REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

Tome XXVI, N^os 1–2, 1997, pp. 191–196

# SUR UNE NOTION ABSTRAITE DE QUASI-CONVEXITÉ

NICOLAE POPOVICI

## 1. INTRODUCTION

Nous nous proposons ici d'étendre la notion classique de quasi-convexité dans un cadre très général en considérant les fonctions définies sur un ensemble $E_1$ muni d'une structure abstraite de convexité et qui prennent leurs valeurs dans un ensemble $E_2$ muni d'une relation binaire, qui remplace l'ordre induit par un cône convexe lorsque la structure est vectorielle.

L'outil essentiel pour construire des notions de quasi-convexité généralisées est fourni par la variété riche des concepts d'ensembles convexes qu'on peut trouver par ailleurs. La plupart d'entre eux se retrouvent dans la définition suivante, proposée par nous dans [4].

Considérons d'abord un ensemble non vide $E_1$ et une application multivoque $\Gamma : E_1 \times E_1 \rightrightarrows E_1$.

DÉFINITION 1.1. Nous dirons qu'une partie $X$ de $E_1$ est:

i) $\Gamma$-convexe, si $\Gamma(x^1, x^2) \subset X$, $\forall x^1, x^2 \in X$;

ii) $\Gamma$-convexe par rapport à $x^0 \in X$, si $\Gamma(x^0, x) \subset X$, $\forall x \in X$.

Remarquons qu'une partie non vide $X$ de $E_1$ est $\Gamma$-convexe si et seulement si elle est $\Gamma$-convexe par rapport à tous ses points.

Considérons maintenant un ensemble non vide $E_2$ et une relation binaire $\Omega \subset E_2 \times E_2$. Dans ce qui suit nous adopterons la convention suivante:

Pour $\Omega : E_2 \rightrightarrows E_2$ alors,

$$\Omega y = \{ y' \in E_2 | (y, y') \in \Omega \}, \ \forall y \in E_2$$

$$\Omega Y = \bigcup_{y \in Y} \Omega y, \qquad \forall Y \subset E_2$$

---

1991 AMS Subject Classification: 52A30, 26B25.

$$\Omega^- y = \{y' \in E_2 | y \in \Omega y'\}\ , \quad \forall y \in E_2$$

$$\Omega^c y = E_2 \setminus (\Omega y), \qquad \forall y \in E_2\ .$$

Rappelons que si $\Omega$ est une relation binaire sur $E_2$ et $Y$ est une partie non vide de $E_2$, alors l'ensemble polaire de $Y$ par rapport à $\Omega$ est défini par

$$[\Omega]Y = \bigcap\{\Omega y :\ y \in Y\}\ .$$

On sait que l'opérateur $\mathrm{cl}_\Omega : 2^{E_2} \to 2^{E_2}$ définie par

$$\mathrm{cl}_\Omega Y = [\Omega^-][\Omega]Y, \quad \forall Y \subset E_2$$

est une fermeture cyrtologique sur $E_2$ [1].

## 2. ($\Gamma$, $\Omega$)-QUASI-CONVEXITÉ

La définition suivante joue un rôle fondamental dans ce travail.

DÉFINITION 2.1. Soit $X$ une partie non vide de $E_1$ et soit $f : X \to E_2$.

i) Si $X$ est $\Gamma$-convexe par rapport à $x^0 \in X$, nous allons dire que $f$ est ($\Gamma$, $\Omega$)-quasi-convexe au point $x^0$ si

$$\forall x \in X \text{ tel que } f(x) \in \Omega f(x^0) \Rightarrow f(\Gamma(x, x^0)) \subset \Omega f(x^0).$$

ii) Si $X$ est $\Gamma$-convexe, nous allons dire que $f$ est ($\Gamma$, $\Omega$)-quasi-convexe sur $X$ si

$$\forall x^1, x^2 \in X \text{ et } \forall y \in E_2 \text{ tels que } f(\{x^1, x^2\}) \subset \Omega y \Rightarrow f(\Gamma(x^1, x^2)) \subset \Omega y.$$

*Remarque* 2.2. On voit aisément que si $E_1$ et $E_2$ sont des espaces vectoriels et si $C$ est un cône convexe dans $E_2$, alors en prenant

$$\Gamma(x^1, x^2) = \mathrm{co}\{x^1, x^2\} = \{tx^1 + (1-t)x^2 | t \in [0,1]\}, \ \forall x^1, x^2 \in E_1$$

et

$$\Omega y = y - C, \quad \forall y \in E_2\,,$$

la définition ci-dessus correspond à la notion usuelle de $C$-quasi-convexité [2, 3]. En particulier, si $E_2 = \mathbf{R}^n$ et $C = \mathbf{R}^n_+$ alors une fonction $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbf{R}^n$ est ($\Gamma$, $\geq_C$)-quasi-convexe si et seulement si toutes les composantes scalaires $f_i$ de $f$ sont quasi convexes au sens classique. De façon analogue, si $C = -\mathbf{R}^n_+$ alors $f$ est ($\Gamma$, $\geq_C$)-quasi-convexe si et seulement si les fonctions $f_i$ sont quasi-concaves au sens classique.



*Remarque* 2.3. On peut vérifier facilement que la Définition 2.1 ii) peut être reformulée de manière plus concise, comme suit:

*Proposition* 2.4. *Soit $X$ une partie non vide et* $\Gamma$-convexe *de $E_1$ et soit $f : X \to E_2$. Alors, $f$ est* ($\Gamma$, $\Omega$)*-quasi-convexe sur $X$ si et seulement si*

$$f(\Gamma(x^1, x^2)) \subset \mathrm{cl}_{\Omega^-}\{f(x^1), f(x^2)\}, \ \forall x^1, x^2 \in X.$$

LEMME 2.5. *Soit $X \neq \emptyset$ une partie $\Gamma$-convexe de $E_1$ et soit $f : X \to E_2$ une fonction* ($\Gamma$, $\Omega$)*-quasi-convexe sur $X$. Si $\Omega$ est réflexive alors $f$ est* ($\Gamma$, $\Omega$)*-quasi convexe en tout point $x^0 \in X$.*

*Démonstration.* Soit $x \in X$ tel que $f(x) \in \Omega f(x^0)$. On a $f(x^0) \in \Omega f(x^0)$, d'après l'hypothèse de la réflexivité de $\Omega$ et en prenant $x^1 = x$, $x^2 = x^0$ et $y = f(x^0)$ dans la Définition 2.1 ii) on obtient $f(\Gamma(x, x^0)) \subset \Omega f(x^0)$. □

THÉORÈME 2.6. *Soit $X \neq \emptyset$ une partie $\Gamma$-convexe de $E_1$ et soit $f : X \to E_2$. Supposons que*

*$\Omega$ soit transitive et totale;*

*$\Gamma$ soit symétrique, i.e. $\forall x^1, x^2 \in E_1$, $\Gamma(x^1, x^2) = \Gamma(x^2, x^1)$.*

*Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *$f$ est* ($\Gamma$, $\Omega$)*-quasi-convexe en tout point $x^0 \in X$;*

ii) *$f$ est* ($\Gamma$, $\Omega$)*-quasi-convexe sur $X$.*

*Démonstration.* L'implication ii) $\Rightarrow$ i) découle du Lemme 2.3 car toute relation totale est réflexive.

i) $\Rightarrow$ ii). Soit $x^1, x^2 \in X$ et soit $y \in E_2$ t.q. $f(\{x^1, x^2\}) \subset \Omega y$. $\Omega$ étant totale, il résulte que $f(x^1) \in \Omega f(x^2)$ ou $f(x^2) \in \Omega f(x^1)$. Par suite, $f(\Gamma(x^1, x^2)) \subset \Omega f(x^2)$ ou $f(\Gamma(x^2, x^1)) \subset \Omega f(x^1)$. Comme $\Omega$ est transitive, on a donc $f(\Gamma(x^1, x^2)) \subset \Omega y$ ou $f(\Gamma(x^2, x^1)) \subset \Omega y$, ce qui montre, compte tenu de la symétrie de $\Gamma$, que $f(\Gamma(x^2, x^1)) \subset \Omega y$. □

*Remarque* 2.7. Toutes les hypothèses du Théorème ci-dessus sont essentielles.

*Exemples* 2.8. 1) Soit $E_1 = E_2 = \mathbf{R}$ et $\Gamma : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightrightarrows \mathbf{R}$ définie par

$$\Gamma(x^1, x^2) = \mathrm{co}\{x^1, x^2\} = [\min(x^1, x^2), \max(x^1, x^2)], \ \forall x^1, x^2 \in \mathbf{R}.$$

Évidemment, $\Gamma$ est symétrique. Notons que dans ce cas, la $\Gamma$-convexité coïncide avec la convexité usuelle.

Soit $\Omega:\mathbf{R} \rightrightarrows \mathbf{R}$, $\Omega y = ]-\infty, y[$, $\forall y \in \mathbf{R}$, i.e. $y^2 \in \Omega y^1 \Leftrightarrow y^1 > y^2$. Évidemment $\Omega$ est transitive et non-réflexive.

Considérons la fonction $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x, \forall x\in\mathbf{R}$. Alors $\forall x^1,x^2,y\in\mathbf{R}$ t.q. $f(\{x^1,x^2\})\subset\Omega y$ on a max $(x^1,x^2)<y$ et donc $\Gamma(x^1,x^2)=f(\Gamma(x^1,x^2))\subset\Omega y$, ce qui montre que $f$ est $(\Gamma, \Omega)$-quasi-convexe sur $X$.

D'autre part, $\forall x^0, x\in\mathbf{R}$ t.q. $x<x^0$, on a $f(x)\in\Omega f(x^0)$ et $f(\Gamma(x,x^0)) =$ $= f([x,x^0]) = [x,x^0] \not\subset ]-\infty,x^0[ = \Omega f(x^0)$, ce qui montre que $f$ n'est pas $(\Gamma,\Omega)$-quasi-convexe dans aucun point $x^0\in\mathbf{R}$.

2) Soit $E_1 = E_2 = \mathbf{R}^2$ et soit $\Gamma:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \rightrightarrows \mathbf{R}^2$, définie par $\Gamma(x^1,x^2) =$ $= \mathrm{co}\{x^1,x^2\} = \{\lambda x^1+(1-\lambda)x^2 : \lambda\in[0,1]\}$ (la convexité classique). Notons que $\Gamma$ est symétrique.

Soit $C = \mathbf{R}^2 \setminus (\mathbf{R}_+^*)^2$ et $\Omega:\mathbf{R}^2 \rightrightarrows \mathbf{R}^2$, définie par $\Omega y = y + C$, $\forall y\in\mathbf{R}^2$, i.e.

$$y^2\in\Omega y^1 \Leftrightarrow y^2-y^1\notin(\mathbf{R}_+^*)^2.$$

Évidemment, $C$ est un cône fermé et non-convexe, et donc $\Omega$ est réflexive et non-transitive. De plus, $\Omega^- y = y - C$ et $C\cup(-C) = \mathbf{R}^2$, ce qui montre que $\Omega y\cup\Omega^- y = \mathbf{R}^2$, $\forall y\in\mathbf{R}^2$ c'est-à-dire $\Omega$ est totale.

Considérons la fonction $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f(x)=x, \forall x\in\mathbf{R}^2$. Alors $\forall x^0, x\in\mathbf{R}^2$ t.q. $f(x)\in\Omega f(x^0)$ on a $x\in\Omega x^0 \Leftrightarrow x\in x^0+C$ et $\Gamma(x,x^0)\subset x^0+C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(\Gamma(x,x^0))\subset x^0+C \Leftrightarrow f(\Gamma(x,x^0))\subset\Omega f(x^0)$, ce qui montre que $f$ est $(\Gamma,\Omega)$-quasi-convexe en $x^0$, $\forall x^0\in X$.

D'autre part, pour $y = (0, 0)$, $x^1 = (1, 0)$ et $x^2 = (0, 1)$ on a $f(\{x^1,x^2\}) =$ $= \{x^1,x^2\}\subset C = \Omega y$, mais $f(\Gamma(x^1,x^2))\not\subset\Omega y$. Plus précisément, $f(\Gamma(x^1,x^2))\setminus\Omega y =$ $= \mathrm{co}\{x^1,x^2\}\setminus C = \mathrm{int}(\mathrm{co}\{x^1,x^2\})\neq\varnothing$, ce qui montre que $f$ n'est pas $(\Gamma,\Omega)$-quasi-convexe sur $\mathbf{R}^2$.

3) Soit $E_1 = E_2 = \mathbf{R}$ et soit $\Gamma:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightrightarrows\mathbf{R}$, définie par

$$\Gamma(x^1,x^2) = x^1 + \left[0,|x^2-x^1|\right] = \begin{cases} \mathrm{co}\{x^1,x^2\}, & x^1\le x^2\\ [x^1, 2x^1-x^2], & x^1>x^2.\end{cases}$$

Soit $\Omega:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\rightrightarrows\mathbf{R}$, $\Omega y = [y,+\infty[$, $\forall y\in R$, i.e. $y^2\in\Omega y^1 \Leftrightarrow y^1\ge y^2$.

Considérons la fonction $f: X = [0,\infty[\ \to\mathbf{R}$, définie par



$$f(x) = \begin{cases}0, & x=0\\ 1/x, & x\in]0,\infty[.\end{cases}$$

On peut vérifier facilement que $X$ est $\Gamma$-convexe et que $f$ est $(\Gamma,\Omega)$-quasi-convexe en $x^0$, $\forall x^0\in X$.

D'autre part, pour $x^1 = 0$, $x^2 = 1$ et $y = 1$, on a $f(\{x^1,x^2\})\subset\Omega y$, mais $f(\Gamma(x^1,x^2)) = \{0\}\cup[1,\infty[\not\subset]-\infty,1]$, ce qui montre que $f$ n'est pas $(\Gamma,\Omega)$-quasi-convexe sur $X$.

4) Soit $E_1 = \mathbf{R}^2$, $E_2 = \mathbf{R}$ et soit $\Gamma:\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\rightrightarrows\mathbf{R}^2$ définie par

$$\Gamma(x^1,x^2) = \mathrm{co}\{x^1,(x_1^1,x_2^2)\}\cup\mathrm{co}\{(x_1^1,x_2^2),x^2\},$$

$\forall x^i = (x_1^i,x_2^i)\in\mathbf{R}^2$ $(i = 1, 2)$, et considérons le même $\Omega$ de l'exemple précédent.

Remarquons que $\Gamma$ n'est pas symétrique. Plus précisément, on a

$$\Gamma(x^1,x^2)=\Gamma(x^2,x^1)\Leftrightarrow (x_1^1-x_1^2)(x_2^1-x_2^2)=0.$$

Considérons la fonction $f: X = [0,1]\times[0,1]\to\mathbf{R}$, définie par

$$f(x)=\begin{cases}1-x_1, & x\in X_1\\ 1, & x\in X\setminus X_1,\ \forall x=(x_1,x_2)\in X\end{cases}$$

où $X_1 = \{(x_1,x_2)\in X \mid x_1\ge x_2\}$.

On peut vérifier facilement que $X$ est $\Gamma$-convexe et que $\forall x^0, x\in X$ t.q. $f(x)\in\Omega f(x^0)$, on a $f(x^0)\ge f(x')$, $\forall x'\in\Gamma(x,x^0)$, ce qui montre que $f$ est $(\Gamma,\Omega)$-quasi-convexe en $x^0$, $\forall x^0\in X$.

D'autre part, pour $x^1 = (1/2, 1/2)$, $x^2 = (1, 1)$ et $y = 3/4$ on a $f(\{x^1,x^2\})\subset\Omega y$, mais $f(\Gamma(x^1,x^2))\not\subset\Omega y$ ce qui montre que $f$ n'est pas $(\Gamma,\Omega)$-quasi-convexe sur $X$.

5) Soit $E_1 = \mathbf{R}$ et soit $E_2 = \mathbf{R}^2$. Considérons l'application $\Gamma$ définie dans l'exemple 2.8.1) et $\Omega:\mathbf{R}^2\rightrightarrows\mathbf{R}^2$, $\Omega y = y - C$, $\forall y\in\mathbf{R}^2$, où $C = \mathbf{R}_+^2$, i.e. $y^2\in\Omega y^1 \Leftrightarrow y^1\ge y^2$. Notons que $C$ est un cône convexe fermé est donc $\Omega$ est transitive et réflexive, mais $\Omega$ n'est pas totale, car $C\cup(-C)\neq\mathbf{R}^2$.

Considérons la fonction $f: X = [0,1]\to\mathbf{R}^2$, définie par

$$f(x)=\begin{cases}(x,1-x) & \text{si} \quad x\in\,]0,1]\setminus\{1/2\}\\(1/2,1/2) & \text{si} \quad x=0\\(0,1) & \text{si} \quad x=1/2.\end{cases}$$

On voit aisément que $f(x)\in\Omega f(x^0)$ entraître $x=x^0$ et donc $f(\Gamma(x,x^0)) = f(\{x^0\})\subset\Omega f(x^0)$, car $\Omega$ est réflexive. Par conséquent, $f$ est $(\Gamma,\ \Omega)$-quasi-convexe en tout point $x^0\in X$.

D'autre part, pour $x^1=1/4$, $x^2=3/4$ et $y=(3/4,\,3/4)$ on a $f(x^1)=(1/4,\,3/4)$, $f(x^2)=(3/4,\,1/4)$ et donc $f(\{x^1,x^2\})\subset\Omega y$. Mais, $f(\Gamma(x^1,x^2))=f([1/4,\,3/4])\not\subset\Omega y$ ce qui montre que $f$ n'est pas $(\Gamma,\,\Omega)$-quasi-convexe sur $X$.

## RÉFÉRENCES

1. S. Dolecki et C. Malivert, *Stability of efficient sets: continuity of mobile polarities,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appl. **12,** *12* (1988), 1461–1486.
2. J. Jahn, *Mathematical Vector Optimization in Partially Ordered Linear Spaces,* Peter Lang, Frankfurt, 1986.
3. D. T. Luc, *On three concepts of quasiconvexity in vector optimization*, Acta Mathematica Vietnamica **15,** *1* (1990), 3–9.
4. N. Popovici, *Sur quelques notions de quasi-convexité pour les fonctions vectorielles,* Exposé fait au Séminaire d'Analyse non-linéaire et Optimisation, Univ. d'Avignon et des Pays de Vaucluse, le 18 juin 1992.
5. N. Popovici, *Contribution à l'optimisation vectorielle,* Thèse de doctorat, Univ. de Limoges, 1995.

Reçu le 15 mai 1996

*Faculté de Mathématiques*
*Université «Babeş-Bolyai»*
*1 rue M. Kogălniceanu*
*3400 Cluj-Napoca*
*Roumanie*