REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

Tome XXVI, N^{os} 1–2, 1997, pp. 165–177

STRUCTURES ALGÈBRIQUES À ÉLÉMENT FIXE QUI MODÉLISENT DE DIVERS PHÉNOMÈNES

ANDREI NEY

PRÉLIMINAIRES

On cherche un ensemble E non-vide et une fonction ω de deux variables, tel que

1° $\omega : E \times E \to E$.

On soumettra E et ω – suivant le cas – à quelques-unes des équations suivantes:

2° $\omega(\omega(x,y),z) = \omega(x,\omega(y,z)),\ x,y,z \in E$

3° existence d'un élément $\theta \in E$ tel que $\omega(\theta,x) = \omega(x,\theta) = x, (x \in E)$

4° existence d'un élément $\varphi \in E$ tel que $\omega(\varphi,x) = \omega(x,\varphi) = \varphi, (x \in E)$

5° l'équation $\omega(x,x') = \omega(x',x) = \theta$ soit résoluble pour chaque $x \in E$, à l'aide d'un élément correspondant $x' \in E$

6° l'équation $\omega(x,x'') = \omega(x'',x) = \varphi$ soit résoluble pour chaque $x \in E (x \neq \varphi)$, à l'aide d'un élément correspondant $x'' \in E(x'' \neq \varphi)$.

Le couple (E,ω), où ω satisfait à 1° sera un *groupoïde*. Relativement à un groupoïde on considère le système d'équations:

7° $\omega(e,x) = \omega(x,e) = y$, *e un certain* élément de E; $x, y \in E$. Si pour chaque $x \in E$ on aura $y = x$, alors e est *l'élément neutre*. Si pour chaque $x \in E$, y sera constante, c (indépendante de x), alors e sera un *élément à composition constante*.

Si dans le cas précédent la constante c sera égale à e, alors e sera *l'élément fixe*.

Si E et ω satisfont – suivant le cas – au systèmes d'axiomes:

I. {1°, 2°}, alors le couple (E, ω) est un *demi-groupe*;

1991 AMS Subject Classification: 20E34, 20E99.

II. {1°, 2°, 3°, 5°}, alors le couple (E, ω) est un *groupe*;

III. {1°, 2°, 4°, 6°}, alors le couple (E, ω) est un *antigroupe*.

(On peut faire des considérations similaires aussi sur une partie de $E \times E$ et une fonction ω_0 définie sur elle).

Dans ce qui suit on s'occupera des *solutions concrètes des systèmes d'équations* ci-dessus et non pas de procédés d'y arriver. Les solutions seront des phénomènes ou processus physiques, chimiques, etc. *On suivra l'aspect algébrique, structurel, du problème.*

★

L'auteur veut présenter dans cette communication quelques-unes des structures algébriques nouvelles définies et étudiées dans son travail: STRUCTURES ALGÉBRIQUES À ÉLÉMENT FIXE, [4] (par abréviation: S. A. É. F.) qui sont convenables de modéliser des phénomènes physiques, chimiques, techniques. Pour atteindre ce but on passera succinctement en revue une partie nécessaire de la théorie et on va illustrer par des exemples éloquents.

Soit un groupoïde $(E,\circ)$; relativement à l'opération $\circ$ on envisage deux notions qui sont dans un rapport de dualité:

1) s'il existe un élément $\theta \in E$ qui, composé avec un élément quelconque $x \in E$, «n'exerce aucune influence» sur $x(x \circ \theta = \theta \circ x = x)$ alors θ est *l'élément neutre du groupoïde*,

2) s'il existe un élément $\varphi \in E$, qui, composé avec un élément quelconque $x \in E$, «n'est pas influencé» par $x(x \circ \varphi = \varphi \circ x = \varphi)$, alors φ est *l'élément fixe du groupoïde*.

On montre dans S. A. É. F. les propriétés: 1) l'élément fixe, s'il existe dans le groupoïde, est unique – de même que l'élément neutre; 2) l'élément fixe – comme d'ailleurs l'élément neutre aussi – satisfait à l'équation de l'idempotence; 3) dans un groupoïde ayant au moins deux éléments, l'élément neutre et l'élément fixe s'il existe tous les deux, ne sont pas égaux.

On conçoit aussi des notions «latérales» pour l'élément fixe (à gauche, à droite), – l'unicité de celles-ci n'est plus nécessaire. Bien entendu, toutes les notions ci-dessus ont leur rôle aussi dans les demi-groupes.

Exemple 1. Soit K un ensemble de fonctions réelles et constantes, définies sur **R** (ou sur une partie de **R**); soit $\circ$ la composition habituelle des fonctions, alors on aura pour $k_1,k_2,k_3 \in K$ $(k_1 \circ k_2) \circ k_3 = k_1 \circ (k_2 \circ k_3)$ et on verra facilement que $k_1 \circ k_2 = k_1$ et $k_2 \circ k_1 = k_2$, donc $(K,\circ)$ est un demi-groupe dont tous les éléments sont des «éléments fixes à gauche». En voici une illustration:

Soit $\mathcal{M}$ un ensemble de *différentes mélodies* de même longueur enregistrées sur des bandes de magnétophone. Soit $\perp$ l'opération suivant laquelle *on reporte* la mélodie M_1 sur la bande de la mélodie $M_2 (M_1, M_2 \in \mathcal{M})$. On souligne *qu'il ne se produira pas une interférence*, mais un éffacement de la mélodie M_2 – de la deuxième bande – et l'impression de la mélodie M_1 sur cette bande; on aura, donc, *une substitution*, que l'on notera: $M_1 \perp M_2 = M_1$. On voit facilement que pour chaque $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{M}$:

$$(M_1 \perp M_2) \perp M_3 = M_1 \perp M_3 = M_1 \text{ et } M_1 \perp (M_2 \perp M_3) = M_1 \perp M_2 = M_1,$$

donc l'opération $\perp$ est associative, par suite $(\mathcal{M},\perp)$ *est un demi-groupe* (non-commutatif) *dont chaque élément est fixe à gauche.*

DÉFINITION 1. Un demi-groupe ayant un élément neutre et un élément fixe est un *demi-groupe bipolaire.*

EXEMPLE 2. On présente deux cas remarquables:

1er cas. L'ensemble des nombres complexes dans la projection stéréographique muni de l'addition est un *demi-groupe bipolaire* ayant comme *élément neutre le zéro* et comme *élément fixe le point à l'infini* – les deux pôles, antipodes, sur la sphère.

2e cas. E étant non-vide, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de toutes ses parties, avec l'opération de la réunion est un *demi-groupe* $(\mathcal{P}(E), \bigcup)$ *bipolaire* ayant $\varnothing$ comme élément neutre et E pour élément fixe.

Remarque 1. Il est raisonnable de nommer *double demi-groupe* un ensemble S muni de deux lois de composition, $\perp$ et $\top$, associatives, avec – éventuellement – des conditions qui les relient. Ici on mentionne seulement *le double demi-groupe aux lois de composition duales,* pour lequel les éléments neutres respectifs $\theta_\perp$ et $\theta_\top$, et les éléments fixes $\varphi_\perp$ et $\varphi_\top$ satisfont aux égalités: $\theta_\perp = \varphi_\top$ et $\theta_\top = \varphi_\perp$.

Exemple 3. Soit E un ensemble totalement ordonné, ayant un élément minimal θ et un élément maximal φ. Avec l'opération $\vee$ (sup) la structure $(E,\vee)$ est un demi-groupe bipolaire, dont θ est l'élément neutre et φ l'élément fixe. Avec l'opération $\wedge$ (inf) la structure $(E,\wedge)$ est un demi-groupe bipolaire dont φ est l'élément neutre et θ l'élément fixe. Donc $(E;\vee;\wedge)$ est un double demi-groupe aux lois de composition duales. En voici deux illustrations:

a) *L'échelle de dureté de Mohs* (cristallographie):

$\mathscr{E}$ = {talc, gyps, calcaire, fluorine, apatite, orthose, quartz, topaze, corindon, diamant} avec les opérations de comparaison: $\vee$ = le plus dure parmi deux, et $\wedge$ = le moins dure parmi deux, est *un double demi-groupe bipolaire* $(\mathscr{E};\vee;\wedge)$ *pour lequel* $\theta_\vee=\varphi_\wedge=[\text{talc}]$ *et* $\theta_\wedge=\varphi_\vee=[\text{diamant}]$.

b) *La gamme musicale* $\mathscr{G}=\{\text{do,re,...,si,do}\}$ avec les opérations de comparaison $\vee$ = le plus haut parmi deux tons et $\wedge$ = le plus bas parmi deux tons, est *un double demi-groupe bipolaire* $(\mathscr{G};\vee;\wedge)$ pour lequel $\theta_\vee=\varphi_\wedge=\text{do-initial}$ *et* $\theta_\wedge=\varphi_\vee=\text{do-final}$.

★

Sur l'élément neutre se basent de nombreuses structures classiques de l'algèbre. Dans notre travail S. A. É. F. on a défini et étudié des structures se basant sur l'élément fixe, marquées par les termes: *antigroupe, antianneau, anticorps*, etc. De telles structures ne sont point connues dans les traités classiques, – nous n'en citons que trois à la bibliographie, [1], [2], [3]. Nous nous limiterons à présenter ici seulement *l'antigroupe*. Dans ce but on passe en revue une partie adéquate de la théorie, puis on donne plusieurs exemples.

DÉFINITION 2. Si dans un groupoïde $(E,\circ)$ à élément fixe φ existent deux éléments $x, x'(x\neq\varphi, x'\neq\varphi)$ tels que $x\circ x'=x'\circ x=\varphi$ alors x et x' sont symétriques par rapport à φ, on dira encore: x et x' sont φ-symétriques, pour distinguer cette symétrie de la symétrie par rapport à un eventual élément neutre θ et que l'on désignera par θ-symétrie. On souligne, que le φ-symétrique d'un élément $x\in E$ n'est pas nécessairement unique, comme le θ-symétrique.

Dans S. A. É. F. on démontre l'important

THÉORÈME 1. Dans un demi-groupe bipolaire l'existence d'un θ-symétrique pour l'élément x est incompatible avec l'existence d'un φ-symétrique pour le même élément x.

DÉFINITION 3. Un ensemble A muni d'une loi de composition binaire $\circ$ est *un antigroupe* si les suivantes axiomes sont satisfaites:

1° $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$; $x,y,z\in A$ (associativité)

2° existe un élément $\varphi\in A$ tel que $\varphi\circ x=x\circ\varphi=\varphi\ (x\in A)$ (l'existence de l'élément fixe)

3° pour chaque $x\in A\ (x\neq\varphi)$ existe $x'\in A\ \ (x'\neq\varphi)$ tel que $x\circ x'=x'\circ x=\varphi$ (l'existence de l'élément φ-symétrique de $x\in A$)

4° si $\circ$ est commutatif, $(A,\circ)$ sera un antigroupe commutatif.

Remarque 2. Suivant l'observation faite à la fin de la Définition 2 on peut avoir des *antigroupes aux φ-symétriques uniques*, ainsi qu'*aux φ-symétriques non-uniques*.

Remarque 3. Suivant le théorème 1, dans un antigroupe ne peut pas exister un élément neutre; dans un groupe ne peut pas exister un élément fixe.

Remarque 4. Le demi-groupe est une prestructure tant pour le groupe que pour l'antigroupe; les termes «demi-groupe» et «demi-antigroupe» sont équivalents. De plus, on démontre dans S. A. É. F. le

THÉORÈME 2. *Soit* $(S,\circ;\theta,\varphi)$ *un demi-groupe commutatif bipolaire. Soit qu'on puisse partager les éléments de S en trois sous-ensembles non-vides: G, A et* $S_\circ(S=G\cup A\cup S_\circ,\ G\cap A=G\cap S_\circ=A\cap S_\circ=\varnothing)$ *tel que*

– à G appartiennent θ et tous les éléments qui ont un θ-symétrique,
– à A appartiennent φ et tous les éléments qui ont un φ-symétrique,
– à S_0 appartiennent tous les éléments qui n'ont ni de θ-symétrique ni de φ-symétrique.

Dans ces conditions $(S,\circ;\theta,\varphi)$ *admet un partage en trois structures composantes, notamment:*

– $(G,\circ;\theta)$ *est un groupe commutatif ayant θ comme élément neutre,*
– $(A,\circ;\varphi)$ *est un antigroupe commutatif dont φ est l'élément fixe,*
– $(S_0,\circ)$ *est un demi-groupe commutatif sans élément neutre et sans élément fixe.*

On souligne, que si les conditions de ce théorème se réalisent dans les cas extremês, à savoir: l'existence dans $(S,\circ;\ \theta,\ \varphi)$ pour chaque x seulement de la θ-symétrie ou bien seulement de la φ-symétrie, alors, le demi-groupe bipolaire se partage en un groupe $(G,\circ;\theta)$ et l'antigroupe triviel $(\{\varphi\},\circ)$ (voir l'exemple 2 – le prèmier cas) ou bien en un antigroupe $(A,\circ;\varphi)$ et le groupe triviel $(\{\theta\},\circ)$ (voir l'exemple 2 – deuxième cas).

On va donner, dans ce qui suit, un exemple éloquent pour de diverses sortes d'antigroupes:

Exemple 4. Soit φ un nombre réel strictement positif et λ un paramètre $(0<\lambda<\varphi)$; soit M_λ une partie propre non-vide de $]0,\varphi[$. On définit sur $]0,\varphi]$ un ensemble de fonctions:

$$\langle\lambda;M_\lambda\rangle(x)=\begin{cases}\lambda & (x\in]0,\varphi[\setminus M_\lambda)\\ \varphi & (x\in\{\varphi\}\cup M_\lambda)\end{cases}\quad\text{avec:}\begin{cases}\lambda\in]0,\varphi[\\ M_\lambda\in\mathscr{P}(]0,\varphi[)\setminus\varnothing\ .\end{cases}$$

À cet ensemble on attache la fonction constante ayant la valeur φ sur $]0,\varphi]$; on notera l'ensemble ainsi obtenu par A. La structure $(A,\circ)$ où $\circ$ est la composition habituelle des fonctions réelles, sera *un antigroupe non-commutatif, aux φ-symétriques non-uniques*.

Démonstration. 1) La fonction φ sera l'élément fixe de $(A,\circ)$, c'est-à-dire $\varphi_\circ\langle\lambda;M_\lambda\rangle=\varphi$ et $\langle\lambda;M_\lambda\rangle\circ\varphi=\varphi$, parce que la fonction φ a pour chaque valeur de son argument la valeur φ, puis la fonction $\langle\lambda;M_\lambda\rangle$ prend la valeur φ pour son argument égal à φ, conformément à sa définition ci-dessus. 2) Soit deux fonctions: $\langle l;M_l\rangle$ et $\langle\lambda;M_\lambda\rangle$, telles que $\lambda\notin M_l$; on aura pour leur composition: $\langle l;M_l\rangle\circ\langle\lambda;M_\lambda\rangle=\langle l;M_l\rangle$. En effet, la valeur de la fonction $\langle\lambda;M_\lambda\rangle$ pour $x\in\{\varphi\}\cup M_\lambda$ est φ, et la fonction $\langle l;M_l\rangle$ prendra la valeur φ pour son argument égal à φ. Si, par contre, $x\in]0,\varphi[\setminus M_\lambda$, la fonction $\langle\lambda;M_\lambda\rangle$ prend la valeur λ et pour cette valeur $(\lambda\notin M_l)$ la fonction $\langle l;M_l\rangle$ prend la valeur l. Évidemment, si on posera la condition $l\notin M_\lambda$, on aboutira à $\langle\lambda;M_\lambda\rangle\circ\langle l,M_l\rangle=\langle\lambda,M_l\rangle$. 3) D'après 1) et 2) suit, que la condition nécessaire et suffisante pour que $\langle l,M_l\rangle$ et $\langle\lambda,M_\lambda\rangle$ soient φ-symétriques est que l'on ait $\lambda\in M_l$ et $l\in M_\lambda$. D'ici suit que l'unicité de leur φ-symétrie est réalisée si et seulement si M_l et M_λ sont formés chacun d'un seul élément. Ainsi, *la sous-structure* $(A^*,\circ)$ dont les éléments sont la fonction φ et les fonctions définies par

$$(\lambda,\mu)(x)=\begin{cases}\varphi & (x=\mu,\varphi)\\ \lambda & (x\in]0,\varphi[\setminus\{\mu\})\end{cases}\qquad(\lambda,\mu\in]0,\varphi[)$$

est un antigroupe aux φ-symétriques uniques. On mentionne que ces structures sont des *antigroupes d'ordre* $\aleph$.

Dans l'antigroupe d'ordre $\aleph$ vu auparavant, on peut mettre en évidence des *sous-antigroupes dénombrables,* aussi *aux φ-symétriques uniques.* Pour cela on considère, par exemple, l'ensemble $H=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}=\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbf{N},\ n\geq 2\right\}$ et on forme la structure $(\{\varphi\}\cup\{(\lambda,\mu)|\lambda,\mu\in H\},\circ)$ qui sera un *antigroupe d'ordre* $\aleph_\circ$.

On peut mettre en évidence des *sous-antigroupes d'ordre fini*, aussi *aux φ-symétriques uniques* en choisissant un nombre naturel arbitraire p d'éléments différents de l'ensemble précédent, H, on notera ce sous-ensemble par H_p et on considérera la structure $(\{\varphi\}\cup\{(\lambda,\mu)|\lambda,\mu\in H_p\},\circ)$ qui sera un *antigroupe d'ordre* p^2+1.

En suite, *on va illustrer la notion d'antigroupe en prenant des exemples de la physique, de la chimie, etc.*

Exemple 5. LA MACHINE À VAPEUR.

Dans une machine à vapeur pourvue d'un régulateur de Watt la pression peut atteindre une valeur suprême $\overline{p}$ pour que la chambre à vapeur soit encore fermée. Si on ajoute à $\overline{p}$ un surplus de pression, quelque petit qu'il soit, le régulateur ouvre le système et après une fuite de vapeur la pression tombe et le système se renferme. Pour décrire algébriquement ce qui se passe dans la chambre à vapeur fermée, par augmentation de pression, on conçoit comme opération $\circ$ l'addition des pressions de valeurs positifs $p(0<p\leq\overline{p})$, tant que la chambre à vapeur reste fermée. Selon le fonctionnement du régulateur Watt – mentionné plus haut – on écrira $\overline{p}\circ p=p\circ\overline{p}=\overline{p}$ et $\overline{p}$ joue le rôle de l'élément fixe. Autrement dit, dans le système fermé il est impossible de faire croître la pression au-dessus de $\overline{p}$. Pour les autres cas, l'addition des pressions (le système restant fermé) est bien entendu une opération associative et commutative. À chaque valeur $p(0<p<\overline{p})$ correspond une valeur $p'=\overline{p}-p$ (p' est φ-symétrique de p), tel que $p\circ p'=p'\circ p=\overline{p}$; si on prend $p''=p'+p_2$ $(p_2>0)$, on aura $p\circ p''=p\circ(p'\circ p_2)=(p\circ p')\circ p_2=\overline{p}\circ p_2=\overline{p}$. Donc la structure $(]0,\overline{p}],\circ)$ est *un antigroupe aux φ-symétriques non-uniques*.

Dans plusieurs processus physiques et chimiques apparaît le **phénomène de la saturation**; *ces processus sont susceptibles d'être modélisés algébriquement par des antigroupes:*

Exemple 6. LA VAPORISATION DE L'EAU.

Un récipient non-couvert, contenant de l'eau distillée à une température initiale $t_0(0<t_0<100)$ est mis en contact avec une source de chaleur de température bien supérieure à 100°C. En communiquant de la chaleur à l'eau, sa température s'accroît. L'addition de température notée par $\top$ est associative, ce qu'on formule par $(t_1\top t_2)\top t_3=t_1\top(t_2\top t_3)$, si $t_1,t_2,t_3>0$ et $t_1+t_2+t_3\leq 100$. L'eau étant à une certaine température $t<100$ peut être portée à 100 par l'addition de température de valeur $100-t$ (qui correspond à la fourniture d'une certaine quantité de chaleur), donc $t\top(100-t)=100$. Quand l'eau atteint la température de 100°C, elle commence à se transformer en vapeur. Dès ce moment la fourniture d'un surplus de chaleur ne sse met pas en évidence par hausse de température et celle-ci reste à 100°C jusqu'à ce que toute la quantité de l'eau liquide soit transformée en vapeur. On formule ce phénomène par $100 \top t = 100 (t > 0)$. Donc *la déscription algébrique de l'échauffement de l'eau en vue de sa vaporisation est un antigroupe dont l'élément fixe est* $\varphi = 100$.

Exemple 7. LA DISTILLATION FRACTIONNÉE.

Si dans l'alambic d'une installation de distillation il y a un mélange de plusieurs liquides, $\{L_1, L_2, ..., L_l\}$, ayant des températures d'ébullition différentes $0<\tau_1<\tau_2<...<\tau_l$ et que l'on échauffe ce mélange de température initiale $\tau_0 (0<\tau_0<\tau_1)$ à l'aide d'une source de chaleur de degré $t^0>\tau_l$, on arrive premièrement au niveau de τ_1, puis la température y reste – malgré l'addition de plus de chaleur – jusqu'à ce que la substance L_1 est totalement vaporisée. Ensuite la temperature du mélange $\{L_2, L_3, \ldots, L_l\}$ contenu encore dans l'alambic commence de nouveau à croître et atteindra τ_2, en y restant jusqu'à ce que L_2 soit complètement vaporisée; puis la température croît de nouveau et ainsi de suite ...

La description algébrique du phénomène de la distillation fractionnée sur chacun des intervalles de température $]\tau_k, \tau_{k+1}]$ $(k = 0, 1, \ldots, l-1)$, *est un antigroupe ayant pour élément fixe* $\varphi_{k+1} = \tau_{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots, l-1)$. On est en présence *d'une chaîne finie d'antigroupes*.

Exemple 8. CHARGEMENT D'UN RÉCEPTEUR.

On charge – additivement – un conducteur éléctrique isolé, un condensateur, etc. jusqu'à la saturation; après ce moment-là toute addition de nouveau charge éléctrique est sans influence sur la quantité $\overline{Q}$ de saturation. Évidemment, l'addition $\top$ des quantités est associative tant que la somme de tous les charges ne dépasse pas $\overline{Q}$. Si à un moment donné le récepteur contient une charge q $(q<\overline{Q})$ alors $q \top (\overline{Q} - q) = \overline{Q} (\overline{Q} - q$ sera φ – symétrique de $q)$. Au moment de la saturation $\overline{Q} \top q' = \overline{Q} (q' > 0)$. *On est dans le cas d'un antigroupe dont l'élément fixe est* $\overline{Q}$.

Exemple 9. DISSOLUTION DU SEL DANS L'EAU.

Dans un récipient on a un litre d'eau distillée maintenue à température et pression normales. On y dissout «peu à peu» du sel (NaCl). Le résultat de l'addition de deux quantités q_1 et q_2 de sel sera par définition *la quantité finale* $q_1 \top q_2$ *dissoute dans l'eau*. La dissolution présente le phénomène de la saturation, c'est-à-dire que l'eau dissoudra une quantité limite $\overline{Q}$ du sel (dans le cas du NaCl c'est approximativement 36% pour la solution). L'addition des quantités dissoutes est –

bien entendu – associative, tant que la somme des quantités (dissoutes) ne dépasse pas $\overline{Q}$. Si à un moment donné l'eau a dissout une quantité $q (q < \overline{Q})$ de sel, alors $q \top (\overline{Q} - q) = \overline{Q}$; au moment de la saturation $\overline{Q} \top q' = \overline{Q} (q' > 0)$. *On est dans le cas d'un antigroupe à élément fixe* $\overline{Q}$.

Exemple 10. TITRAGE D'UN ACIDE PAR UNE BASE.

Dans un récipient on a une solution aqueuse d'acide HCl – soit de M mols – on y ajoute quelques gouttes de phénolphtaléine, comme indicateur de basicité. Dans le récipient contenant cette solution transparente et incolore, on laisse couler d'une burette – goutte à goutte – de la solution décinormale de la base NaOH. La base neutralise graduellement l'acide et on arrive au point du virage (neutralisation complète) signalé par l'apparition de la coloration pourpre de la solution. Après le virage aucune quantité excédente de NaOH n'est plus neutralisée et le liquide reste pourpre. Par un raisonnement analogue à celui d'auparavant, on arrive à ce que: *le processus du titrage d'un acide par une base illustre aussi l'antigroupe*.

★

Dans le sens accepté pour définir l'ordre partiel, on peut définir des *structures algébriques partielles*, cela veut dire, que les composition définies et leurs propriétés seront valables seulement pour une partie de l'ensemble des paires d'éléments. Voici quelques-unes de ces structures:

DÉFINITION 4. Soit E un ensemble non-vide et la relation $r(x,y)$ une partie proprement dite, non-vide, de $E \times E$. Si on définit une composition $\circ : E^2 \setminus r(x,y) \to E$, alors la structure algébrique ainsi obtenue sera un *groupoïde partiel* ou *groupoïde conditionné*. $E_2 \setminus r(x,y)$ est *l'ensemble des paires admises*.

DÉFINITION 5. Si la composition $\circ$ d'un groupoïde partiel est associative, c'est-à-dire si $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ $(x, y, z \in E)$ à *condition que les compositions ci-dessus soient compatibles selon la définition 4, alors la structure obtenue sera un demi-groupe partiel* ou *demi-groupe conditionné*.

DÉFINITION 6. a) On considère un demi-groupe partiel;

b) Si existe $\theta \in E$ (θ – élément neutre) tel que $x \circ \theta = \theta \circ x = x$ pour chaque $x \in E$ pour lequel (x, θ) et (θ, x) appartiennent à $E_2 \setminus r(x, y)$;

c) Si pour $x \in E$ (x n'étant pas élément fixe!) correspond $x' \in E$ tel que $x \circ x' = x' \circ x = \theta$, à condition que (x, x') et (x', x) appartiennant à $E^2 \setminus r(x,y)$, (x' est la symétrique de x par rapport à θ); dans ces conditions le demi-groupe envisagé sera un *groupe partiel* ou *groupe conditionné*. Si de plus

d) $x \circ y = y \circ x$ pour $(x,y) \in E^2 \setminus r(x,y)$ et $(y,x) \in E^2 \setminus r(x,y)$ on aura un groupe partiel commutatif.

On'insistera pas ici sur d'autres structures algébriques partielles, comme par exemple l'antigroupe partiel, qui sont traitées dans S. A. É. F. *On remarquera* seulement qu'il y a des structures partielles: sans élément fixe et avec élément neutre; sans élément neutre et avec élément fixe; avec élément neutre et avec élément fixe et même avec plusieurs élément fixes.

Dans ce qui suit on présentera *quelques exemples mathématiques* dont les particularisations *auront un sens physique important.*

Exemple 11. *Une famille de demi-groupes partiels, commutatifs – à un paramètre réel, a, – avec deux éléments fixes.*

Soit l'ensemble des paires admises $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) | a + x + y = 0; x, y \in \mathbf{R}\}$ avec la composition: $x \circ y = \dfrac{xy}{a + x + y}$. La commutativité est visible et on montre l'associativité en respectant la composition conditionnée. L'équation de l'idempotence sera $\dfrac{x^2}{a+2x} = x$ c'est-à-dire $x^2 + x = 0$ d'où les deux racines 0 et $-a$ sont toutes les deux des éléments fixes, comme on le prouve facilement (on remarque que la composition $0 \circ (-a)$ est exclue par la condition de restriction pour les paires admises). Élément neutre n'existe pas. Pour la valeur nulle du paramètre a on obtient un élément fixe double: $\varphi = 0$.

Exemple 12. On reprend l'exemple 11 sous une forme restreinte et particularisée. Les paires admises $[0, +\infty[^2 \setminus \{(r_1, r_2) | r_1 + r_2 = 0, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\}$ avec la composition $r_1 \circ r_2 = \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$ réalisent *un demi-groupe partiel commutatif*; r_1 et r_2 représenteront des *résistences éléctriques liées en parallèle*, tandis que la composée $r_1 \circ r_2$ sera la résistance unique, équivalente au couple (r_1, r_2). La loi de composition $\circ$ *aura comme élément fixe la valeur zéro. Pour l'électrotechnique cela veut dire que*: si l'une des résistences, par exemple r_2 est «très petite», alors pratiquement tout le courant passera à travers r_1, donc r_2 peut remplacer dans la pratique le couple (r_1, r_2) des résistences, en parallèle. (On écrira par approxi-mation: $r_1 \circ r_2 \approx r_2'$).
Dans un autre ordre des idées: pour r_1 finie on obtient $\lim\limits_{r_2 \to +\infty} (r_1 \circ r_2) = \lim\limits_{r_2 \to +\infty} \dfrac{r_1}{\dfrac{r_1}{r_2} + 1} = r$. On voit facilement que si on complète le demi-axe positif par le $+\infty$ (demi-axe positif achevé), *le $+\infty$ jouera le rôle de l'élément neutre* du demi-groupe partiel, commutatif, les paires admises étant

$[0, \infty]^2 \setminus \{(r_1 r_2) | r_1 + r_2 = 0, r_1 \geq 0, r_2 \geq 0\}$ – (les opérations arithmétiques avec le $+\infty$ seront celles postulées habituellement dans l'analyse mathématique) – *zéro reste l'élément fixe.* Le $+\infty$ comme élément neutre *signifie pour l'électrotechnique* que: si on couple en parallèle une résistance finie r_1 avec une résistence r_2 «très grande», alors pratiquement tout le courant passera par la résistence r_1. (On écrira approximativement: $r_1 \circ r_2 \approx r_1$).

Application similaire aux *capacités électriques liées en série.*

Exemple 13. *Une famille de groupes partiels, commutatifs, –* à deux paramètres réels, *k, h – avec deux éléments fixes.*

Soit l'ensemble des paires admises

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x, y) | 1 + hxy = 0, 1 + kx = 0, 1 + ky = 0; x, y \in \mathbf{R}\},$$

avec $x \circ y = \dfrac{x + y + kxy}{1 + hxy}$ (k et h paramètres réels, $h \neq 0$).

La commutativité de l'opération est visible, l'associativité se vérifie pour les compositions conditionnées selon:

$$(x \circ y) \circ z = \frac{x + y + z + k(xy + xz + yz) + (k^2 + h)xyz}{1 + h(xy + xz + yz) + khxyz} = x \circ (y \circ z).$$

L'équation de l'idempotence $\dfrac{2x + kx^2}{1 + hx^2} = x$ se transcrit $x(hx^2 - kx - 1) = 0$, dont les racines sont $x_1 = 0$ et $x_{2,3} = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 + 4h}}{2h}$. On vérifie que x_1 *est l'élément neutre* et que le symétrique (unique!) de x par rapport à l'élément neutre (x_1 =0) est $x' = -\dfrac{x}{1 + kx}$. En posant la condition de réalité pour x_2 et $x_3 (k^2 + 4h \geq 0)$ on démontre que x_2 et x_3 *sont des éléments fixes de l'opération* $\circ$ (pour les détails voir S. A. É. F.) – la paire (x_2, x_3) est *non-admise pour* la composition $\circ$ puisque: $x_2 x_3 = -\dfrac{1}{h}$, c'est-à-dire $1 + hx_2 x_3 = 0$.

Particularisation. Si on prend: $k = 0$ et $h = p^2 (p > 0)$ on arrive à *la famille des groupes partiels* (dépendant d'un seul paramètre p) l'ensemble des paires admises étant:

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(x,y) | 1+p^2xy=0; x,y\in\mathbf{R}\}, \text{ avec } x\circ y=\frac{x+y}{1+p^2xy} \quad (p>0).$$

L'élément neutre de ces groupes partiels sera $\theta = 0$ et le θ-symétrique de x sera $-x$. Puisqu'on doit avoir $1+p^2x(-x)=1-p^2x^2\neq 0$, chaque nombre réel aura son θ-symétrique, exceptés les nombres $-\frac{1}{p}$ et $+\frac{1}{p}$. On voit facilement que *les élément fixes* seront $\varphi_1=-\frac{1}{p}$ et $\varphi_2=+\frac{1}{p}$. Si on passe à la limite $p\to 0$ (dans la topologie naturelle de l'axe réel) on aura $\varphi_1\to-\infty$ et $\varphi_2\to+\infty$, et on arrive de la famille des groupes partiels au groupe classique ($\mathbb{R}$, +), comme structure limite.

Exemple 14. Si on particularise encore la structure qui vient d'être envisagée, on arrive à une *illustration* de la structure par un *phénomène physique* important. On met pour cela $p=\frac{1}{c}$ (c la vitesse de la lumière), $x=w>0$ (vitesse d'un mobile rapportée au système de coordonnées *OXYZT*), $j=v>0$ (vitesse du système *OXYZT* en mouvement par rapport au système *oxyzt*) et w sera la vitesse du même mobile rapportée au système de coordonnées *oxyzt;* alors l'opération $\circ$ sera *la composition des vitesses* (en mouvement relatif) *dans la mécanique relativiste*, et on écrira:

$$w=w\circ v=\frac{w+v}{1+\frac{wv}{c^2}} \quad (w>0,\, v>0)$$

La solution de l'équation de l'idempotence nous donne comme *élément fixe de la composition relativiste des vitesses*: $\varphi = c$, c'est-à-dire *la vitesse de la lumière.* En effet $\frac{x+x}{1+\frac{x^2}{c^2}}=x$ nous conduit à $x\left(x^2-c^2\right)=0$, ce qui nous donne $\varphi = c$ ($x = 0$ et $x = -c$ ne viennent pas en considération, vu les restrictions). On cherche à voir si existent des éléments φ-symétriques: de $\frac{x+y}{1+\frac{xy}{c^2}}=c$ on arrive à $y(c-x) = c(c-x)$ et cette égalité est vérifiée seulement pour $x = c$ ou $j = c$. Les résultats connus en physique sous la forme: la composition relativiste de chaque vitesse avec la vitesse de la lumière est égale à la vitesse de la lumière, puis: il

n'existe pas deux vitesses différentes de celle de la lumière, dont la composition relativiste nous donnerait la vitesse de la lumière, ... s'expriment en langage algébrique part: $\mathbb{R}_+$ *avec la composition* $\circ$ *définie plus haut est un demi-(anti)groupe commutatif, à élément fixe,* $\varphi = c$ *et sans aucune paire de* φ*-symétriques*.

RÉFÉRENCES

1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algèbre*, Chap. 1 à 3, Hermann, Paris, 1970.
2. A. H. Clifford et G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, I and II, Amer. Math. Soc. Providence Rhode Island, 1964, 1967.
3. M. Suzuki, *Group Theory I (II)*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
4. A. Ney, *Structures algébriques à élément fixe (S. A. É. F.)*, manuscrit en photocopies, multiplié à Haïfa, Israël, 1993.

Reçu le 1 mars 1996

54/27 Hanita St.
32443 Haïfa, Israël
Tel.- Fax: +972-4-236917