REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 23, N° 2, 1994 pp. 153–165

SUR LA FORMULE D'HERMITE

ION ICHIM et GRIGORE ALBEANU
(Bucharest)

Dans cet ouvrage, en utilisant des résultats de [4], [5] et [6], nous présentons une formule de quadrature trigonometrique de type Hermite et une nouvelle méthode pour déterminer dans un point la valeur du polynôme trigonométrique d'interpolation.

On sait que

$$\tilde{\tilde{\mathbb{R}}}_{2n}[X] := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \cos(iX) + \sum_{i=1}^{n} b_i \sin(iX) \mid a_i,\ b_i \in \mathbb{R} \ \text{ pour } \ i \in \overline{0,\ n} \right\}$$

$$\left(\text{resp. } \tilde{\mathbb{R}}_{2n-1}[X] := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cos\left(\frac{2i-1}{2} X\right) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + b_i \sin\left(\frac{2i-1}{2} X\right) \right) \mid a_i,\ b_i \in \mathbb{R} \ \text{ pour } \ i \in \overline{1,\ n} \right\} \right)$$

est un espace de Haar sur tout intervalle $[a, b]$ avec $b - a < 2\pi$.

L'opérateur differentiel associé à l'espace $\tilde{\tilde{\mathbb{R}}}_{2n}[X]$ (resp. à l'espace $\tilde{\mathbb{R}}_{2n-1}[X]$) est

(1) $$L_{2n} := D(D^2 + 1^2I)(D^2 + 2^2I) \ldots (D^2 + n^2I)$$

(resp.

(2) $$L_{2n-1} := (D^2 + (1/2)^2I)(D^2 + (3/2)^2I) \ldots (D^2 + ((2n-1)/2)^2I)).$$

Le noyau θ_{2n} (resp. θ_{2n-1}) associé à l'espace $\tilde{\tilde{\mathbb{R}}}_{2n}[X]$ (resp. à l'espace $\tilde{\mathbb{R}}_{2n+1}[X]$) vérifie l'égalité.

(3) $$\theta_j(x,\ y) = \frac{2^j}{j}\left(\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)^j,\ j \in \overline{2n-1,\ 2n}\ [4].$$

THÉORÈM 1. *Soient E un espace de Banach, $x_0, x_1, \ldots, x_m$, $m+1$ points distincts de l'intervalle $[a, b]$, ${}^t(n_0, n_1, \ldots, n_m)$ un élément de $(\mathbb{N}^*)^{m+1}$ et $(f_0^{(0)}, \ldots, f_0^{(\mu_0)}, \ldots, f_j^{(0)}, \ldots, f_j^{(\mu_j)}, \ldots, f_m^{(0)}, \ldots, f_m^{(\mu_m)})$ un vecteur de $E^{n+1}\left(n+1 := \sum_{j=0}^{m} n_j\right)$. Alors il y a un seul polynôme trigonométrique T_V à coefficients dans E avec $\partial(T_V) \leqslant n$ tel que*

(4) $$(T_V)^{(i)}(x_j) = f_j^{(i)},\ j \in \overline{0,\ m} \text{ et } i \in \overline{0,\ \mu_j}\ (\mu_j := n_j - 1).$$

En outre, si $n = 2k$ *(resp.* $n = 2k - 1$*) il y a une base* $(H_{ji})_{j \in \overline{0,m};\, i \in \overline{0,\mu_j}}$ *dans* $\tilde{\tilde{\mathbb{R}}}_{2k}[X]$ *(resp.* $\tilde{\mathbb{R}}_{2k-1}[X]$*) tels que*

$$H_{ji}^{(q)}(x_p) = \delta_{jp}\delta_{iq}, \quad j,\ p \in \overline{0,m},\quad i \in \overline{0,\mu_j},\quad q \in \overline{0,\mu_p} \text{ et} \tag{5}$$

$$(T_V)(x) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{\mu_j} f_j^{(i)} H_{ji}(x), \quad [4]. \tag{6}$$

Nous disons que $(H_{ji})_{j \in \overline{0,m};\, i \in \overline{0,\mu_j}}$ est la base d'Hermite de l'espace $\tilde{\tilde{\mathbb{R}}}_{2k}[X]$ attachée aux points $x_0, x_1, \ldots, x_m$ avec les ordres de multiplicité $n_0, n_1, \ldots, n_m$. Si $m = 0$ et $n_0 = 2k + 1$ cette base est notée par $(T_{2k,i})_{i \in \overline{0,2k}}$ et nous allons l'appeler la base de Taylor.

THÉORÈM 2. *Avec les notations precedentes on a :*

$$T_{j,j}(x) = \theta_j(x, x_0) \text{ et}$$

$$T_{j,i-1}(x) = T_{j,i}(x) + (L_j q_i)(x_0) T_{j,j}(x) \text{ ou } i \in \overline{1, j} \text{ et}$$

$q_i(x) := (x - x_0)^i (i!)$, [4].

THÉORÈME 3. *(La formule d'Hermite). Soit* $(T_{\mu_j - i, p})_{p \in \overline{0, \mu_j - i}}$ *la base de Taylor attachée au point* x_j; $j \in \overline{0, m}$. *Alors*

$$H_{ji}(x) = \left(\sin\frac{x - x_j}{2}\right)^i g_j(x) \sum_{p=0}^{\mu_j - i} \left(\frac{u_{ji}}{g_j}\right)^{(p)} (x_j) T_{\mu_j - i, j, p}(x) \text{ où} \tag{7}$$

$g_j(x) := \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{m} \left(\sin\frac{x - x_q}{2}\right)^{n_q}$, $(T_{n,j,i}(x))_{i \in \overline{0,n}}$ *est la base de Taylor attachée au point* x_j *avec l'ordre de multiplicité* n *et* $T_{n,j,i}(x) = \left(\sin\frac{x - x_j}{2}\right)^i u_{ji}(x)$.

En outre

$$(T_V)(x) = \tag{8}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} g_j(x) \sum_{i=0}^{\mu_j} f_j^{(i)} \left(\sin\frac{x - x_j}{2}\right)^i \sum_{p=0}^{\mu_j - i} \left(\frac{u_{ji}}{g_j}\right)^{(p)} (x_j) \cdot T_{\mu_j - i, j, p}(x), \quad [4].$$

THÉORÈME 4. *Pour toute fonction* $f \in C^{(n)}([a, b]; E)$ *l'erreur* $(Rf)(x) := f(x) - (Tf)(x)$ *est représentée sous la forme*

$$(Rf)(x) = \int_a^b \theta_n(x, y)\,(L_n f)(y)\, \mathrm{d}y - \tag{9}$$

$$- \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{\mu_j} H_{ji}(x) \int_a^{x_j} \theta_{ji}(y)(L_n f)(y)\, \mathrm{d}y$$

où $\theta_{ji}(y) := \dfrac{\partial^i}{\partial x^i} (\theta_n(x, y))\big|_{x = x_j}$, [4].

THÉORÈME 5. ***Soient*** $x_0 = a$, $x_1 = b$ *et* $n_0 = n_1 = 2 (0 < b - a < 2\pi)$. *L'application linéaire* $\sigma = \alpha_{00}\delta_{x_0} + \alpha_{01}\delta_{x_0}^{(1)} + \alpha_{10}\delta_{x_1} + \alpha_{11}\delta_{x_1}^{(1)}$ *définie sur* $C^{(1)}([a, b]; E)$ *et qui* ***vérifie l'égalité***

$$\sigma(f) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \tag{10}$$

quel que soit $f \in E \otimes \tilde{\mathbb{R}}_3[X]$, *se représente sous la forme*

$$\sigma(f) = \frac{2}{3} \frac{\sin\dfrac{3(b - a)}{4}}{\cos^3\dfrac{b - a}{4}} (f(a) + f(b)) + \tag{11}$$

$$+ \frac{4}{3} \frac{\sin^2\dfrac{b - a}{4}}{\cos^2\dfrac{b - a}{4}} (f'(a) - f'(b)), \quad f \in C^{(1)}([a, b]; E).$$

Il y a une constante $M > 0$ *telle que, quels que soient* $a, b \in \mathbb{R}$, *avec* $0 < b - a < 2\pi$

$$\left\| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x - \sigma(f) \right\| \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant M \left(\cos\frac{b - a}{4}\right)^{-3} \sup_{y \in [a, b]} \| (L_3 f)(y) \| (b - a)^5$$

si $f \in C^{(4)}([a, b]; E)$.

Démonstration. Soient $(H_{ji})_{j \in \overline{0,1};\, i \in \overline{0,1}}$ la base d'Hermite de l'espace $\mathbb{R}_3[X]$ attaché aux points distincts a et b avec les ordres de multiplicité $n_0 = n_1 = 2$. L'égalité (10) est vraié si et seulement si $a_{ji} = \int_a^b H_{ji}(x)\, \mathrm{d}x$, $j, i \in \overline{0, 1}$. Pour déterminer la base d'Hermite nous utiliserons le théorème 3.

$$L_3 = (D^2 + (1/2)^2 I)(D^2 + (3/2)^2 I) = D^4 + (5/2) D^2 + (9/16) I;$$

$$T_{3,0,3}(x) = \frac{2^3}{3!} \sin^3\left(\frac{x - a}{2}\right) = (4/3) \sin^3\left(\frac{x - a}{2}\right);$$

$$T_{3,0,2}(x) = D T_{3,0,3}(x) + (L_3 q_3)(a) T_{3,0,3}(x) = D T_{3,0,3}(x) =$$

$$= 2 \sin^2\left(\frac{x - a}{2}\right) \cos\left(\frac{x - a}{2}\right) \text{ où } q_i(x) := (x - a)^i / i!;$$

$$T_{3,0,1}(x) = DT_{3,0,2}(x) + (L_3q_2)(a)T_{3,0,3}(x) =$$

$$= 2\left(\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x-a}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin^3\frac{x-a}{2}\right) +$$

$$+ \frac{5}{2}\,\frac{4}{3}\sin^3\left(\frac{x-a}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x-a}{2}\right) +$$

$$+ \frac{7}{3}\sin^3\left(\frac{x-a}{2}\right);$$

$$T_{3,0,0}(x) = DT_{3,0,1}(x) + (L_3q_1)(a)T_{3,0,3}(x) = DT_{3,0,1}(x) =$$

$$= \cos^3\left(\frac{x-a}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right) +$$

$$+ \frac{7}{2}\sin^2\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = \cos^3\left(\frac{x-a}{2}\right) +$$

$$+ \frac{3}{2}\sin^2\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right).$$

Donc $u_{00}(x) = T_{3,0,0}(x)$ et

$$H_{00}(x) = \left(\sin\frac{x-b}{2}\right)^2\left[\frac{u_{00}(a)}{\sin^2\frac{a-b}{2}}T_{1,0,0}(x) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{u_{00}}{\sin^2\frac{x-b}{2}}\right)(a)T_{1,0,1}(x)\right].$$

$$L_1 = D^2 + (1/2)^2 I;\quad T_{1,0,1}(x) = 2\sin\frac{x-a}{2}\quad \text{et}$$

$$T_{1,0,0}(x) = DT_{1,0,1}(x) + (L_1q_1)(a)T_{1,0,1}(x) = DT_{1,0,1}(x) = \cos\frac{x-a}{2}.$$

Alors

$$H_{00}(x) = \sin^3\frac{x-b}{2}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{b-a}{2}}\cos\frac{x-a}{2} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\cos\frac{b-a}{2}}{\sin^3\frac{b-a}{2}}\sin\frac{x-a}{2}\right] =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{x-b}{2}}{\sin^3\frac{b-a}{2}}\left[\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x-a}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\sin^3\frac{b-a}{2}}\sin^2\left(\frac{x-b}{2}\right)\left[3\sin\frac{x+b-2a}{2} + \sin\frac{x-b}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\sin^3\frac{b-a}{2}}\left[6\sin\frac{x+b-2a}{2} + 3\sin\frac{x-b}{2} - 3\sin\frac{3x-b-2a}{2} + \right.$$

$$\left. + 3\sin\frac{x-3b+2a}{2} - \sin\frac{3x-3b}{2}\right]$$

En conséquence :

$$a_{00} = \int_a^b H_{00}(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8\sin^3\frac{b-a}{2}}\left[-12\cos\frac{x+b-2a}{2} - 6\cos\frac{x-b}{2} + \right.$$

$$\left. + 2\cos\frac{3x-b-2a}{2} - 6\cos\frac{x-3b+2a}{2} + \frac{2}{3}\cos\frac{3(x-b)}{2}\right]_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{2}{3\sin^3\frac{b-a}{2}}\left[3\cos\frac{b-a}{2} - 3\cos(b-a) + \cos\frac{3(b-a)}{2} - 1\right].$$

On considère le polynôme trigonométrique

$$P(y) := 3\cos(y) - 3\cos(2y) + \cos(3y) - 1.$$

Vu que $P(0) = P'(0) = P''(0) = 0$, $\sin^3\frac{y}{2}$ divise ce polynôme [5]. Il résulte que : $P(y) = 8\sin^3\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{3y}{2}\right)$. Donc

$$a_{00} = \frac{2}{3\sin^3\frac{b-a}{2}}\,8\sin^3\left(\frac{b-a}{4}\right)\sin\left(\frac{3(b-a)}{4}\right) = (2/3)\frac{\sin\frac{3(b-a)}{4}}{\cos^3\frac{b-a}{4}}.$$

Vu que $T_{3\cdot 0\cdot 1}(x) = \sin\frac{x-a}{2}\left[2\cos^2\frac{x-a}{2} + \frac{7}{3}\sin^2\frac{x-a}{2}\right]$ alors $u_{01}(x) = 2\cos^2\frac{x-a}{2} + \frac{7}{3}\sin^2\frac{x-a}{2}$ et

$$H_{01}(x) =$$

$$= \sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin^2\frac{x-b}{2}\cdot\frac{u_{01}(a)}{\sin^2\frac{a-b}{2}} = \frac{2\sin\frac{x-a}{2}\sin^2\frac{x-b}{2}}{\sin^2\frac{b-a}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin^2\frac{b-a}{2}}\left[2\sin\frac{x-a}{2} - \sin\frac{3x-2b-a}{2} + \sin\frac{x+a-2b}{2}\right].$$

Donc $a_{01} = \int_a^b H_{01}(x)\,dx = \frac{1}{2\sin^2\frac{b-a}{2}}\left[-4\cos\frac{x-a}{2} + \right.$

$$\left. + \frac{2}{3}\cos\frac{3x-2b-a}{2} - 2\cos\frac{x+a-2b}{2}\right]_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \frac{2\left[3 - 4\cos\frac{b-a}{2} + \cos(b-a)\right]}{3\sin^2\frac{b-a}{2}}.$$

Mais le polynôme trigonométrique $Q(y) = \cos(2y) - 4\cos y + 3$ se divise par $\sin^3\left(\frac{y}{2}\right)$ parce que $Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 0$ [5]. Donc

$$Q(y) = 8\sin^4\frac{y}{2} \text{ et } a_{01} = \frac{2}{3\sin^2\frac{b-a}{2}}\cdot 8\sin^4\frac{b-a}{4} = \frac{4}{3}\,\frac{\sin^2\frac{b-a}{4}}{\cos^2\frac{b-a}{4}}.$$

À la même manière on montre que $a_{10} = a_{00}$ et $a_{11} = -a_{01}$, c'est-à-dire l'égalité (11) est vraie.

D'après le théorème 4 nous avons

$$(Rf)(x) = \frac{2^3}{3!}\int_a^b \sin^3\frac{x-y}{2}(L_3f)(y)\,dy -$$

$$- H_{10}(x)\int_a^b \frac{2^3}{3!}\sin^3\frac{b-y}{2}(L_3f)(y)\,dy - H_{11}(x)\int_a^b 2\sin^2\frac{b-y}{2}\cos\frac{b-y}{2}(L_3f)(y)\,dy.$$

Parce que

$$\sigma(f) = \sigma(Tf) =$$

$$= \int_a^b (Tf)(x)\,dx \text{ alors } \int_a^b f(x)\,dx - \sigma(f) =$$

$$= \frac{2^3}{3!}\int_a^b dx\int_a^x \sin^3\left(\frac{x-y}{2}\right)(L_3f)(y)\,dy -$$

$$- \frac{2^3}{3!}a_{10}\int_a^b \sin^3\left(\frac{b-y}{2}\right)(L_3f)(y)\,dy -$$

$$- 2a_{11}\int_a^b \sin^2\left(\frac{b-y}{2}\right)\cos\left(\frac{b-y}{2}\right)(L_3f)(y)\,dy$$

Mais

$$\left\|\frac{2^3}{3!}\int_a^b dx\int_a^x \sin^3\frac{x-y}{2}(L_3f)(y)\,dy\right\| =$$

$$= \frac{2^3}{3!}\left\|\int_a^b dy\int_y^b \sin^3\frac{x-y}{2}(L_3f)(y)\,dx\right\| =$$

$$= \frac{8^2}{2\,3^2}\left\|\int_a^b \sin^4\frac{b-y}{4}\left(2 + \cos\frac{b-y}{2}\right)(L_3f)(y)\,dy\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8^2}{6}\sup_{y\in[a,b]}\|(L_3f)(y)\|(b-a)\sin^4\frac{b-a}{4},$$

$$\left\|\frac{2^3}{3!}a_{10}\int_a^b \sin^3\frac{b-y}{2}(L_3f)(y)\,dy\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^3}{3!}\sup_{y\in[a,b]}\|(L_3f)(y)\|\cdot\left|a_{10}\int_a^b \sin^3\frac{b-y}{2}\,dy\right| =$$

$$= \frac{2^3}{3!}\sup_{y\in[a,b]}\|(L_3 f)(y)\|\frac{16}{3^2}\,\frac{\sin^4\frac{b-a}{4}}{\cos^3\frac{b-a}{4}}\left(2+\cos\frac{b-a}{2}\right)\left|\sin\frac{3(b-a)}{4}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^3\cdot 16}{3!}\sup_{y\in[a,b]}\|(L_3f)(y)\|\,\frac{\sin^5\frac{b-a}{4}}{\cos^3\frac{b-a}{4}}$$

et

$$2a_{11}\left\|\int_a^b \sin^2\left(\frac{b-y}{2}\right)\cos\left(\frac{b-y}{2}\right)(L_3f)(y)\,\mathrm{d}y\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{8}{3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{b-a}{4}\right)\sup_{y\in[a,b]}\|(L_3f)(y)\|\left|\int_a^b\sin^2\left(\frac{b-y}{2}\right)\cos\left(\frac{b-y}{2}\right)\mathrm{d}y\right| =$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{b-a}{4}\right)\cdot\sin^3\left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot\sup_{y\in[a,b]}\|(L_3f)(y)\| =$$

$$= \frac{2^7}{3^2}\sin^5\left(\frac{b-a}{4}\right)\cos\left(\frac{b-a}{4}\right)\sup_{y\in[a,b]}\|(L_3f)(y)\|.$$

En conséquence l'inégalité (12) est vraie.

COROLLAIRE 6. *Soient* $h_n := \frac{b-a}{n}$, $x_i^{(n)} := a + i\cdot h_n$, $i=0,1,\dots,n$ *et* $f\in C^{(4)}([a,b];E)$. *Si*

(13)
$$(Q_n f) := \frac{2}{3}\,\frac{\sin\frac{3h_n}{4}}{\cos^3\frac{h_n}{4}}\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i^{(n)})+f(x_{i-1}^{(n)})\right)+ \frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\left(\frac{h_n}{4}\right)(f'(a)-f'(b))$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

THÉORÈME 7 *Soient* $n+1$ *points distincts de l'intervalle* $[a,b]$ $(0 < b-a < 2\pi)$, $x_0, x_1, \dots, x_n$, $(f_j)_{j\in\overline{0,n}}$ *une famille de nombres réels et* $T_{\overline{0,n}}(x)$ *le polynome trigonométrique qui satisfait les égalités* : $T_{\overline{0,n}}(x_i) = f_i$ *pour* $i\in\overline{0,n}$.

Si $P_{\overline{0,n-1}}$ et $P_{\overline{1,n}}$ *sont les polynômes trigonométrique tels que*

$$P_{\overline{0,n-1}}(x_i) = f_i\cos\left(\frac{x_i-x_0}{2}\right),\quad i\in\overline{0,n-1}$$

et

$$P_{\overline{1,n}}(x_i) = f_i\cos\left(\frac{x_i-x_n}{2}\right),\quad i\in\overline{1,n} \text{ allors}$$

(14)
$$T_{\overline{0,n}}(x) = \frac{1}{\sin\frac{x_n-x_0}{2}}\begin{vmatrix} P_{\overline{1,n}}(x) & P_{\overline{0,n-1}}(x)\\ \sin\frac{x-x_n}{2} & \sin\frac{x-x_0}{2}\end{vmatrix}.$$

Démonstration. Soit

$$Q(x) := \frac{1}{\sin\frac{x_n-x_0}{2}}\begin{vmatrix} P_{\overline{1,n}}(x) & P_{\overline{0,n-1}}(x)\\ \sin\frac{x-x_n}{2} & \sin\frac{x-x_0}{2}\end{vmatrix}.$$

Évidemment, $\partial Q = \partial T_{\overline{0,n}}$ et pour $i\in\overline{1,n-1}$

$$Q(x_i) := \frac{1}{\sin\frac{x_n-x_0}{2}}\begin{vmatrix} f_i\cos\frac{x_i-x_n}{2} & f_i\cos\frac{x_i-x_0}{2}\\ \sin\frac{x_i-x_n}{2} & \sin\frac{x_i-x_0}{2}\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{f_i}{\sin\frac{x_n-x_0}{2}}\left(\sin\left(\frac{x_i-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x_i-x_n}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_i-x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{x_i-x_n}{2}\right)\right) = f_i = T_{\overline{0,n}}(x_i).$$

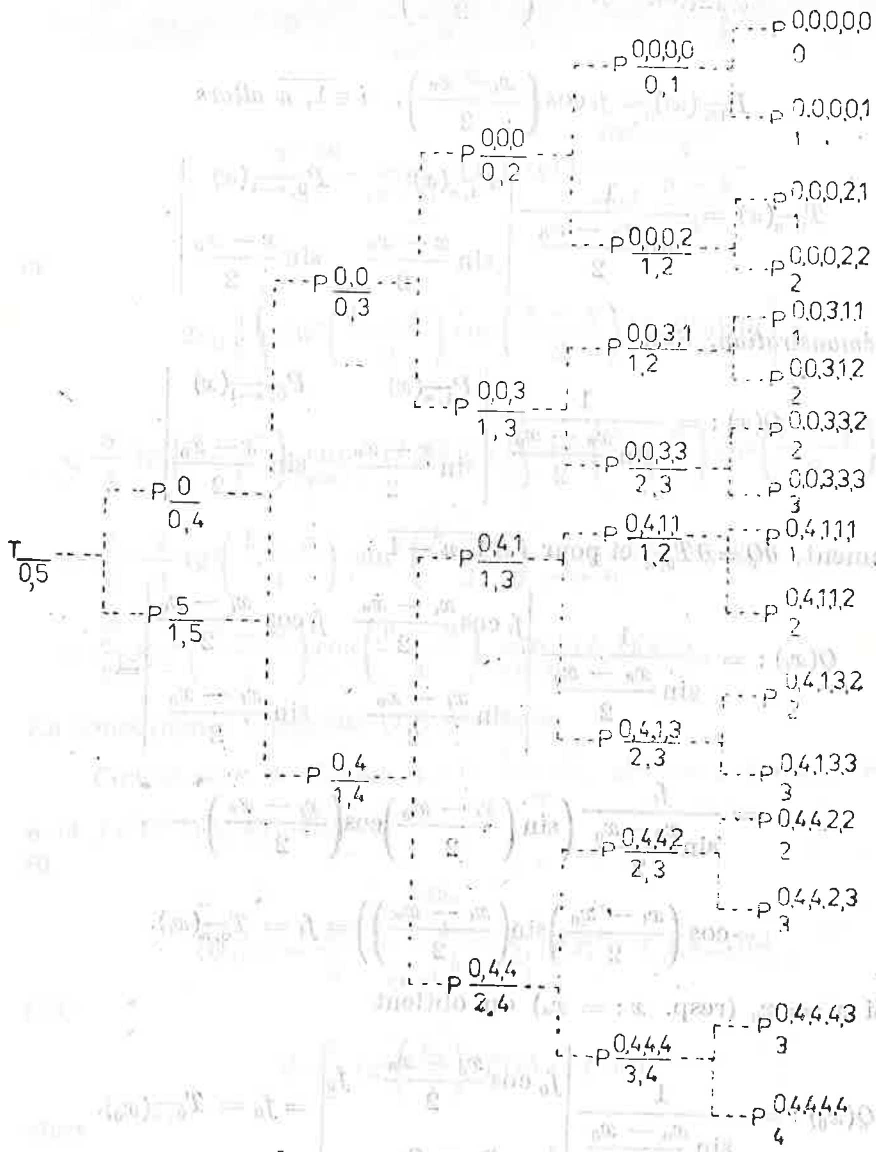
Si $x := x_0$ (resp. $x := x_n$) on obtient

$$Q(x_0) := \frac{1}{\sin\frac{x_n-x_0}{2}}\begin{vmatrix} f_0\cos\frac{x_0-x_n}{2} & f_0\\ \sin\frac{x_0-x_n}{2} & 0\end{vmatrix} = f_0 = T_{\overline{0,n}}(x_0).$$

(resp. $Q(x_n) = T_{\overline{0,n}}(x_n)$)

Vu que le polynôme trigonométrique d'interpolation est unique il résulte que $T_{\overline{0,n}} = Q$.

Pour appliquer cet algorithme on utilise le tableau suivant, que nous présentons pour $n=5$



où $P_i^{j_1,j_2,j_3,j_4,j_5}(x_i) = f_i \prod\limits_{t=1}^{5} \cos\left(\dfrac{x_i - x_{j_t}}{2}\right)$.

En utilisant la récursivitée du langage Pascal, nous pouvons considérer les définitions :

```
const max = 20;
type vector = array [0.. max] of double;
var w : double;
```


et on obtien la fonction suivante :

```
function T(1, m : integer ; f : vector) : double ;
  var f1, f2 : vector ;
    i : integer ;
    v1, v2, r, s : double ;
  begin
  if 1 > = m
    then t := f [1]
    else begin
      for i := 1 to m-1 do
        f1 [i] := f[i] * cos ((x[i] - x[1])/2 ;
      for i := 1 + 1 to m do
        f2 [i]:= f [i] * cos ((x[i] - x[m])/2) ;
      v1 : = T(1, m - 1, f1) ;
      v2 : = T(1 + 1, m, f2) ;
      r := v2 * sin ((w - x [1])/2) ;
      s := v1 * sin ((w - x[m])/2 ;
      T : = (r-s)/sin ((x[m]- x [1])/2)
    end
  end ;
```

qui calcule la valeur numérique $(T_{\overline{l,m}}x)\ (w)$.

Maintenant nous allons appliquer cette méthode pour le calcul numérique des intégrales suivantes et pour accélérer la convergence nous utiliserons le procédé d'extrapolation de Richardson trigonométrique [6]

THÉORÈME 8. *Soient E l'algèbre de Banach des suites convergentes $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ munie de la norme $\|x\| : = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$, $\alpha = : = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\alpha \subseteq (0,\ b]$ avec $b < \pi/2$, une suite strictement décroissant convergent vers 0, f, $f_n : E \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) : = (T_{\overline{0,n}}x)\ (0)$ et*

$$x \mapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n \quad où \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E.$$

Alors les fonctionnelles lineaires f_n et f sont continues et

$$(\forall x)_{x\in E} (\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)). \tag{15}$$

si et seulement si

$$(\exists \mu)_{\mu>1} (\forall n)_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \geqslant \mu\right) \tag{16}$$

($T_{\overline{0,\,2n}}x$ *est le polynôme trigonométrique d'interpolation attaché aux points* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ *pour les donnés* $(x_i)_{i\in\overline{0,\,2n}}$), [6].

Soient

$$I_1 := \int_0^1 (4/(x^2+1))\mathrm{d}x\,; \qquad I_2 := \int_0^\pi \cos(\sin(x) - x)\mathrm{d}x\,;$$

$$I_3 := \int_0^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x\,; \qquad I_4 := \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-0{,}81\sin^2 x}}\,\mathrm{d}x\,;$$

$$I_5 := \int_0^\pi \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_6 := \int_0^\pi \sin(x/2)\mathrm{d}x\,;$$

en utilisant la relation (13) on trouve :

n	I_1	I_2
2	3.14195092437762	1.31445944148677
4	3.14161073292084	1.38202851682623
8	3.14159375824570	1.38243376486672
16	3.14159272223488	1.38245807837383
32	3.14159265787393	1.38245958699547
64	3.14159265385745	1.38245968111397
128	3.14159265360652	1.38245968699372
256	3.14159265359084	1.38245968736116
512	3.14159265358986	1.38245968738413
1024	3.14159265358980	1.38245968738556
2048	3.14159265358979	1.38245968738565

n	I_3	I_4
2	0.8826783443490	2.311095430357
4	0.8821173323964	2.281034220944
8	0.8820836622492	2.280546698021
16	0.8820815329761	2.280549128075
32	0.8820813996541	2.280549137775
64	0.8820813913182	2.280549138381
128	0.8820813907972	2.280549138418
256	0.8820813907646	2.280549138421
512	0.8820813907626	2.280549138421

et

n	I_5	I_6
1	−0.666666666667	1.999999999999
2	−0.666666666667	1.999999999999
3	−0.666666666667	1.999999999999

Appliquons la formule d'Hermite avec les pas $h_0 = b-a$, $h_1 = h_0/\alpha$, $h_2 = h_1/\alpha, \ldots$, avec $\alpha > 1$, on obtient la suite $(x_i)_{i\geq 0}$. En prenant

$\alpha_n := h_n^2$ et en utilisant le procédé d'extrapolation de Richardson trigonimétrique, pour I_1 (resp I_2, I_3, I_4) on trouve

	I_1	I_2	I_3	I_4
f_0	3.141	1.3	0.882	2.3
f_1	3.141	1.38	0.8	2.2
f_2	3.14159	1.38	0.88208	2.28
f_3	3.151592	1.382	0.88208	2.2805
f_4	3.141592653	1.382459	0.882081390	2.28054
f_5	3.1415926535897	1.38245968	0.8820813907	2.28054913
f_6	3.14159265358979	1.382459687385	0.88208139076242	2.2805491384421

On observe que, en utilisant seulement 7 valeurs (la meilleure a 10 (resp. 9, 11, 11)chiffres exacts) on trouve pour f_6 une valeur avec 15 (resp. 13, 15, 14) chiffres exactes.

Vu que pour I_5 et I_6 on obtient des valeurs exactes, il n'y a pas besoin d'accélération.

B I B L I O G R A P H I E

1. Davis P., Rabinowitz P., *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, 1975.
2. Brezinski C., *Accélération de la convergence en Analyse Numérique*, Springer-Verlag, Berlin, 1977 (Lecture Notes in Mathematics)
3. Engels H., *Numerical Quadrature and Cubature*, Academic Press, New York, 1980
4. Ichim I., Marinescu Gh., *Metode de aproximare numerică*, Editura Academiei, 1986
5. Ichim I., *Quelques propriétés de l'interpolation trigonométrique*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de Roumanie Tome 34 (82), nr. 4, 1990
6. Ichim I., *Sur les polynôme trigonométriques*, Bull. Math., de la Soc. Sci. Math. de Roumanie (sous presse)
7. Ionescu D. V., *Cuadraturi numerice*, Editura Tehnică, 1957
8. Laurent P. J., *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972
9. Stroud A. H., *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall, New York, 1971
10. Stancu D. D., *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate.* Comunicările Acad. R. P. R, 8 (1958), 349–358
11. Stancu D. D., *Sur quelques formules générales de quadrature du type Gauss-Christoffel*, Matematica 1 (24), 1959, 167–182
12. Stoer J., Bulirsch R., *Einführung in die Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, 1973
13. Stummel F, Hainer K, *Praktische Mathematik*, B. G. Teubner, Stuttgart 1971
14. Wimp J., *Sequence transformations and their applications*, Academic Press, New York, 1981

Reçu le 1 II 1993