REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome XXVI, N^{os} 1–2, 1997, pp. 197–202

SUR CERTAINES ALLURES REMARQUABLES

ELENA POPOVICIU

1. Les disciples et les collaborateurs de l'académicien Tiberiu Popoviciu ont organisé pendant l'année 1996 plusieurs sessions scientifiques en hommage à la mémoire de leur maître, à l'occasion du 90^{e} anniversaire de sa naissance. Ce tome dédié à Tiberiu Popoviciu contient quelques-uns des travaux qui ont été inclus dans le progamme des sessions dont nous venons de parler. On y se rapporte plusieurs fois aux résultats de Tiberiu Popoviciu.

En 1934, on trouve, dans la revue Mathematica (Cluj) [1], la thèse de doctorat de Tiberiu Popoviciu qu'il a soutenue comme l'un des plus distingués élèves (à l'École Normale Supérieure de Paris) de Paul Montel, le célèbre mathématicien français. En 1945, la monographie «Les fonctions convexes» a fait porter les regards du monde mathématique vers la théorie de la convexité [2]. Il s'agit de deux moments significatifs dans le développement de la théorie de la convexité.

Les travaux [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] contiennent, en dehors de la construction de la théorie des fonctions (réelles, d'une et de plusieurs variables réelles) d'ordre $n \geq -1$ (convexes, non-concaves, polynômiales, non-convexes ou concaves) sur un sous-ensemble (contenant au moins $n+2$ points distincts) de leur ensemble de définition: diverses généralisations de cette théorie, une théorie de l'approximation des fonctions d'un ordre n donné, sur un intervalle, par des suites de fonctions élémentaires du même ordre n (on y trouve une certaine notion de fonction spline); une théorie concernant les procédés d'approximation qui conservent les propriétés de non-concavité (non-convexité) d'ordre précisé et sur un ensemble précisé, de la fonction approximée; une théorie de la meilleure approximation des fonctions d'ordre précisé sur un intervalle; une théorie de la représentation des fonctionnelles linéaires qui interviennent, ayant le rôle du reste, dans les procédés d'intégration numérique; l'évaluation, à l'aide du module de continuité, de l'ordre d'approximation des fonctions continues sur un intervalle, par les opérateur de S. N. Bernstein et par d'autres opérateurs linéaires d'approximation; diverses applications de la théorie de la convexité à l'Analyse Numérique; une théorie des fonctions à variation d'ordre supérieur bornée; une

1991 AMS Subject Classification: 41A05.

théorie des équations fonctionnelles dont les solutions sont des pseudo-polynômes; une théorie concernant les solutions approximatives de certaines équations. Ce sont seulement une petite partie des directions de recherche qu'on peut trouver dans les œuvres citées. Elles ont été le point de départ d'un grand nombre de travaux élaborés par les chercheurs qui font partie de l'école mathématique de Tiberiu Popoviciu. Parmi les directions dont nous venons de parler, se trouve aussi une orientation moderne en ce qui concerne la théorie et la pratique du calcul et l'Analyse Numérique.

Dans cette note je désire présenter quelques idées de Tiberiu Popoviciu qui ont marqué fortement le développement de certaines directions des mathématiques. Il s'agit, principalement, de ses recherches sur la convexité, sur l'approximation et, enfin, sur les prolongements de ces deux domaines vers l'analyse fonctionnelle et encore vers autres branches des mathématiques modernes, y compris aussi la théorie et la pratique du calcul.

On peut découvrir dans les travaux de Tiberiu Popoviciu certains principes qui réalisent une étroite liaison entre les théories qu'il a abordées. Ainsi, par exemple, l'idée de comparer un objet, qu'on veut étudier, avec les éléments d'un ensemble qui est considéré comme ensemble type, est souvent présente. De telles situations seront remarquées en ce qui suivent. La théorie même des fonctions convexes d'ordre supérieur peut être considérée comme ayant son point de départ dans un tel point de vue.

2. La Théorie des Fonctions Convexes d'Ordre Supérieur $n \geq -1$ dont le constructeur a été Tiberiu Popoviciu, a eu comme point de départ la comparaison d'une fonction quelconque avec les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}_{n+1}$ des polynômes de degré au plus égal à $n+1$. Pour mettre en évidence la voie qui nous amène au résultat, nous allons considérer un cas plus général.

Soit E un espace linéaire et $S_1 \subset S_2$ des sous-espaces propres. Considérons les ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ d'opérateurs

(1) $$\mathcal{U} \subset \{H | H: E \to \mathrm{E}\}, \quad \mathcal{U} \neq \varnothing$$

(2) $$\mathcal{V} \subset \{H | H: E \to \mathrm{E}\}, \quad \mathcal{V} \neq \varnothing.$$

On suppose que

(3) $$U \in \mathcal{U}, \quad x \in E \Rightarrow U(x) \in S_2$$

(4) $$U \in \mathcal{U}, \quad x \in S_2 \Rightarrow U(x) = x$$

(5) $$V \in \mathcal{V}, \quad x \in E \Rightarrow V(x) \in S_1$$

(6) $$V \in \mathcal{V}, \quad x \in S_1 \Rightarrow V(x) = x.$$

Les conditions (3), (4), (5) et (6) étant satisfaites, alors, d'une manière naturelle, on pose la question d'étudier les éléments $x \in E$ qui sont dans une des

situations suivantes:

(7) $$\text{quel que soit } U \in \mathcal{U} \Rightarrow U(x) \notin S_1;$$

(8) quels que soient les $V_1 \in \mathcal{V}$, $V_2 \in \mathcal{V}, V_1 \neq V_2$, l'on a $V_1(x) \neq V_2(x)$.

Évidement, pour pouvoir considérer des éléments x qui satisfont la condition (8) il faut supposer que l'ensemble d'opérateur $\mathcal{V}$ contient au moins deux éléments distincts.

Pour démontrer que les conditions (7) et (8) ne sont pas artificielles, on considère un modèle concret.

Soit E un espace linéaire F dont les éléments sont des fonctions réelles d'une variable réelle. Supposons que l'espace F contient les polynômes. Considérons les ensembles de polynômes $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ où $n \geq 0$. Au lieu de l'ensemble $\mathcal{U}$ on peut avoir l'ensemble

(9) $$L_{n+1} = \{L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \cdot), x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}$$

où

(10) $$L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \cdot): F \to \mathcal{P}_{n+1}$$

et

(11) $$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\} \subset X \subseteq R$$

où X est l'ensemble de définition des fonctions $f \in F$ et on suppose que

(12) $$\operatorname{card} X \geq n+2.$$

L'opérateur (10) est l'opérateur d'interpolation de Lagrange construit pour les points distincts (11).

D'une manière semblable, on peut désigner $\mathcal{V} = L_n$ où

(13) $$L_n = \{L(\mathcal{P}_n; u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}; \cdot): F \to \mathcal{P}_n | \text{où } u_i \neq u_j \text{ si } i \neq j\}$$

et

(14) $$\{u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}\} \subset X \subseteq R.$$

L'opérateur $L(\mathcal{P}_n; u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}; \cdot)$ est l'analogue de (10) dans le cas dans lequel au lieu de $\mathcal{P}_{n+1}$ on considère l'ensemble $\mathcal{P}_n$.

La condition (12) assure l'existence d'au moins deux éléments distincts de l'ensemble L_n.

Avec les notations qu'on a considérées, la condition (7) devient pour une fonction $f \in F$: quel que soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\} \subset X$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ on a

(15) $$L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f) \notin \mathcal{P}_n.$$

Comme nous l'avons démontré dans [13], la condition (15) est nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit $(n+1)$-valente par rapport à l'ensemble $\mathcal{P}_n$, sur X. Ce signifie que l'on a card $\left\{x \middle| P(x) = f(x),\ \forall P \in \mathcal{P}_n\right\} \le n+1$.

La condition (8) revient à:

quels que soient les sous-ensembles

$$\{u'_1, u'_2, \ldots, u'_{n+1}\} \neq \{u''_1, u''_2, \ldots, u''_{n+1}\},$$

$$u'_i \neq u'_j,\ u''_i \neq u''_j \quad \text{si } i \neq j \tag{16}$$

de l'ensemble X, l'on a

$$L(\mathcal{P}_n; u'_1, u'_2, \ldots, u'_{n+1}; f) \neq L(\mathcal{P}_n; u''_1, u''_2, \ldots, u''_{n+1}; f). \tag{17}$$

3. Il faut, d'abord, remarquer que les conditions (3), (4), (5), (6) font la liaison avec la propriété interpolatoire des ensembles $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$, les opérateurs U et V étant des projecteurs.

En sachant [1] que la fonction $f \in F$ s'appelle d'ordre n sur X si les différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ ne changent pas leur signe quand on considère de toutes les manières possibles les ensembles de points (11) de X, on est amené à construire une synthèse abstraite des propriétés exprimées par (7) et (8) et par les conditions qui sont contenues dans la définition des fonctions $f \in F$ d'être convexes (non-concaves, polynômiales, non-convexes, respectivement concaves) d'ordre n sur X. Pour obtenir une telle synthèse nous nous sommes placés dans le cadre suivant.

Considérons les ensembles non-vides A et B et un ensemble d'applications

$$\mathcal{T} \subset \{T | T : A \to B\}. \tag{18}$$

Soit $B_0 \subset B$ non-vide et $B_0 \neq B$.

DÉFINITION 1. On dit que l'élément $a \in A$ a le comportement (B_0, T) si l'on a $T(a) \in B_0$.

DÉFINITION 2. On dit que l'élément $a \in A$ a le comportement $(B_0, \mathcal{T})$ si l'on a $T(a) \in B_0$ quelle que soit l'application $T \in \mathcal{T}$.

Ainsi par exemple, l'élément $x \in E$ qui a la propriété (7) a en même temps la propriété $U(x) \in S$ où $S = S_2 / S_1$ et il a, donc, le comportement $(S, \mathcal{U})$. Alors le comportement $(S, \mathcal{U})$ et, en particulier, le comportement qui se déduit de la condition (15) nous permettent de formuler le

THÉORÈME 1. *La propriété de* $(n+1)$*-valence d'une fonction* $f \in F$, *sur* X, *par rapport à l'ensemble* $\mathcal{P}_n$ *est un comportement.*

On peut, donc, considérer le comportement $(S, \mathcal{U})$ comme une généralisation de la propriété de $(n+1)$-valence ([2], [9]) d'une fonction $f \in F$ sur X et par rapport à l'ensemble $\mathcal{P}_n$.

4. Si l'on considère la partition $B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$, $m \ge 3$, $B_i \cap B_k = \varnothing$ pour $i \neq k$ on peut formuler la

DÉFINITION 3. L'élément $a \in A$ a l'allure (B_i, T) si $T(a) \in B_i$ et il a l'allure $(B_i, \mathcal{T})$ si $T(a) \in B_i$ quel que soit $T \in \mathcal{T}$.

Nous avons démontré [11] et nous avons étudié, de différents points de vue, le fait que la convexité d'ordre n quelconque et la quasi-convexité [10] d'un ordre n quelconque sont des allures.

Pour la notion de quasi-convexité d'ordre supérieur il faut voir le travail [10]. Pour en donner quelques détails, considérons la fonction $f : X \to \mathbf{R}$ où $X \subseteq \mathbf{R}$ et en supposant card $X \ge n+3$ où l'on a $n \ge 0$ fixé, on considère aussi les points

$$x_1 < x_2 < \ldots < n+3$$

de l'ensemble X. Dans [10] nous avons considéré les fonctions f pour lesquelles on a

$$[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}; f] \le \max\{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f], [x_3, x_4, \ldots, x_{n+3}; f]\},$$

pour chaque système de points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ de l'ensemble X. Nous avons donné à ces fonctions le nom de fonctions quasi convexes d'ordre n sur l'ensemble X. Pour $n = 0$ on obtient le cas

$$f(x_2) \le \max\{f(x_1), f(x_3)\},$$

pour chaque système de points $x_1 < x_2 < x_3$ de l'ensemble X, qui a été considéré par Tiberiu Popoviciu dans [6].

5. Comme dans les définitions 2 et 3 intervient l'ensemble $\mathcal{T}$, on remarque, donc, que si l'on a deux allures $(B_i, \mathcal{T})$ et $(B_i, \mathcal{H})$ où $\mathcal{H} \subset \{T | T : A \to B\}$, alors on peut se poser la question de comparer les deux allures.

DÉFINITION 4. On dit que l'allure $(B_i, \mathcal{H})$ précède l'allure $(B_i, \mathcal{T})$ si l'on a $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}$.

Si nous nous rapportons à des fonctions $f \in F$ et à la convexité d'ordre n sur X et à la quasi-convexité d'ordre n sur X, en ayant dans tous les deux cas $n \ge 0$ et fixé, on a le

THÉORÈME 2. *L'allure de quasiconvexité d'ordre n précède l'allure de convexité d'ordre n.*

6. Dans [9] et dans d'autres travaux nous avons considéré les fonctions $f \in F$, pour lesquelles la différence divisée $[u_1, u_2, \ldots, u_h, u_{h+1}, \ldots, u_{n+2}; f]$ où

les points $u_1, u_2, \dots, u_h$ pour un h, $1 \le h \le n+1$, fixé, sont fixés dans X et les points $u_{h+1}, \dots, u_{n+2}$ sont considérés de toutes les manières possibles dans X, satisfont l'inégalité

$$(19) \qquad [u_1, u_2, \dots, u_h, u_{h+1}, \dots, u_{n+2}; f] > 0,$$

quels que soient les point $u_{h+1}, \dots, u_{n+2}$ dans l'ensemble $X, n \ge 0$ étant fixé.

On peut énoncer le

THÉORÈME 3. *La propriété exprimée par* (19) *est une allure et cette allure précède l'allure de convexité d'ordre n sur X.*

7. Les considérations que nous avons faites dans ce travail en résumé ont eu comme but de mettre en évidence une direction de recherche qui peut être développée en ayant comme point de départ l'idée de convexité d'ordre supérieur.

RÉFÉRENCES

1. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica **8** (1934), 1–85.
2. T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.
3. T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica **10** (1934), 59–64.
4. T. Popoviciu, *Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle*, Mathematica **12** (1936), 5–12.
5. T. Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur*, Revue Math. de l'Union Interbalkanique **2** (1939), 31–40.
6. T. Popoviciu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. de la Section Sc. Acad. Roumaine **20** (1938), 45–49.
7. T. Popoviciu, *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame*, Ed. Ardealul, Cluj, 1937.
8 T. Popoviciu, *Sur une généralisation des fonctions spline*, Mathematical Structures, Computational Mathematics, Mathematical Modeling (Sofia) (1975), 405–410.
9. E. Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, Cluj, 1972.
10. E. Popoviciu, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation **11** (1982), 129–137.
11. E. Popoviciu, *Sur certaines propriétés des fonctions quasi-convexes*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation **12** (1983), 175–186.
12. E. Popoviciu (Moldovan), *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica 1 (24) (1959), 49–80.
13. E. Popoviciu, *Despre unele momente semnificative în dezvoltarea teoriei convexității*, Seminarul Itinerant "Tiberiu Popoviciu", de Ecuații Funcționale, Aproximare şi Convexitate, Cluj-Napoca, 1995, p. 89–92.

Reçu le 15 mai 1996

Str. Roşiori, nr. 40
3400 Cluj-Napoca
România