REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
TOME XXVII, N° 2, 1998, pp. 321–329

SUR L'APPROXIMATION DES ENSEMBLES D'EFFICIENCE

NICOLAE POPOVICI

1. INTRODUCTION

On sait que la plupart des méthodes numériques de résolution des problèmes d'optimisation vectorielle conduisent à certaines suites de solutions efficientes approximatives. Dans ce travail nous nous proposons de relier la notion de suite efficiente, introduite par V. V. Podinowski et V. D. Noghin [5] et généralisée par nous dans [6], à celles d'écart d'efficience introduite par nous dans [7] et de points de compromis au sens de P. L. Yu [8]. Commençons par rappeler quelques notions fondamentales.

Désignons par $(E,\|\cdot\|,C)$ e.n.o. un espace normé réel $(E,\|\cdot\|)$ ordonné par un cône convexe et pointu C, i.e. $\mathbb{R}_+\cdot C\subset C+C\subset C$ et $-C\cap C=\{0\}$. La relation d'ordre induite par C sera notée par $\geqq_C$, i.e. $x\geqq_C y\Leftrightarrow x-y\in C$. De plus, considérons les relations binaires suivantes: $x\geq_C y\Leftrightarrow x-y\in C\setminus\{0\}$ et $x>_C y\Leftrightarrow x-y\in \operatorname{int}C$, si l'intérieur du cône C est non vide.

Pour tout sous-ensemble non vide A de E, $[C]\,A=\cap\{x+C\colon x\in A\}$ désigne l'ensemble polaire de A et $\operatorname{IMax}(A|C)=A\cap[C]\,A$ représent l'ensemble des points *idéal-maximaux* dans A. Pour chaque point $x\in E$ la section de A par x est l'ensemble $A_x=A\cap(x+)$; si $x\in A$, alors la section A_x est dite propre. Un point $x^0\in A$ est *efficient* si $A_{x^0}=\{x^0\}$. L'ensemble des points efficients de A sera noté par $\operatorname{Max}(A|C)$. On a donc

$$\operatorname{Max}(A|C)=\{x^0\in A:\nexists x\in A \text{ tel que } x\geq_C x^0\}.$$

Si $\operatorname{int}C\neq\emptyset$, l'ensemble des points *faiblement-efficients* est défini par

$$\operatorname{WMax}(A|C)=\{x^0\in A:\nexists x\in A \text{ tel que } x>_C x^0\}.$$

AMS Subject Classification: 90C31.

Si le cône C est fermé, un point $x^0 \in A$ est dit *super-efficient* au sens de D. Zhuang [2] s'il existe un nombre $M > 0$ vérifiant la propriété suivante:

$$\forall x \in A,\ \forall y \in E \ \text{tel que}\ x - x^0 \geqq_C y \Leftrightarrow \|x - x^0\| \leq M\|y\|.$$

L'ensemble des points super-efficients de A sera noté par $\mathrm{SMax}(A|C)$. On sait que $\mathrm{SMax}(A|C) \subset \mathrm{Max}(A|C)$ et que dans le cas de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^n$ ordonné par $C = \mathbb{R}^n_+$, la notion de super-efficience coïncide avec celle d'*efficience propre* au sens de A. M. Geoffrion [3].

Si $e \in C \setminus \{0\}$, un point $x^0 \in A$ est dit *ε-efficient* au sens de V. V Podinowski et V. D. Noghin [5] ou P. Loridan [4] s'il n'existe aucun point $x \in A$ tel que $x \geq x^0 + e$. L'ensemble des points *e*-efficients de A sera noté par $e\text{-}\mathrm{Max}(A|C)$.

Si $\varepsilon > 0$ est un nombre réel alors $x \in A$ est dit *ε-efficient* [7] si l'écart d'efficience de x par rapport à A vérifie l'inégalité $e_A(x) \leq \varepsilon$. Rappelons que $e_A(x) = d_H(\{x\}, A)$ où d_H signifie la distance de Hausdorff. L'ensemble des points ε-efficients de A sera noté par $\varepsilon\text{-}\mathrm{Max}(A|C)$.

Il est aisé de voir que

$$\mathrm{Max}(A|C) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon\text{-}\mathrm{Max}(A|C) = \bigcap_{e \in C\setminus\{0\}} e\text{-}\mathrm{Max}(A|C).$$

Une suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A est dite *suite efficiente de A* ([5], [6]) si

$$\forall e \in C \setminus \{0\},\ \exists n_e \in \mathbb{N} \ \text{tel que}\ x^n \in e\text{-}\mathrm{Max}(A|C),\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_e$$

Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ définie sur un ensemble non vide $X \subset E$ est dite:

i) C-croissante sur X, si $f(x^1) \geq f(x^2)$, $\forall x^1, x^2 \in X$ tel que $x^1 \geqq_C x^2$;

ii) C-décroissante sur X, si $f(x^1) \leq f(x^2)$, $\forall x^1, x^2 \in X$ tel que $x^1 \geqq_C x^2$;

iii) strictement C-croissante sur X, si $f(x^1) > f(x^2)$, $\forall x^1, x^2 \in X$ tel que $x^1 \geqq_C x^2$;

iv) strictement C-décroissante sur X, si $f(x^1) < f(x^2)$, $\forall x^1, x^2 \in X$ tel que $x^1 \geqq_C x^2$. En particulier, la norme $\|\cdot\|$ est dite (strictement) croissante si elle est C-(strictement) croissante sur C.

Un ensemble $Y \subset E$ est dit:

i) borné, si $\operatorname{diam} Y < \infty$;

ii) C-supérieurement borné, si $[C]\, Y] \neq \emptyset$;

iii) C-inférieurement borné, si $[-C]\, Y] \neq \emptyset$;

iv) C-borné, si Y est à la fois C-supérieurement borné et C-inférieurement borné.

On peut vérifier facilement que:

1) Si $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, alors Y est C-borné dès que Y est borné;

2) Si la norme $\|\cdot\|$ est C-croissante, alors Y est borné dès que Y est C-borné.

2. SUITES EFFICIENTES ET SCALARISATION

Dans ce qui suit nous allons examiner deux questions:

(I) Étant donné un point efficient en A, les suites convergentes vers ce point sont-elles des suites efficientes en A?

(II) La limite d'une suite efficiente convergente en A est-elle point efficient en A?

Rappelons d'abord deux résultats préliminaires concernant les suites efficientes et leur lien avec l'écart d'efficience.

LEMA 2.1 ([6], L. 3.2). *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o réel et tel que $\|\cdot\|$ soit C-croissante et soit A une partie non vide de E telle que* $\inf\{e_A(x) : x \in A\} = 0$. *Alors toute suite minimisante en A pour e_A est une suite efficiente en A.*

PROPOSITION 2.1 ([6], Th. 3.3). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel de dimension finie, ordonné par un cône convexe fermé et aigu C. Si la norme $\|\cdot\|$ est C-croissante et si, de plus, le cône C vérifie la propriété suivante:*

(1) $\quad \forall x \in C \setminus \{0\}$ et $\forall \lambda \in]0, 1[$, $\exists r > 0$ tel que $(x + B_r) \cup C \subset \lambda x + C$

alors, pour tout sous-ensemble non vide $A \subset E$ pour lequel $\inf\{e_A(x) : x \in A\} = 0$, *les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $(x^n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite minimisante de A pour e_A;

ii) $(x^n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite efficiente de A.

Notons que les normes usuelles $\|\cdot\|_p$ $(p \in [1, +\infty[\cup \{+\infty\})$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifient (1) pour $C = \mathbb{R}^n_+$.

PROPOSITION 2.2. *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o réel et tel que sa norme soit C-croissante et soit A une partie non vide de E telle que* $\mathrm{Max}(A|C) \neq \emptyset$. *Si $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de A, convergeant vers un point efficient $x^0 \in \mathrm{Max}(A|C)$ et si l'application e_A est continue en x^0, alors $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite efficiente de A.*

Démonstration. x^0 étant efficient, l'écart d'efficience de x^0 est ${}_A(x^0) = 0$ et la continuité de e_A entraîne que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante pour e_A dans A. La conclusion découle immediatement du Lemme 2.1. □

Dans ce qui suit nous présentons deux de nos résultats [7] concernant la continuité de l'écart d'efficience:

LEMME 2.2 ([7], Th. 3.1). *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o réel tel que le cône C soit fermé et aigu et que* int$C$ *soit non vide. Si A est une partie non vide de E ayant toutes les sections relativement compactes (i.e. $\forall x \in E$, $\mathrm{cl}A_x$ est compacte), alors l'application e_A est continue sur* $\mathrm{Max}(A|C) \cup \mathrm{Max}(\mathrm{cl}A|C)$ *(sous l'hypothèse que cet ensemble est non vide).*

LEMME 2.3 ([7], 3.1). *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o réel tel que le cône C soit fermé et aigu. Si A est une partie non vide de E ayant toutes les sections propres bornées, alors l'application e_A est continue sur* $\mathrm{SMax}(A|C)$ *(sous l'hypothèse que cet ensemble est non vide).*

COROLLAIRE 2.1. *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o réel tel que le cône C soit fermé et aigu et la norme $\|\cdot\|$ soit C-croissante. Soit A une partie non vide de E telle que* $\mathrm{Max}(A|C) \neq \emptyset$ *et soit $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des points dans A, convergente vers un point* $x^0 \in \mathrm{Max}(A|C)$. *Alors, chacune des deux conditions suivantes est suffisante pour que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite efficiente de A:*

i) $\mathrm{int}\,C \neq \emptyset$, $\mathrm{cl}(A_x)$ *est compacte,* $\forall x \in E$ *et* $x^0 \in \mathrm{Max}(A|C)$;

ii) A_x *est bornée,* $\forall x \in E$ *et* $x^0 \in \mathrm{SMax}(A|C)$.

Démonstration. La conclusion découle de la Proposition 2.2, en tenant compte du Lemme 2.2 pour (i) et respectivement du Lemme 2.3, pour (ii). □

Example 2.1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ le plan euclidien ordonée par $C = \mathbb{R}^n_+$ et soit $x^0 = (0, 1)$ et $A = \{0, 1\} \times [0, 1[\cup \{x^0\}$. En prenant $x^n = \left(0, \frac{n-1}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\lim\limits_{n\leftrightarrow\infty} x^n = x^0$ et $e_A(x^n) > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que dans ces circonstances $x^0 \in \mathrm{Max}(A|C)$ et la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 sans être une suite efficiente.

Tournons maintenant notre attention vers la scalarisation.

Le résultat suivant représente une généralisation d'un théorème établi par V. V. Podinovski et V. D. Noghin (Théorème 2.7.2, [5]) pour le cas de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ordonné par $C = \mathbb{R}^n_+$.

THÉORÈME 2.1. *Soit E un espace vectoriel topologique réel, ordonné par un cône convexe, fermé et aigu C. Soit A une partie non vide et relativement compacte de E, et soit $f : \mathrm{cl}A \to \mathbb{R}$ une fonction C-croissante et continue sur* cl$A$. *Si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite maximisante de A pour f, alors chacune des deux conditions suivantes représente une condition suffisante pour que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite efficiente de A:*

i) f est strictement C-croissante sur cl$A$;

ii) $\mathrm{card}(\mathrm{argmax}\{f(x) : x \in \mathrm{cl}A\}) = 1$.

Démonstration. Supposons que $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite efficiente en A. Alors il existe $e \in C \setminus \{0\}$ et $(x^{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x^{n_k} \notin e\text{-}\mathrm{Max}(A|C)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ce qui montre qu'il existe une suite $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans A telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ y^k \in A_{x^{n_k}+e}, \quad \text{i.e. } y^k \geqq_C x^{n_k} + e.$$

L'ensemble A étant relativement compact, on peut admettre sans restreindre la généralité, que les suites $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes; soit $x^0 = \lim\limits_{k\to\infty} x^{n_k}$ et $y^0 = \lim\limits_{k\to\infty} y^k$. Le cône C étant fermé, on déduit que $y^k \geq_C x^{n_k} + e \geq_C x^0$. D'autre part, f étant continue sur cl$A$, l'hypothèse que la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est maximisante pour f, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x^n) = \sup\{f(x) : x \in A\}$ entraîne

$$f(x^0) = \lim_{k\to\infty} f(x^{n_k}) = \sup\{f(x) : x \in A\}. \tag{2}$$

Puisque f est C-croissante sur cl$A$ et $y^0 \geq_C x^0$, on déduit que $f(y^0) \geq f(x^0)$.

Maintenant, si la condition (ii) est satisfaite, la dernière inégalité et (2) entraînent $y_0 = x_0$, ce qui contredit le fait que $y^0 \geq_C x^0$. De même, si la condition (i) est satisfaite, alors $y^0 \geq_C x^0$ entraîne $f(y^0) > f(x^0)$, ce qui contredit (2). Le théorème est donc prouvé. □

Exemple 2.2. Pour un espace vectoriel topologique réel E, ordonné par un cône convexe et pointu C, on note par E^* son dual topologique et

$$C^{*+} = \{l \in E^* : l(x) > 0,\ \forall x \in C \setminus \{0\}\}.$$

Il est aisé de voir que toute fonction $f \in C^{*+}$ est strictement C-croissante et continue sur E.

COROLLAIRE 2.2. *Soit E un espace vectoriel topologique réel, ordonné par un cône convexe, fermé et aigu C. Soit A une partie non vide et relativement compacte en E et soit $f : \mathrm{cl}A \to \mathbb{R}$ une fonction continue et C-décroissante sur* cl*A*.

Si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante en A pour f, alors chacune des conditions suivantes représente une condition suffisante pour que la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite efficiente:

i) f est strictement C-décroissante sur cl*A;*

ii) $\mathrm{card}(\mathrm{Arg\,min}\{f(x) : x \in \mathrm{cl}A\}) = 1$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Théorème 2.1, car *f* est *C*-décroissante (*C*-croissante) sur $X \subset E$ si et seulement si $-f$ est *C*-croissante (respectivement *C*-décroissante) sur *X*. □

Remarque 2.1. Soit $E = \mathbb{R}^2$ normé par $\|\cdot\|_\infty$ et ordonné par $C = \mathbb{R}^n_+$. Considérons $A = [0,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0,1]$. On peut vérifier facilement que l'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \|u - x\|_\infty$ vérifie les hypothèses du Corollaire 2.2, mais elle ne satisfait ni (i), ni (ii). Dans ce cas, la suite $x^n = (1/n, 0)$ est minimisante de *A* pour *f*, sans être une suite efficiente de *A*.

3. POINTS DE COMPROMIS

Dans ce qui suit nous allons examiner un cas particulier de fonctions *C*-décroissantes, qui sont obtenues par la projection métrique des points polaires sur l'ensemble envisagé.

DÉFINITION 3.1. Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o réel et soit *A* une partie non vide et *C*-supérieurement bornée. Un point $x^0 \in \mathrm{cl}A$ est dit *Π-efficient* en *A*, ou *point de compromis* pour *A* s'il existe un point polaire $u \in [C]A$ tel que $\|u - x^0\| = \inf\{\|u - x\| : x \in A\}$. L'ensemble des points de compromis pour *A* sera noté par Π-Max (*A*|*C*). Il est aisé de voir que

$$\Pi\text{-Max}(A|C) = \pi_{\mathrm{cl}A}([C]A),$$

ce qui justifie les notations.

LEMME 3.1 *Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ un e.n.o réel tel que le cône C soit fermé et aigu et que sa norme soit strictement C-croissante. Si $A \subset E$ est une partie non vide et C-supérieurment bornée, alors quel que soit $u \in [C]A$, l'application $f_u : E \to \mathbb{R}$*

définie par $f_u(x) = \|x - u\|$, $\forall x \in E$ est continue et strictement C-décroissante sur cl*A*.

Démonstration. Remarquons d'abord, que pour tout $x \in E$, l'application f_u est strictement *C*-décroissante sur l'ensemble $u - C$. En effet, $\forall x^1, x^2 \in u - C$ tels que $x^1 \geq_C x^2$ on a $u - x^2 \geq_C u - x^1 \geq_C 0$, d'où on tire $\|u - x^2\| > \|u - x^1\|$, car la norme a été supposée strictement *C*-décroissante.

Montrons la relation suivante:

$$[C]A = [C](\mathrm{cl}A). \tag{3}$$

Il est clair que $[C](\mathrm{cl}A) \subset [C]A$. Pour montrer l'inclusion inverse, soit $v \in [C]A$. Alors, pour tout $y \in \mathrm{cl}A$, il existe une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de *A*, qui converge vers *y*, et donc $\lim_{n\leftrightarrow\infty}(v - x^0) \in \mathrm{cl}C = C$, d'où on déduit que $v \in \bigcap\{y + C : y \in \mathrm{cl}A\} = [C](\mathrm{cl}A)$, ce qui prouve (3).

Ensuite, de (3) on tire $\mathrm{cl}A \subset u - C$ et donc f_u est strictement *C*-décroissante sur cl*A*, en vertu de la remarque ci-dessus.

La continuité de f_u est immédiate. □

LEMME 3.2. *Soit E un espace vectoriel réel, ordonné par un cône convexe et pointu C et soit $X \subset E$ non vide. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est C-décroissante sur X et* $\mathrm{argmin}\{f(x) : x \in X\} \neq \emptyset$, *alors une des deux conditions suivantes:*

i) *f est strictement C-décroissante sur X;*

ii) $\mathrm{card}(\mathrm{argmin}\{f(x) : x \in X\} = 1$ *entraîne l'inclusion suivante :*

$$\mathrm{argmin}\{f(x) : x \in X\} \subset \mathrm{Max}(X|C).$$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe $x^0 \in X \setminus \mathrm{Max}(X|C)$ tel que $f(x^0) \leq f(x)$, $\forall x \in X$. Par conséquent, il existe $y^0 \in X$ tel que $y^0 \geq_C x^0$. Par suite, $f(y^0) \leq f(x^0)$, c'est-à-dire $y_0 \in \mathrm{Argmin}\{f(x) : x \in X\}$.

Maintenant, si la condition (i) est satisfaite, de $y^0 \geq_C x^0$ on tire $f(y^0) < f(x^0)$, ce qui contredit le fait que $x_0 \in \mathrm{Argmin}\{f(x) : x \in X\}$. De même, si (ii) est satisfaite, alors $f(y^0) \leq f(x^0)$ entraîne $y^0 = x^0$, ce qui contredit $y^0 \geq_C x^0$. □

THÉORÈME 3.1. Soit $(E, \|\cdot\|, C)$ *un e.n.o réel tel que le cône C soit fermé et aigu et que sa norme soit strictement C-croissante. Si $A \subset E$ est une partie non vide, relativement compacte et C-supérieurement bornée, alors*

$$\Pi\text{-}\mathrm{Max}(A|C) \subset \mathrm{Max}(\mathrm{cl}A|C) \quad \text{et} \quad A \cap \Pi\text{-}\mathrm{Max}(A|C) \subset \mathrm{Max}(A|C). \tag{4}$$

De plus, toute suite minimisante de A pour f_u (avec $u \in [C]A$) est une suite efficiente.

Démonstration La dernière partie de la conclusion est une conséquence immédiate du Corollaire 2.2 et du Lemme 3.1.

Pour prouver (4), notons d'abord que sous les hypothèses du théorème la relation (3) est vraie et, par définition, on a:

$$\Pi\text{-}\mathrm{Max}(A|C) = \bigcup \{\mathrm{Arg\,min}\{f_u(x) : \mathrm{cl}A\} : u \in [C]A\}.$$

Par conséquent, (3) n'est qu'une conséquence immédiate du Lemme 3.2. □

On a vu dans le deuxième paragraphe que la notation de super-efficience joue un rôle important en ce qui concerne la continuité de l'application e_A. Le théorème qui suit montre l'importance de cette notion du point de vue des suites efficientes. Pour établir ce résultat, on a besoin du lemme suivant:

LEMME 3.3. ([2], T 5.5) *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel, ordonnée par un cône convexe, fermé et aigu C qui possède une base bornée. Si X est un sous-ensemble non vide de $-C\setminus\{0\}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $x^0 \in \mathrm{SMax}(X|C)$;

ii) *Il existe une norme $|||\cdot|||$ strictement C-croissante et équivalente à $\|\cdot\|$, telle que* $|||x^0||| = \min\{|||x||| : x \in X\}$.

THÉORÈME 3.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel, ordonnée par un cône convexe, fermé et aigu C, qui possède une base bornée et soit A une partie non vide et C-supérieurement bornée de E, qui possède des points super-efficients. Alors toute suite de A, convergeant vers un point super-efficient de A, est une suite efficiente.*

Démonstration. Soit $u \in [C]A$ et soit $e \in C\setminus\{0\}$. Alors $A \subset u - C = u + e - (e + C) \subset u + e - C$ et donc $A - (u + e) \subset -C\setminus\{0\}$, car C est convexe et aigu.

Supposons maintenant que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge vers un point $a^0 \in \mathrm{SMax}(A|C)$. Alors, en posant $x^0 = a^0 - (u + e)$ et $X = A - (u + e)$, nous avons $X \subset -C\setminus\{0\}$ et $a^0 \in \mathrm{SMax}(A|C)$. En vertu du Lemme 3.3, il existe donc une norme $|||\cdot|||$ de E, équivalente à $\|\cdot\|$, telle que

$$|||x^0||| = \min\{|||x||| : x \in X\}$$

c'est-à-dire $|||x^0||| = \min\{|||x||| : x \in X\}$.

D'après l'équivalence des normes $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$, il résulte que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a^0 par rapport à la norme $|||\cdot|||$, ce qui montre que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minimisante de A pour la fonction

$$f_{u+e} : E \to \mathbb{R},\ f_{u+e}(x) = |||x - (u + e)|||,\ \forall x \in E.$$

Comme sous les hypothèses faites on peut appliquer le Théorème 3.1 pour l'espace $(E, \|\cdot\|, C)$, on déduit que $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite efficiente de A. □

RÉFÉRENCES

1. H. Attouch and H. Riahi, *Stability results for Ekeland's ε-variational principle and cone extremal solutions*, Mathematics of Operations Research **18**, *1* (1993), 173–201.
2. J. M. Borwein and D. Zhuang, *Super efficiency in vector optimization*, Transactions of the A.M.S. **338**, *1* (1993), 105–122.
3. A. M. Geoffrion, *Proper efficiency and the theory of vector maximization*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **22** (1968), 618–630.
4. P. Loridan, *ε-Solutions in vector minimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications **43**, *2* (1984), 265–276.
5. V. V. Podinowski and V. D. Nogin, *Pareto-optimal Solutions of Multicriteria Problems* (in Russian), Nauka, Moscow, 1982.
6. N. Popovici, *Suites efficientes dans l'optimisation vectorielle*, "Babeş-Bolyai" Univ. Cluj, Preprint 7 (1994), 95–105.
7. N. Popovici, *L'écart d'efficience dans l'optimisation vectorielle*, Rev. Anal. Numér. Théorie Approximation **25**, *1-2* (1996), 217–224.
8. P. L. Yu, *Multiple criteria Decision Making: Concepts, Techniques, and Extensions*, Plenum Press, New York – London, 1985.

Reçu le 15 décembre 1996.

Department of Mathematics
University "Babeş-Bolyai"
3400 Cluj-Napoca
Roumania