $\mathfrak{G}$ die $6 \times 7n$-Matrix:

$$\mathfrak{G} = (J_1\, J_1\, J_1\, J_1\ \ldots\ J_1) \tag{2.12}$$

A die $7n \times 7n$ — Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} J_A(\alpha^{(1)},\ \alpha_0^{(1)}) & & & \\ & J_A(\alpha^{(2)}, \alpha_0^{(2)}) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_A(\alpha^{(n)},\ \alpha_0^{(n)}) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

und $\mathfrak{C}$ die $7n \times 6$ — Matrix:

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} J_C(\lambda^{(1)},\ \mu^{(1)}) \\ J_C(\lambda^{(2)},\ \mu^{(2)}) \\ \vdots \\ J_C(\lambda^{(n)},\ \mu^{(n)}) \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Im folgenden werden wir zeigen, daß das Boltzmann-Volterra-Gesetz (1.32) mit $\mathfrak{G}$, A und $\mathfrak{C}$ von (2.12) bis (2.14) definiert, eine isotrope Konstitutivbeziehung bildet.

Für die Beweisführung reicht es, nur das Produkt

$$\mathfrak{G}\ e^{-A(t-\tau)}\ \mathfrak{C} \tag{2.15}$$

auszuschreiben. Dafür gilt

$$
(2.16)\qquad \mathbb{C}\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \begin{pmatrix}
2\mu^{(1)}\ \dot{\varepsilon}_{11} \\
\vdots \\
2\mu^{(1)}\ \dot{\varepsilon}_{23} \\
\lambda^{(1)}\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) \\
2\mu^{(2)}\ \dot{\varepsilon}_{11} \\
\vdots \\
2\mu^{(2)}\ \dot{\varepsilon}_{23} \\
\lambda^{(2)}\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) \\
\vdots \\
2\mu^{(n)}\ \dot{\varepsilon}_{11} \\
\vdots \\
2\mu^{(n)}\ \dot{\varepsilon}_{23} \\
\lambda^{(n)}\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33})
\end{pmatrix};
$$

$$
(2.17)\qquad e^{-A(t-\tau)}\,\mathbb{C}\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} = \begin{pmatrix}
2\mu^{(1)}\, e^{-\alpha^{(1)}(t-\alpha)}\ \dot{\varepsilon}_{11} \\
\vdots \\
2\mu^{(1)}\, e^{-\alpha^{(1)}(t-\tau)}\ \dot{\varepsilon}_{23} \\
\lambda^{(1)}\, e^{-\alpha_1^{(1)}(t-\tau)}\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) \\
2\mu^{(2)}\, e^{-\alpha^{(2)}(t-\tau)}\ \dot{\varepsilon}_{11} \\
\vdots \\
2\mu^{(2)}\, e^{-\alpha^{(2)}(t-\tau)}\ \dot{\varepsilon}_{11} \\
\lambda^{(2)}\, e^{-\alpha_0^{(2)}(t-\tau)}\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}) \\
\vdots \\
2\mu^{(n)}\, e^{-\alpha^{(n)}(t-\tau)}\ \dot{\varepsilon}_{11} \\
\vdots \\
2\mu^{(n)}\, e^{-\alpha^{(n)}(t-\tau)}\ \dot{\varepsilon}_{23} \\
\lambda^{(n)}\, e^{-\alpha_0^{(n)}(t-\tau)}\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33})
\end{pmatrix};
$$

$$
\mathbb{C}\, e^{-A(t-\tau)}\,\mathbb{C}\dot{\underset{\sim}{\varepsilon}} =
$$

$$
(2.18)\qquad = \begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{n} \lambda^{(i)}\, e^{-\alpha_0^{(i)}(t-\tau)}\,(\dot{\varepsilon}_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu^{(i)}\, e^{-\alpha^{(i)}(t-\tau)}\,\dot{\varepsilon}_{11} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{n} 2\mu^{(i)}\, e^{-\alpha^{(i)}(t-\tau)}\ \dot{\varepsilon}_{12} \\
\sum_{i=1}^{n} 2\mu^{(i)}\, e^{-\alpha^{(i)}(t-\tau)}\ \dot{\varepsilon}_{23}
\end{pmatrix}
$$

Es ist offenbar, daß (2.15) invariant gegenüber starren Drehungen ist.

2. Kelvin-Voigt-Materialien

Es seien

$$
(2.19)\qquad M = \begin{pmatrix}
\frac{1}{E_M} & -\frac{\nu}{E_M} & -\frac{\nu_M}{E_M} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu}{E_M} & \frac{1}{E_M} & -\frac{\nu}{E_M} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu}{E_M} & -\frac{\nu}{E_M} & \frac{1}{E_M} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_M}{E_M} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_M}{E_M} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_M}{E_M}
\end{pmatrix}
$$

und

$$
(2.20)\qquad N = \begin{pmatrix}
\frac{1}{E_N} & -\frac{\nu_N}{E_N} & -\frac{\nu_N}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_N}{E_N} & \frac{1}{E_N} & -\frac{\nu_N}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\nu_N}{E_N} & -\frac{\nu_N}{E_N} & \frac{1}{E_N} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_N}{E_N} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_N}{E_N} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_N}{E_N}
\end{pmatrix}
$$

wobei E_M, E_N und ν_M, ν_N Konstanten sind.

Mit den Matrizen (2.9), (2.10) und (2.11) definieren wir die $6 \times 7n$—Matrix $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = (\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_1\, \mathbf{J}_1\, \ldots\, \mathbf{J}_1).$$

die $7n \times 7n$ — Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_A(\alpha^{(1)}, \alpha_0^{(1)}) & & & 0 \\ & \mathbf{J}_A(\alpha^{(2)}, \alpha_0^{()}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{J}\,(\alpha^{(n)}, \alpha_0^{n}) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

und die $7n \times 6$ — Matrix $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_C\left(-\dfrac{\nu^{(1)}}{\mathbf{E}^{(1)}}, \dfrac{1+\nu^{(1)}}{\mathbf{E}^{(1)}}\right) \\ \mathbf{J}_C\left(-\dfrac{\nu^{(2)}}{\mathbf{E}^{(2)}}, \dfrac{1+\nu^{(1)}}{\mathbf{E}^{(2)}}\right) \\ \vdots \\ \mathbf{J}_C\left(-\dfrac{\nu^{(n)}}{\mathbf{E}^{(n)}}, \dfrac{1+\nu^{(n)}}{\mathbf{E}^{(n)}}\right) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

wobei $\alpha^{(i)}$, $0^{(i)}$, $\nu^{(i)}$, $\mathrm{E}^{(i)}$ Konstanten sind.
Der Beweis, daß das Kelvin-Voigt-Gesetz (1.43) mit (2.19) bis (2.22) als Matrizen $\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{G}, \mathbf{A}$ und $\mathbb{C}$ invariant gegenüber starren Drehungen ist (vgl. (2.7) und (2.8)), folgt unmittelbar.

3. PHOTOVISKOELASTIZITÄT

Viskoelastische Werkstoffe wie Kunststoffe sind unter Last i.a. doppelbrechend und können damit für spannungsoptische Untersuchungen eingesetzt werden. So dienen schwach viskoelastische Kunststoffe dazu, statische und dynamische Probleme der ebenen und räumlichen Elastizitästheorie im Modellversuch zu lösen. Dabei wird bei dieser klassischen Methode der Spannungsoptik (Photoelastizität) von einem photomechanischen Stoffgesetz ausgegangen, bei dem die Änderung des Brechungsindextensors, $\underset{\sim}{\Delta n} = \underset{\sim}{n} - n_0 \underset{\sim}{I}$ (n_0 = Brechungsindex im unbelasteten Zustand des Materials), linear von den Spannungen $\underset{\sim}{\sigma}$ oder Verzerrungen $\underset{\sim}{\varepsilon}$ abhängt. Bei ausgeprägtem viskoelastischen Verhalten ist dieser Ansatz für das Stoffgesetz nicht mehr gültig. In diesem Fall hängt die Änderung des Brechungsindextensors von der gesamten Geschichte des Verzerrungstensors ab (Photoviskoelastizität [21]):

$$\underset{\sim}{\Delta n} = \underset{\sim}{n} - {}_0\underset{\sim}{I} = \underset{s=-\infty}{\overset{t}{\underset{\sim}{f}}}\,[\underset{\sim}{\varepsilon}(s)], \tag{3.1}$$

$\underset{\sim}{f}$ ist ein Funktional.

Wenn die Spannungen ebenfalls von der Verzerrungsgeschichte abhängen und das diesen Zusammenhang beschreibende Funktional umkehrbar eindeutig ist, dann folgt, daß die Änderung des Brechungsindextensors auch als Funktional des Spannungstensors ausdrückbar ist

$$\underset{\sim}{\Delta n} = \underset{\sim}{n} - n_0 \underset{\sim}{I} = \underset{s=-\infty}{\overset{t}{\underset{\sim}{g}}}\,[\underset{\sim}{\sigma}(s)]. \tag{3.2}$$

In [22] wurde für den einachsigen Spannungszustand gezeigt daß die Funktionale $\underset{\sim}{f}$ und $\underset{\sim}{g}$ im linearen Fall durch Faltungsintegrale dargestellt werden können. Es folgt damit im mehrachsigen Fall für ein ein photoviskoelastisches Verhalten

$$\underset{\sim}{\Delta n} = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{K}(t-s)\, \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(s)\, ds \tag{3.3}$$

oder

$$\underset{\sim}{\Delta n} = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(t-s)\, \dot{\underset{\sim}{\sigma}}(s)\, ds = \mathbf{G}(0)\, \sigma(t) - \int_{-\infty}^{t} \mathbf{G}(t-s)\, \underset{\sim}{\sigma}(\tau)\, d\tau. \tag{3.4}$$

$\mathbf{K}$ ist ein photoviskoelastischer Relaxationstensor und $\mathbf{G}$ ein entsprechender Kriechtensor vierter Stufe.
Es ist nun zu klären, ob n mit ε oder n mit σ und jeweils noch mit geeigneten inneren Parametern ein relaxierendes Inertialsystem in dem in Abb. 1 definierten Sinne darstellen und ob die inneren Parameter identisch sind mit denen der entsprechenden mechanischen Stoffgesetze.
Wir nehmen an, daß auch im Fall der Doppelbrechung das verallgemeinerte Prinzip der Trägheit gilt. Das bedeutet, daß es Parameter gibt, die den inneren physikalischen Zustand des Materials beschreiben. Ausgehend von einem Zustand, in dem alle diese Parameter Null sind und keine Änderung $\underset{\sim}{\Delta n}$ der Doppelbrechung vorliegt, bleibt die Doppelbrechung immer unverändert, wenn die Verzerrungsgeschwindigkeiten bzw. die Spannungen Null sind. Entsprechend der Theorie des inertialen Konstitutionssystems, die im ersten Abschnitt entwickelt wurde, sollen die Kerne $\mathbf{K}(t)$ und $\mathbf{G}(t)$ exponentielle Ausdrücke sein. Die allgemeinen Beziehungen zwischen der Doppelbrechungsänderung und den Verzerrungsgeschwindikeiten lauten dann:

$$\underset{\sim}{\Delta n} = \mathbf{G} \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\, \mathbb{C}\, \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}(\tau)\, d\tau \tag{3.5}$$

bzw.

$$\underset{\sim}{\Delta n} = \mathbf{M}\underset{\sim}{\sigma}(t) + \mathbf{G} \int_{-\infty}^{t} \sigma^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\, \mathbb{C}\, \underset{\sim}{\sigma}(\tau)\, d\tau \tag{3.6}$$

Hier bezeichnen **G**, **A**, **C** und **M** wie üblich $6 \times n -, n \times n -, n \times 6 -$ bzw. 6×6 — Matrizen, wobei n die Zahl der inneren Parameter ist. Eine interessante Frage ist es, ob in den optischen sowie in den mechanischen Prozessen dieselben inneren Parameter maßgebend sind. Das würde bedeuten, daß die Spannungs-Verzerrungs — Beziehungen sowie die Beziehung zwischen Doppelbrechungsänderung und mechanischen Parametern sich mit denselbet Matrizen **A** und **C** ausdrücken lassen.

4. Parameteridentifikation bei viskoelastischen Materialien

Aufgrund der mathematischen Theorie der inertialen Konstitutivsysteme kann man entsprechende Verfahren für die Identifizierung innerer Parameter entwickeln.
Im folgenden beschränken wir uns nur auf die Boltzmann-Volterra-Materialien. Das vorgeschlagene Verfahren ist leicht bei anderen Typen von viskoelastischen Materialien zu übertragen.
Für Boltzmann-Volterra — Materialien lautet die allgemeine Form der relaxierenden Kerne

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{G}\, e^{-\mathbf{A}t}\, \mathbf{C} \tag{4.1.}$$

mit $\mathbf{G} = 6 \times n -$, $\mathbf{A} = n + n -$ und $\mathbf{C} = n \times 6$ — Matrizen.
Die inneren Parameter $s_1 \dots s_n$ sind durch die Formel

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbf{A}(t-\tau)}\, \mathbf{C}\dot{\varepsilon}(\tau)\, d\tau \tag{4.2.}$$

definiert. Wenn $n = 6$ gilt, dann sind die inneren Parameter $s_1 \dots s_6$ mit den Spannungskomponenten $\sigma_{11}, \sigma_{22} \cdots \sigma_{23}$ äquivalent. Ist $n > 6$, dann gibt es $n - 6$ innere Parameter, die beobachtbare Wirkungen zeigen:

1. Es gibt eine Verzerrungsgeschichte $\varepsilon(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$; $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 =$ const. für $t \geqslant 0$ und für die $\sigma(0) = 0$ entspricht, so daß für $t > 0$ $\sigma(t) \not\equiv 0$ gilt.
2. Es gibt eine Spannungsgeschichte $\underset{\sim}{\sigma}(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$; $\sigma(t) = 0$ für $t \geqslant 0$ und für die $\underset{\sim}{\varepsilon}(0) = 0$ entspricht, so daß für $t > 0$ $\underset{\sim}{\sigma}(t) \not\equiv 0$ gilt.

Im Rahmen der Theorie der konstitutiven Inertialsysteme bedeutet das: Das Boltzmann-Volterra Material bildet *kein* interiales Konstitutivsystem bezüglich der Verzerrungsgeschwindigkeiten und der Spannungen.
Betrachtet man die inneren Parameter, dann bildet das viskoelastische Material *ein* inertiales Konstitutivsystem.
Gemäß (3.2) bedeutet die Identifizierung der inneren Parameter $s_1 \dots$ $\dots s_n$ der Material-Matrizen **G**, **A** und **C** in (4.1). Wie am Ende des ersten Abschnittes gezeigt wurde, kann man **A** als Diagonalmatrix annehmen, so daß die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in der Form

$$\underset{\sim}{\sigma}(t) = \mathbf{G} \int_{-\infty}^{t} e^{-\mathbf{D}(t-\tau)}\, \mathbf{C}\underset{\sim}{\dot{\varepsilon}}(\tau)\, d\tau \tag{4.3}$$

dargestellt ist, wobei

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

gilt.
Schreibt man (4.3) komponentenweise, dann erhält man

$$\sigma_i(t) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \sum_{l=1}^{6} \mathbf{G}_{ij} \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_{\,i}(t-\tau)}\, \delta_{ij}\, \mathbf{C}_{kl}\dot{\varepsilon}_{\,1}(\tau)\, d\tau, \tag{4.5}$$

mit $i = 1, 2, \dots, 6$.
Es sei angenommen, daß nur eine Verzerrungskmponente, sagen wir ε_1, ungleich Null ist und nur eine Spannungskomponente σ_i beobachtet wird. Bezeichnet man $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und $\sigma_i = \sigma$, dann reduziert sich (4.5) zu

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_j(t-\tau)}\, \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \tag{4.6}$$

mit

$$a_j = a_{ij1} = \mathbf{G}_{ij}\, \mathbf{C}_{j1}, \text{ (ohne Summierung).}$$

Experimentell zu bestimmen sind a_j, λ_j, $j = 1, 2, \dots n$.
Es gibt folgende zwei Möglichkeiten:
A. Ein „unendlich" langes Relaxationsexperiment;
B. n parallele endliche Relaxationsexperimente.
„A" ist praktisch nicht durchführbar.
Es seien in dem Experiment "B" $\sigma^{(1)}(t)$, $\sigma^{(2)}(t)$, $\dots$, $\sigma^{(n)}(t)$, $t \geqslant 0$ die gemessenen Relaxationsspannungen, die den Verzerrungsvorgeschichten $\varepsilon^{(1)}(t)$, $\varepsilon^{(2)}(t)$, $\dots$ $\varepsilon^{(n)}(t)$, $t \leqslant 0$ entsprechen.
Aus (4.6) folgt

$$\sigma^i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda_j(t-1}\ \dot{\varepsilon}^{(i)}(\tau)\, d\tau, \tag{4.7}$$

oder

$$\sigma^i(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e^{-\lambda_j t} \tag{4.8}$$

mit

$$\alpha_{ij} = a_j \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_j \tau}\ \dot{\varepsilon}^{(i)}(\sigma)\, d\tau. \tag{4.9}$$

Um $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ aus den gemessenen Relaxationsspannungen zu bestimmen, bemerkt man, daß die Zeitableitungen

$$\dot\sigma^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, \alpha_{ij} \, e^{-\lambda_j t}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.10}$$

linear von den Relaxationsspannungen $\sigma^{(k)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ abhängen. Es gibt demzufolge eine Matrix

$$\Lambda = (\lambda_{ik}),$$

so daß

$$\dot\sigma^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik} \, \sigma^{(k)}(t) \tag{4.11}$$

für alle $t \geqslant 0$ gilt. Die Exponenten $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A. Dadurch wird die Bestimmung der $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ auf die Bestimmung der Matrix Λ reduziert.
Es seien die Zeitpunkte

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \text{ gewählt.}$$

Man bildet die Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} \sigma^{(1)}(t_1) & \ldots & \sigma^{(1)}(t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma^{(n)}(t_1) & \ldots & \sigma^{(n)}(t_n) \end{pmatrix}$$

und

$$\dot S = \begin{pmatrix} \dot\sigma^{(1)}(t_1) & \dot\sigma^{(1)}(t_n) \\ \vdots & \vdots \\ \dot\sigma^{(n)}(t_1) & \dot\sigma^{(n)}(t_n) \end{pmatrix}.$$

Denn es gilt

$$\dot S = \Lambda S,$$

woraus für die Berechnung von Λ die Formel

$$\Lambda = \dot S \, S^{-1} \tag{4.12}$$

folgt.
Diese Methode benutzt die experimentellen Daten, die nur an n Zeitmomenten $t_1, t_2, \ldots, t_n$ gemessen wurden. Deswegen ist diese Methode hinsichtlicht Streuung der Messungen sehr empfindlich.
Die folgende, alternative Methode hebt diese Schwierigkeiten auf.
Es seien

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_m, \; m > n$$

m Zeitmomente, an denen die Relaxationsspannungen und deren Zeitableitungen bekannt sind. Man sucht die Matrix Λ als Lösung des quadratischen Optimierungsproblems

$$\min_{\lambda_{ik}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left| \dot\sigma^{(i)}(t_j) - \sum_{k}^{n} \lambda_{ik} \, \sigma^{(k)}(t_j) \right|^2 \tag{4.13}$$

Eine direkte Berechnung führt zu der folgenden Lösung von (4.13)

$$\Lambda = (\dot S \, S^T)(S \, S^T)^{-1}. \tag{4.14}$$

Die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ folgen aus einem zweiten Minimumproblem

$$\min_{a_k} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left| \sigma^{(i)}(t_j) - \sum_{k=1}^{n} a_k \, e^{-\lambda_k t_j} \int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda_k \tau} \, \dot\varepsilon^{(i)}(\tau) \, d\tau \right|^2 \tag{4.15}$$

Falls man Experimente für alle möglichen Kombinationen der Verzerrungs- und Spannungskomponenten durchführen läßt, kann man auf ähnliche Weise mit dem Minimumproblem (4.15) direkt die Komponenten der Matrizen G und 𝔊 bestimmen.
Das oben beschriebene experimentelle Verfahren wurde mit einer servohydraulischen rechnergesteuerten Prüfmaschine durchgeführt.
Drei Verzerrungsgeschichten, die den Dehnungen mit konstanten Geschwindigkeiten entsprechen, wurden erprobt.

Material :	ungesättigter Polyester LEGUVAL E 81
maximale Dehnung :	3.33 %

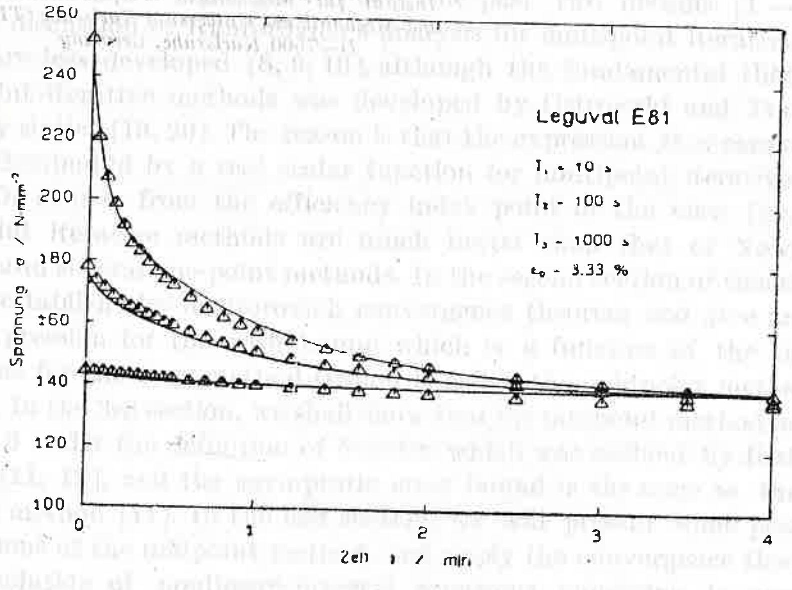

Abb. 1

Anfahrzeiten : $T_1 = 1000$ s
$T_2 = 100$ s
$T_3 = 10$ s
Relaxationszeit : 1 Stunde ;
jeder Versuch wurde dreimal wiederholt ;
Streuung : 2–5%.

Die experimentellen Daten sind in Abb. 1 dargestellt. Aufgrund des oben erwähnten Algorithmns und mit Hilfe eines FORTRAN-Programmes wurden die folgenden Werte bestimmt :

$$a_1 = 41.7 \qquad \lambda_1 = 0.00$$

$$a_2 = 19.7 \qquad \lambda_2 = 1.05$$

$$a_3 = 41.3 \qquad \lambda_3 = 14.10$$

Der Vergleich zwischen den experimentellen und berechneten Werten ist in Abb. 1 zu sehen.

LITERATURVERZEICHNIS

21. H. Weber, *Ein nichtlineares Stoffgesetz für die ebene photoviskoelastische Spannungsanalyse*, Rheol. Acta **22** (1983) 114–122
22. H. Weber, *Einachsiges nichtlineares photoviskoelastisches Verhalten von PVC-weich und UP-Leguval*, Rheol. Acta **20** (1981) 85–93.
23. H. Buggisch, P. Mazilu und H. Weber, *Parameter identification for viscoelastic materials*, Rheologica Acta **27** (1988) 363–368

Eingegangen am 1 April 1991

Institut für Mechanische Verfahrenstechnik und Mechanik der Universität Karlsruhe (TH)
D–7500 Karlsruhe, Germany