REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
TOME XXVII, N° 2, 1998, pp. 331–338

ESSAI CONCERNANT UNE ANALYSE QUALITATIVE BERNSTEINIENNE

ELENA POPOVICIU

1. Nous fêtons cette année (1997) 40 ans depuis la fondation de l'Institut de Calcul de l'Académie Roumaine, de Cluj-Napoca, 30 ans depuis la fondation du Séminaire Itinérant d'Équations Fonctionnelles et 25 ans depuis la fondation du Laboratoire de Recherches Interdisciplinaires (L.R.I.).

Le Séminaire Itinérant d'Équations Fonctionnelles fondé en 1967 pour réunir, périodiquement, dans différents centres universitaires du pays, les mathématiciens qui étudient les divers branches de la théorie générale des équations, a fusionné, peu après, avec le Séminaire d'Approximation et Convexité en arrivant ainsi à la structure actuelle du Séminaire Itinérant d'Équations Fonctionnelles, Approximation et Convexité (SIEFAC). Depuis trois ans il a reçu le nom de l'académician Tiberiu Popoviciu (SIEFAC.TP), apportant de cette façon un hommage à la mémoire de ce grand mathématicien qui a contribué d'une manière essentielle à la création du Séminaire qu'il a soutenu ensuite jusqu'à la fin de sa vie, ainsi qu'il a soutenu beaucoup d'autres activités importantes liées à l'activité mathématique de notre pays.

Dans sa qualité de fondateur de l'Institut de Calcul, Tiberiu Popoviciu a réussi à grouper autour de lui des mathématiciens de grande valeur. L'école mathématique d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation crée par Tiberiu Popoviciu en 1946, l'an de son arrivée à l'Université de Cluj-Napoca, par l'organisation de son séminaire de recherche (ayant pour thème la Théorie de l'Approximation aux applications dans l'Analyse Numérique) a pris un grand essor.

L'orientation des recherches des sections et des secteurs de l'Institut de Calcul répondait aux tendances modernes des mathématiques et était fondée sur les résultats très valeureux et bien connus du directeur de l'Institut.

Dans l'Institut on faisait des mathématiques, on faisait des applications des mathématiques dans différents domaines des recherches et de la pratique et on construisait les premiers ordinateurs roumains completement transistorisés.

AMS Subjectiv Classification: 41A36.

A côté des mathématiciens activaient aussi des ingénieurs, des économistes, des physiciens. On a créé ainsi les conditions favorables à un abord inter- et multi-disciplinaires des problèmes que la pratique et la théorie du calcul soulevaient aux mathématiques. Toutes ces circonstances ont rendu possible l'organisation des colloques et des symposiums avec une participation internationale entre les années 1960 – 1975, la création du Séminaire Itinérant d'Équations Fonctionnelles, Approximation et Convexité et l'apparition du Laboratoire de Recherches Interdisciplinaires. Les moments décisifs ont été: le début en 1953 (lorsqu'il fonctionnait déja à Cluj-Napoca, une Section de Mathématiques de l'Académie Roumaine) des premières collaborations entre les mathématiciens et les chercheurs des autres spécialités (biologues, médecins, chimistes, économistes, ingénieurs, musicologues, linguistes) et l'organisation en 1958, du premier symposium de cybernétique du pays, par l'Institut de Calcul.

En 1975 par un décret spécial toutes les instituts de recherche de l'Académie ont été fermés. Ils ont été ouverts de nouveau après 1989. Tant SIEFAC que LRI ont continué à se réunir périodiquement, même après 1975.

En ceux qui suivent nous allons nous rapporter à des idées liées aux directions de recherche de l'Institut de Calcul.

2. L'analyse dont le nom est contenu dans le titre de ce travail a comme point de départ les propriétés assez connues et très riches des opérateurs de S. N. Bernstein. Principalement, il s'agit de certaines allures (au sens précisé dans [4]) qui, étant présentes à une fonction réelle, d'une variable réelle, restent valables pour l'image de la fonction obtenue par l'opérateur de S. N. Bernstein. Les allures dont nous avons parlé sont obtenues généralement par un processus de comparaison d'une fonctions, qui nous intéresse, avec des fonctions qui appartiennent à une classe qui présente de l'importance pour un problème que nous désirons étudier.

Dans l'étude des propriétés qui font intervenir les opérateurs de S. N. Bernstein, on remarque le rôle des différences divisées. Comme nous allons le voir, la notion de fonction convexe d'ordre supérieur, au sens de Tiberiu Popoviciu [7], fait intervenir dans la définition les différences divisées. La fonction $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ étant donnée, on considère le nombre entier $n \geq -1$. On suppose que l'ensemble X contient au moins $n + 2$ points distincts.

Comme on va le voir, on arrive à la définition des fonctions d'ordre n de Tiberiu Popoviciu [7], sur l'ensemble X, en considérant toutes les différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f]$, les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ étant choisis de toutes les manières possibles dans X. Au sens de la définition de Tiberiu Popoviciu, f est d'ordre n sur X si les différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f]$ ne changent pas leur signe. Donc, la propriété de la fonction f d'être d'ordre n sur l'ensemble X fait intervenir toutes les différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f]$ de la fonction f. D'une manière naturelle se pose le problème de considérer des propriétés dont la définition fait intervenir seulement un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f]$. Nous ne désirons pas, maintenant, insister sur des classes de fonctions qui ont des telles propriétés. Mais nous allons remarquer le cas des fonctions quasi-convexes d'ordre supérieur que nous avons considérées dans [4].

L'entier $n \geq 0$ étant fixé, considérons la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ où $X \subseteq \mathbb{R}$ et card $X \geq n + 3$. Soit $Y \subseteq X$ et card $Y \geq n + 3$. La comparaison des triplets de différences divisées

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, f], \quad [x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}, f],$$
$$[x_3, x_4, \ldots, x_{n+3}, f],$$

quand on choisi les points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ de toutes les manières possibles dans l'ensemble Y, nous permet de donner la définition suivante.

La fonction f s'appelle quasi-convexe d'ordre n, sur l'ensemble Y, si l'on a

$$[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}, f] \leq \max\ \{[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, f],\ [x_3, x_4, \ldots, x_{n+3}, f]\},$$

quand on considère les points $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ de toutes les manières possibles dans l'ensemble Y.

Cette propriété de la fonction f assure, si des conditions données dans [4] sont satisfaites, la positivité des différences divisées $[u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}, f]$ pour chaque système $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$ de points appartenant à un certain sous-ensemble des points de Y.

On n'a pas encore étudié l'image d'une fonction ayant cette propriété, obtenue par l'operérateur de S. N. Bernstein.

3. Par la suite, on désire mettre en évidence quelques propriétés qui interviennent dans l'analyse mathématique de nos jours et dont l'origine ne se trouve pas parmi les méthodes habituelles d'investigations. Généralement, on considère des conditions qui, étant imposées à n'importe quel objet mathématique, nous amènent à des situations idéales. Mais la réalité ne se présente pas toujours sous des formes idéales. Ainsi, dans les problèmes concrets qu'on doit résoudre, les fonctions qui interviennent ne sont pas, dans tous les cas, continues. Ou bien, si elles sont continues, elles ne sont pas toujours dérivables. En ce qui concerne la monotonie, ou la convexité d'un certain ordre ou d'autres propriétés, de la même beauté, dans la plus part des cas, elles ne sont pas présentes. Mais, on remarque, souvent, des situations qui peuvent être considérées semblables à celles dont nous venons de parler. Pour pouvoir parler de propriétés semblables il faut se baser sur des critères bien définis.

L'utilisation des ordinateurs nous oblige de considérer des propriétés qui sont semblables dans un sens précisé. La similitude de certaines figures, de certaines propriétés, de certaines objects est une question qui est devenue le point de départs d'une nouvelle analyse qui est de plus en plus intéressante. Nous essayons d'en donner des exemples pour préciser les affirmations que nous venons d'avoir faites.

4. Dans plusieurs travaux, nous avons considéré la notion de comportement et celle d'allure. Les définitions que nous en avons données se trouvent dans [4], [5], [6] et encore dans plusieurs autres.

La notion de comportement et celle d'allure interviennent dans des recherches théoriques et aussi dans les applications. On en a donné des généralisations dans les thèses de doctorat de mes disciples Mircea Ivan [3], Radu Precup [10], Ioan Raşa [11] et autres. Une étude intéressante est faite par Gabriela Cristescu dans le travail [1].

En ce qui concerne l'implication des ordinateurs pour l'image obtenue par la représentation graphique d'une fonction réelle f définie sur un ensemble $X \subseteq \mathbb{R}$, on remarque qu'en considérant des diverses restrictions de la fonction f à des sous-ensemble de X, les propriétés qualitatives (monotonie, convexité, etc.) de l'image peuvent changer quand on considère de sous-ensembles de points plus ou moins éloignés. Dans le travail de Daniela Cîrdan [2] on peut remarquer qu'en négligeant les paires de points dont la distance est inférieure à un nombre positif fixé, on obtient de nouvelles propriétés de la fonctions f, en se basant sur les diverses restriction dont nous venons de parler. Cette remarque nous montre que l'utilisation des ordinateurs doit être secondée par des recherches théoriques ayant à la base une analyse mathématique assez fine.

5. Considérons la fonction réelle

(1) $$f: X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R}.$$

Pour un nombre entier $n \geq 1$, fixé, supposons que l'ensemble X contient au moins $n+2$ points distincts et que l'ensemble $Y \subseteq X$ satisfait la même condition. On peut, donc, se poser la question d'examiner, d'après un critère précisé, quelles sont les propriétés de la restriction de f à l'ensemble Y, qui peuvent nous intéresser.

Soient donnés les points

(2) $$x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$$

de l'ensemble Y. Le critère sera, maintenant, le signe de la différence divisée $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f]$. On va se baser sur les définitions de Tiberiu Popoviciu ([7], [8]).

DÉFINITION 1 (Tiberiu Popoviciu). La fonction f est dite *convexe, polynômiale ou concave d'ordre n*, sur les points (2) d'après qu'on a

(3) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f] > 0, = 0 \quad \text{ou} < 0.$$

On peut, maintenant, considérer les différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f]$ pour chaque ensemle (2) de points de l'ensemble Y.

DÉFINITION 2 (Tiberiu Popoviciu). La fonction f est dite *convexe, non-concave, polynômiale, non-convexe ou concave d'ordre n*, sur l'ensemble Y, d'après que la condition

(4) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f] > 0,\ \geq 0,\ = 0,\ \leq 0 \quad \text{ou} < 0,$$

est satisfaite, quels que soient les points (2) de l'ensemble Y.

L'étude des propriétés contenues dans les définitions 1 et 2 est étroitement lié à la théorie de l'interpolation. Mais beaucoup de problèmes qui appartiennent à la théorie de l'approximation font intervenir les conditions (4).

6. Nous allons, maintenant, faire les premiers pas dans un domaine que nous désirons appeler «analyse qualitative bernsteinienne», d'après le nom de S. N. Bernstein. On suppose que $X = [0,1]$ et que la fonction (1) est continue sur $[0,1]$.

On désigne par

(5) $$B_m : C[0,1] \to \mathscr{P}_m,\quad m \geq 0,$$

les opérateurs qui, pour une $f \in C\,[0, 1]$, nous donnent comme image le polynôme de S. N. Bernstein de degré m

(6) $$B_m(f, x) = \sum_{i=0}^{m} f\left(\frac{i}{m}\right)\binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i}.$$

Par $C[0,1]$ on a désigné l'espace des fonction continues sur l'intervalle $[0,1]$ doué avec la norme uniforme et par $\mathscr{P}_m$ l'ensemble des polynômes de degré m. Les propriétés de l'opérateur (5) sont bien connues. Principalement, il s'agit de la démonstration du théorèmes de Weierstrass concernant l'approximation des fonctions de l'espace $C[0,1]$ par des polynômes [9]. Parmi les propriétés qui ont fait l'objet d'un nombre impressionants de travaux, se trouvent celles qui expriment la liaison entre la suite (6) de polynômes et les propriétés de la fonction f

exprimées par les inégalités (4), quand f appartient à l'un des ensembles de fonctions données par les définitions 1 ou 2.

Dans le livre [9], Tiberiu Popoviciu démontre le

THÉORÈME 1 [9]. *Les images de la fonction f obtenues par les opérateurs* (5) *conservent les propriétés de f données par les définitions* 1 *et* 2.

Dans cet énoncé les inégalités strictes > 0 et < 0 sont des cas particuliers des inégalités ≥ 0 et ≤ 0.

Dans le cahier de problèmes de la chaire d'analyse mathématique dont le chef était Tiberiu Popoviciu se trouvait un problème concernant les itérées de l'opérateur (5)

$$(7) \qquad B_m^{(0)} = B_m,\ B_m^{(k)} = B_m B_m^{(k-1)},\ k = 1, 2, \ldots.$$

On demandait une démonstration de la proposition

$$(8) \qquad \lim_{k\to\infty} B_m^{(k)}(f, x) = B_1(f, x) = f(0)(1-x) + f(1)\, x$$

la convergeance étant uniforme sur l'intervalle [0,1]. Le problème a été proposé par Tiberiu Popoviciu.

Des diverses démonstrations ont été données par les mathématiciens Sebastian Seidel, Gheorghe Toader et Grigore Călugăreanu quand ils étaient membres du Cercle d'Analyse Mathématique des Étudiants de la Faculté de Mathématique de notre Université.

7. Les propriétés qui résultent, en supposant l'une des situations données par les inégalités (4), sont très nombreuses. Elles interviennent, souvent, dans l'étude des problèmes d'optimisation et aussi dans des divers autres domains des mathématiques. Ainsi, par exemple, la convexité d'ordre $n = 1$ d'une fonction $f \in C[a, b]$ implique des propositions très importantes concernant les points de minimum de f. On trouve parmi elles des propositions qui restent valable même si la fonction f n'est pas convexe d'ordre $n = 1$ sur $[a, b]$ mais elle est quasiconvexe au sens habituel sur $[a, b]$. La quasi-convexité d'ordre supérieur donne aussi d'informations utiles pour les problèmes d'optimisation.

On est amené à considérer des fonctions qui ne satisfont pas les conditions exprimées par (4) mais qui d'un certain point de vue imitent l'un des cas décrits par (4). La voie que nous allons suivre est celle qui nous conduit à une analyse des polynômes (6) pour une fonction $f \in C[0, 1]$ et à l'analyse de la suite des images de la fonction obtenues par la suite des opérateurs

$$(9) \qquad (B_m^{(k)})_{k=0}^{\infty},\quad m \geq 1 \quad \text{fixé.}$$

Si la fonction f est convexe d'ordre n sur [0, 1], pour $n \geq 1$ fixé, alors le polynôme (6) pour $m = n + 1$ est aussi convexe d'ordre n sur [0, 1], d'après les résultats donnés dans [9]. Mais le polynôme (6), où on pose $m = n + 1$, peut être convexe d'ordre n sans que la fonction f le soit. Supposons, donc, que la fonction $f \in C[0, 1]$ ne soit pas convexe ni non-concave et ni polynômiale d'ordre n sur [0, 1]. Alors il existe au moins un ensemble (2) de points distincts de l'intervalle [0, 1] ainsi que

$$(10) \qquad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}, f] < 0.$$

L'inégalité (10) signifie que est concave d'ordre n sur [0, 1]. La fonction f étant continue sur [0, 1], l'inégalité (10) implique l'existence encore d'autres ensemble de $n + 2$ points distincts de [0, 1] sur lesquels f est aussi concave d'ordre n, d'après [5].

Supposons que le polynôme (6), pour $m = n + 1$, est convexe d'ordre n. C'est-à-dire que toutes les différences divisées considérées pour $n + 2$ points distincts de [0, 1] sont positives. Il faut préciser qu'on peut construire des exemples de fonctions pour lesquelles on a (10) pour un ensemble (2) de points distincts de [0, 1] et la condition de convexité d'ordre n sur [0, 1] du polynôme (6) pour $m = n + 1$ est satisfaites.

En analysant, maintenant, la suite

$$(11) \qquad (B_{n+1}^{(k)}(f, \cdot))_{k=1}^{\infty},$$

on remarque que les polynômes (11) sont convexes d'ordre n sur [0,1] si les conditions que nous avons imposées sont satisfaites. Mais il faut tenir compte du fait que l'on a la relation (8) pour $m = n + 1$. On a le cas le plus intéressant quand en commençant avec un ordre d'itération $k = p$, les polynômes (11) ne prennent les valeurs de f sur aucun point de [0,1] qui n'est pas égal à 0 ou à 1.

DÉFINITION 3. *Si pour $m = n + 1$ le polynôme* (6) *est convexe d'ordre n sur* [0, 1] *et avec un $k = p$ les polynomes* (11) *commencent à ne pas prendre les valeurs de f pour des points $x \in\ ]0, 1[$, alors on dit que f est convexe d'ordre n, sur* [0, 1], *au sens des itérées* $(B_{n+1}^{(k)})_{k=p}^{\infty}$.

Si la fonction f satisfait les conditions de l'énoncé de la définition 3, alors on observe que f a une propriété trés intéressante.

THEORÉME 2. *Si la fonction f satisfait les conditions de la définition 3, allors la courbe représentative de f reste dans un des semi-plans déterminés par la droite représentative du polynôme* (8).

RÉFÉRENCES

1. G. Cristescu, *Sequences of convexities converging to the classical convexity* (sous presse).

2. D. Cîrdan, Roughly *d-convex functions* (sous presse).

3. M. Ivan, *Operatori de interpolare şi aplicaţii ale lor* (Opérateurs d'interpolation et certains de leurs applications), Thèse de doctorat, 1982.

4. E. Popoviciu, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, Rev. Anal. Numér. Théorie Approximation **11**, 129–137 (1982).

5. E. Popoviciu, *Teoreme de medie din Analiza Matematică şi legătura lor cu Teoria interpolării*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1972.

6. E. Popoviciu, *Sur certaines allures remarquables*, Seminarul Itinerant de Ecuaţii funcţionale, aproximare şi convexitate, 21–25 mai 1996, Cluj-Napoca, pp. 129–134.

7. T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une et de deux variables réelles*, Mathematica **8**, 1–85 (1934).

8. T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.

9. T. Popoviciu, *Cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame*, Colecţia Monografii Matematice, Secţiunea de Matematică a Universităţii din Cluj, 1933–1934.

10. R. Precup, *Operatori de aproximare care conservă anumite aluri*, Thèse de doctorat, 1985.

11. I. Raşa, *Funcţionale simple în sensul lui Tiberiu Popoviciu*, Thèse de doctorat, 1982.

Reçu le 15 décembre 1996.

Str. Roşiori nr. 40
3400 Cluj-Napoca
Romania