REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome XXVII, N° 2, 1998, pp. 203–217

EIN PROBLEM VON A. PAPOULIS BEZÜGLICH DER BANDBEGRENZTEN INTERPOLATION

H. BOCHE

1. ALLGEMEINE BEMERKUNGEN UND ERGEBNISSE

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit der folgenden zentralen Fragestellung befassen, die mit dem Abtast-Theorem verknüpft ist:

Gegeben sei eine beliebige, auf der gesamten reellen Achse definierte Funktion f und eine beliebige reelle Zahl $a > 0$. Besitzt nun die formal gebildete Abtast-Reihe

$$\frac{a}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(ka)\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}$$

der Funktion f irgendeinen Sinn, das heißt: Existiert sie als ein bestimmtes mathematisches Objekt?

A. Papoulis [1] beantwortet diese allgemeine Fragestellung positiv. Er behauptet, daß urch diese Abtast-Reihe eine verallgemeinerte Funktion definiert ist und nennt diese die bandbegrenzte Interpolierende der Funktion f mit der Bandgrenze $\frac{\pi}{a}$.

Wir werden nun in den Abschnitten 2 und 3 zeigen, daß diese Behauptung nicht zutrifft und damit auch ihr Beweis nicht korrekt ist.

Dabei werden wir uns nicht einmal dieser (viel zu allgemeinen) Aufgabe zuwenden, sondern uns auf folgende Aufgabenstellung beschränken:

Wir betrachten im weiteren die Menge $C_0(\mathbb{R})$ der auf der reellen Achse stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktionen. Ist es möglich, der Abtast-Reihe der Funktion f für jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ und für jedes feste $a > 0$ einen mathematischen Sinn zu unterlegen? (Einen anderen Sinn kann ein rein mathematisches Objekt wie die Abtast-Reihe nicht haben.)

AMS Subject Classification: 42A15.

Wir werden diese Frage negativ beantworten. Es ist klar, daß eine negative Antwort auf diese Frage auch eine negative Antwort auf die allgemeinere Fragestellung beinhaltet.

Als erstes untersuchen wir im Abschnitt 2 das punktweise Verhalten der obigen Abtast-Reihe. Dazu wählen wir ein $a>0$ fest und untersuchen für alle Funktionen $f \in C_0(\mathbb{R})$ das Verhalten ihrer Abtast-Reihen in allen Punkten $\mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}$,

Die Abtast-Reihe der Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ kann in einem beliebigen aber festen Punkt to $t_0 \in (\mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z})$ nur genau dann existieren, wenn die Folge von Zahlen

$$\frac{a}{\pi} \sum_{k=-N}^{N} f(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t_0 - ka)}{t_0 - ka}$$

im Sinne der Theorie der reellen Zahlen konvergiert.

Wir sind nun aber in der Lage, konstruktiv eine Funktion $f_1 \in C_0(\mathbb{R})$ anzugeben, für die $f_1(t)=0$ für $t \le 0$ ist und die

$$\limsup_{N \to \infty} \left| \frac{a}{\pi} \sum_{k=1}^{N} f_1(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - ka)}{t - ka} \right| = \infty \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}$$

erfüllt.

Damit ist die Abtast-Reihe der Funktion f_1 in allen Punkten der Menge $\mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}$ unbeschränkt divergent. Die Abtast-Reihe der Funktion f_1 existiert also nicht im Sinne der punktweisen Konvergenz.

Durch einige zusätzliche Uberlegungen sind wir sogar in der Lage, Funktionen $f_2, f_3 \in C_0(\mathbb{R})$ derart zu konstruieren, daß

1. $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f_2(t)=0$ für $t \le 0$ und
$$\lim_{t \to \infty} f_2^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. $f_3 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f_3(t)=0$ für $t \le 0$ und
$$\int_0^\infty |f_3(t)|^p \, dt < \infty \quad \forall p \in [1, \infty)$$

gilt, worin $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen bezeichnet, und die

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{a}{\pi} \left| \sum_{k=1}^{N} f_i(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - ka)}{t - ka} \right| = \infty \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}$$

für $i = 2, 3$ erfüllen. Dieses Ergebnis zeigt, daß selbst für sehr glatte Funktionen $f_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ und f_2 sowie alle Ableitungen verschwinden im Unendlichen) und sogar glatte Funktionen f_3 mit endlicher Energie die Abtast-Reihen in allen Punkten der Menge $\mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}$ unbeschränkt divergieren können.

Die bisher aufgeführten Ergebnisse geben nur Aufschluß über das punktweise Verhalten der Folge der Partialsummen der Abtast-Reihe. Im Abschnitt 3 werden wir daran gehen, das Konvergenzverhalten im Sinne der Distributionentheorie zu untersuchen.

Die Abtast-Reihe einer Funktion $f_i \in C_0(\mathbb{R})$ existiert im Sinne der Distributionentheorie genau dann, wenn für jedes feste $\phi \in \mathcal{D}$ (d.h. für jede Testfunktion) die Folge der Zahlen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi} \sum_{k=-N}^{N} f(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - ka)}{t - ka} \phi(t) \, dt$$

konvergiert. Wir werden nun aber eine Funktion $f_4 \in C_0(\mathbb{R})$ und eine Testfunktion $\psi \in \mathcal{D}$ konstruieren, so daß

$$\limsup_{N \to \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi} \sum_{k=-N}^{N} f_4(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - ka)}{t - ka} \psi(t) \, dt \right| = \infty$$

gilt. Damit existiert die Abtast-Reihe der Funktion f_4 nicht im Sinne der Distributionentheorie. Wir werden sogar Funktionen $f_5, f_6 \in C_0(\mathbb{R})$ derart konstruieren, daß wiederum

1. $f_5 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f_5(t)=0$ für $t \le 0$ und
$$\lim_{t \to \infty} f_5^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. $f_6 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $f_6(t)=0$ für $t \le 0$ und
$$\int_0^\infty |f_6(t)|^p \, dt < \infty \quad \forall p \in [1, \infty)$$

gilt und eine Testfunktion $\psi \in \mathcal{D}$ mit

$$\limsup_{N \to \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi} \sum_{k=-N}^{N} f_i(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t - ka)}{t - ka} \psi(t) \, dt \right| = \infty$$

für $i = 5, 6$ angegeben werden kann.

Also selbst für Funktionen mit solch einschränkenden Eigenschaften existiert die Abtast-Reihe nicht im Sinne der Distributionentheorie.

Es entsteht nun die Frage, wo der Fehler in den Beweisen von A. Papoulis liegt. Die Ursache der Fehler in den Beweisen ist die Nichtbeachtung des Sachverhaltes, daß die formale Faltung zweier Distributionen keinen mathematischen Sinn haben muß, das heißt genauer, die Faltung zweier Distributionen ist nicht immer erklärt. Das trifft insbesondere dann zu, wenn die miteinander zu faltenden Distributionen keinen kompakten Träger haben [4].

Gerade unsere Konstruktionen sind sehr einfache Beispiele für diesen Sachverhalt, denn die formal gebildete Abtast-Reihe einer Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ ergibt sich aus der formalen Faltung der Distributionen

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(ka)\,\delta(t-ka)$$

und

$$\frac{\sin \pi a^{-1} t}{\pi a^{-1} t},$$

und diese formal gebildeten Abtast-Reihen haben im allgemeinen keinen Sinn in der Distributionentheorie.

2. AUSSAGEN ÜBER PUNKTWEISE DIVERGENZ DER ABTAST-REIHEN

Wir wollen uns nun mit punktweisen Divergenzaussagen für Funktionen aus dem Raum $C_0(\mathbb{R})$ beschäftigen.

Es sei in diesem Abschnitt $a > 0$ beliebig, aber fest, und mit diesem a definieren wir eine Menge

$$a\mathbb{Z} := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x = ka\}.$$

Es sei weiterhin $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $N \geq 1$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir wollen nun das Verhalten der Partialsummen der Abtast-Reihe

$$(S_N^a f)(t) := \frac{a}{\pi} \sum_{k=-N}^{N} f(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

der Funktion f untersuchen.

Dazu betrachten wir die Funktion

$$g_a(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2-\left(\frac{a}{4}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}}, \quad \frac{a}{4} \leq |t| < \frac{a}{2},$$

$g_a(t) = 1$ für $|t| < \frac{a}{4}$ und $g_a(t) = 0$ für $\frac{a}{2} \leq |t|$.

Sie ist beliebig oft differenzierbar und dient im weiteren als Basisfunktion für alle Konstruktionen. Da in diesem Abschnitt $a > 0$ stets eine feste Zahl ist, werden wir den Index a bei der Funktion g_a und beim Operator S_N^a unterdrücken.

Als erstes betrachten wir nun die Funktion

$$f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(2+ka)} g(t-ka) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Da nur höchstens ein Glied der Reihe von Null verschieden ist, ist die Reihe absolut konvergent. Weiterhin ist

$$f^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(2+ka)} g^{(n)}(t-ka) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und $f(t) = 0$ für $t \leq 0$. Man sieht sofort ein, daß

$$\lim_{t \to \infty} f^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt. Mit der konstruierten Funktion erhalten wir den folgenden Satz:

SATZ 1. *Es sei f die oben konstruierte Funktion, dann gilt*

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{\left| \frac{a}{\pi} \sum_{k=1}^{N} f(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka} \right|}{\ln \ln N} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}.$$

Damit gilt natürlich erst recht

$$\limsup_{N \to \infty} \left| \frac{a}{\pi} \sum_{k=1}^{N} f(ka) \frac{\sin \frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka} \right| = \infty \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus a\mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Die Folge der Partialsummen der Abtast-Reihe der Funktion f ist also in allen Punkten der Menge $\mathbb{R}\setminus a\mathbb{Z}$ unbeschränkt divergent, und somit existiert im Sinne der punktweisen Konvergenz keine Grenzfunktion, das heißt, die Abtast-Reihe existiert nicht im Sinne der punktweisen Konvergenz. Man beachte weiterhin, daß die Funktion f nur auf der positiven reellen Achse konzentriert ist, dort alle Ableitungen besitzt und mit samt allen Ableitungen im Unendlichen verschwindet.

Der Satz gibt weiterhin eine gewisse untere Wachstumsschranke an.

Beweis. Es sei $t \in \mathbb{R}\setminus a\mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt für alle $N > 1$

$$(S_N f)(t) = \frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{\ln(2+ka)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka} =$$

$$= \frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}t\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k(-1)^k}{\ln(2+ka)}\,\frac{1}{t-ka}.$$

Wir betrachten nun als erstes den Fall $(t \in \mathbb{R}\setminus a\mathbb{Z}) \wedge (t \le 0)$. Mit dieser Einschränkung erhalten wir

$$|(S_N f)(t)| = \left|\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}t\right|\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\ln(2+ka)}\,\frac{1}{t-ka}\right| =$$

$$= \left|\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}t\right|\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\ln(2+ka)}\,\frac{1}{|t|+ka}\right| =$$

$$\ge \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|\int_a^{Na}\frac{1}{(|t|+x)\ln(x+2)}\,dx.$$

Wir wollen nun den Bereich $-2 \le t \le 0$ untersuchen. Es gilt

$$\frac{1}{|t|+x} \ge \frac{1}{2+x} \qquad \forall x \ge 0,$$

und damit erhalten wir

$$|(S_N f)(t)| \ge \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|\int_a^{Na}\frac{1}{(2+x)\ln(x+2)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|\int_{\ln(2+a)}^{\ln(2+Na)}\frac{1}{u}\,du = \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|(\ln\ln(2+Na) - \ln\ln(2+a)),$$

womit die Aussage des Satzes für diesen Bereich bewiesen ist.

Für die Untersuchung des Falles $t < -2$ führen wir die folgende Hilfsfunktion

$$r_t(x) := \frac{x+2}{x+|t|} \qquad x \ge 0$$

ein. Man überprüft leicht die folgenden Eigenschaften der Funktion r_t:

$$r_t(0) = \frac{2}{|t|} \qquad \lim_{x\to\infty} r_t(x) = 1$$

und

$$r_t'(x) = \frac{|t|-2}{(x+|t|)^2} > 0 \quad \forall x \ge 0.$$

Damit ist die Funktion r_t monoton steigend. Es gilt also

$$\frac{1}{x+|t|} \ge \frac{2}{|t|}\,\frac{1}{x+2} \qquad \forall x > 0.$$

Mit dieser Abschätzung erhalten wir

$$|(S_N f)(t)| \ge \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|\int_a^{Na}\frac{1}{(2+x)\ln(x+2)}\,\frac{x+2}{x+|t|}\,dx \ge$$

$$\ge \frac{2}{|t|\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|\int_a^{Na}\frac{1}{(2+x)\ln(x+2)}\,dx =$$

$$= \frac{2}{|t|\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|(\ln\ln(2+Na) - \ln\ln(2+a)).$$

Wir haben also auch für diesen Fall die Aussage des Satzes bewiesen.

Es sei nun $t > 0$. Es existiert dann eine natürliche Zahl N_0, so daß

$$N_0 a < t < (N_0+1)a$$

gilt. Für $N > N_0 + 2$ haben wir

$$\left|(S_N f)(t) - \frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{N_0+1}\frac{(-1)^k}{\ln(2+ka)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}\right| =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|\left|\sum_{k=N_0+2}^{N}\frac{1}{\ln(2+ka)}\,\frac{1}{t-ka}\right| =$$

$$= \frac{a}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right| \sum_{k=N_0+2}^{N} \frac{1}{\ln(2+ka)}\,\frac{1}{ka-t} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right| \int_{(N_0+2)a}^{Na} \frac{1}{(x-t)\ln(x+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x-t} \ge \frac{1}{x+2} > 0$$

für $N_0 a < t < (N_0+1)\,a$ und $x \ge (N_0+2)\,a$, also gilt

$$\left|(S_N f)(t) - \frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{N_0+1}\frac{(-1)^k}{\ln(2+ka)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|\int_{(N_0+2)a}^{Na}\frac{1}{(x+t)\ln(x+2)}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi}{a}t\right|(\ln\ln(2+Na)-\ln\ln(2+a)).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir wollen nun durch eine geeignete Variation der Funktion f eine neue Funktion konstruieren, die noch weitere günstige Eigenschaften besitzt. Es sei $\{l_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $l_1 < 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} l_k < \infty$. Mit dieser Folge definieren wir eine Funktion

$$f_1(t) := \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\ln(2+ka)}\,g\!\left(\frac{t-ka}{l_k}\right) \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Es gilt

$$(S_N f)(t) = (S_N f_1)(t) \quad \forall t\in\mathbb{R} \ \ \forall N\in\mathbb{N}.$$

Die Funktion f_1 ist beliebig oft differenzierbar. Wir wollen nun zeigen, daß sie auch absolut integrierbar ist. Dazu sei $N > 2$ beliebig, und es gilt

$$\int_0^{\left(N+\frac{1}{2}\right)a} |f_1(t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\ln(2+ka)}\int_{\left(k-\frac{1}{2}\right)a}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)a}\left|g\!\left(\frac{t-ka}{l_k}\right)\right|\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\frac{l_k}{\ln(2+ka)}\int_{-\frac{a}{2l_k}}^{\frac{a}{2l_k}}|g(t)|\,\mathrm{d}t \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N}\frac{l_k}{\ln(2+ka)}\int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}|g(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_{-\frac{1}{2}a}^{\frac{1}{2}a}|g(t)|\,\mathrm{d}t\sum_{k=1}^{\infty} l_k.$$

Da die rechte Seite von N unabhängig ist, ist die Aussage bewiesen. Da nun die Funktion f_1 außerdem stetig und beschränkt ist, haben wir

$$\int_0^{\infty}|f_1(t)|^p\,\mathrm{d}t < \infty \quad \forall p \ge 1.$$

Die erzielten Ergebnisse fassen wir in dem folgenden Satz zusammen.

SATZ 2. *Die Funktion f_1 ist beliebig oft differenzierbar, verschwindet für $t \le 0$, gehört zu dem Raum $L^p(\mathbb{R})$, $p \ge 1$, und erfüllt außerdem*

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\left|\frac{a}{\pi}\sum_{k=1}^{N} f_1(ka)\,\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}\right|}{\ln\ln N} > 0 \quad \forall t\in\mathbb{R}\setminus a\mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Existieren für die Funktion f zwei Konstanten $C > 0$ und $\gamma > 0$, so daß

$$|f(t)| < \frac{C}{1+|t|^{\gamma}} \quad t\in\mathbb{R}$$

gilt, so konvergiert für diese Funktion die unendliche Abtast-Reihe.

Eine weitere Möglichkeit der Vermeidung der in diesem Abschnitt geschilderten Schwierigkeiten besteht im Übergang zu neuen Abtast-Kernen. Ist zum Beispiel ψ eine beschränkte und stetige Funktion mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\psi(t-k)| \le C$, so existiert die Abtast-Reihe für jede stetige und beschränkte Funktion f.

Eine weitergehende Diskussion dieser Probleme ist in [2] und [3] zu finden.

3. DIVERGENZ IM SINNE DER DISTRIBUTIONENTHEORIE

Wir führen nun einige Grundbegriffe ein. Eine ausführliche Darstellung ist in [4] zu finden. Mit $\mathcal{D}$ sei der lineare Raum aller beliebig oft differenzierbaren

Funktionen mit kompaktem Träger bezeichnet. In $\mathcal{D}$ führen wir die übliche Topologie ein, das heißt, eine Folge von Funktionen ist in $\mathcal{D}$ genau dann konvergent, wenn die Träger aller Funktionen der Folge in einem festen beschränkten Intervall liegen und dann in diesem Intervall die Folge mit samt allen Ableitungen gleichmäßig konvergiert. Der lineare Raum der auf $\mathcal{D}$ stetigen und linearen Funktionale sei mit $\mathcal{D}'$ bezeichnet. Die Elemente des Raumes $\mathcal{D}'$ heißen Distributionen bzw. verallgemeinerte Funktionen.

Eine Folge von Distributionen $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nun genau dann konvergent gegen eine Distribution T, wenn

$$\lim_{n\to\infty} T_n\phi = T\phi \quad \forall\phi\in\mathcal{D}$$

gilt. Führt man wie üblich den Begriff der Cauchy-Folge von Distributionen ein, so kann an zeigen, daß der Raum $\mathcal{D}'$ mit dem eingeführten Konvergenzbegriff vollständig ist.

Es sei wieder $a>0$ beliebig, aber fest. Für jede Funktion $f\in C_0(\mathbb{R})$ und alle $N>0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{a}{\pi}\sum_{k=-N}^{N} f(ka)\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}\right|^2 dt = a\sum_{k=-N}^{N}|f(ka)|^2,$$

wobei

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}\,\frac{a}{\pi}\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-la)}{t-la}\,dt = \begin{cases} a: & k=l\\ 0: & k\neq l\end{cases}$$

berücksichtigt wurde. Es sei nun $\phi\in\mathcal{D}$ beliebig, dann ist durch

$$G_{N,a,f}\phi := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{\pi}\sum_{k=-N}^{N} f(ka)\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}\phi(t)\,dt$$

eine Distribution $G_{N,a,f}\in\mathcal{D}'$ definiert. Wenn nun der Grenzwert der Partialsummen der Abtast-Reihe der Funktion f im Sinne der Distributionentheorie existieren soll, so muß eine Distribution $G_{a,f}\in\mathcal{D}'$ existieren, so daß

$$\lim_{N\to\infty} G_{N,a,f}\phi = G_{a,f}\phi \quad \forall\phi\in\mathcal{D}$$

gilt. Für ein festes $\phi\in\mathcal{D}$ muß also die Folge $\{G_{N,a,f}\phi\}_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bilden. Damit muß aber erst recht die Zahlenfolge

$$a_N := |G_{N,a,f}\phi|$$

für ein festes $\phi\in\mathcal{D}$ beschränkt sein. Um also eine Divergenzaussage im Sinne der Distributionentheorie zu erhalten, reicht es aus, den folgenden Satz zu beweisen.

SATZ 3. *Zu jedem $a>0$ existiert jeweils eine Funktion $f\in C_0(\mathbb{R})$ und eine Testfunktion $\phi\in\mathcal{D}$, so daß*

$$\limsup_{N\to\infty}|G_{N,a,f}\psi| = \infty$$

gilt.

Beweis. Es sei $f\in C_0(\mathbb{R})$ und $\phi\in\mathcal{D}$ beliebig, dann gilt

$$G_{N,a,f}\phi = a\sum_{k=-N}^{N} f(ka)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{a}(t-ka)}{t-ka}\phi(t)\,dt =$$

$$= a\sum_{k=-N}^{N} f(ka)\,\phi_a(ka).$$

Dabei ist die Funktion

$$\phi_a(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\hat{\phi}(x)\,e^{ixt}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{a}(\tau-t)}{\tau-t}\phi(\tau)\,d\tau \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

wohl definiert, da aus $\phi\in\mathcal{D}$ sofort $\hat{\phi}\in L^1(\mathbb{R})$ folgt. Wir wollen nun daran gehen, eine Funktion $\psi\in\mathcal{D}$ geeignet zu wählen. Mit dieser ist dann durch

$$\Phi_{N,a,\psi}f := G_{N,a,f}\psi = a\sum_{k=-N}^{N} f(ka)\,\psi_a(ka)$$

eine Folge von linearen und stetigen Funktionalen auf dem Raum $C_0(\mathbb{R})$ definiert. Für deren Norm ermittelt man

$$\|\Phi_{N,a,\psi}\| = a\sum_{k=-N}^{N}|\psi_a(ka)|,$$

denn

$$\|\Phi_{N,a,\psi}\| \le a\sum_{k=-N}^{N}|\psi_a(ka)|$$

ist trivial. Für den umgekehrten Fall betrachten wir eine beliebige stetige Funktion F, welche für $k=-N,-N+1,\dots,N$ die Beziehung $F(ka)=\operatorname{sign}\psi_a(ka)$ erfüllt, für $|t|>N+1$ gleich Null und für alle t-Werte durch Eins beschränkt ist.

Mit dieser Funktion gilt

$$\Phi_{N,a,\psi}F = a\sum_{k=-N}^{N}|\psi_a(ka)|\le\|\Phi_{N,a,\psi}\|\,\|F\|_{C_0(\mathbb{R})}=\|\Phi_{N,a,\psi}\|.$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, die Funktion ψ so auszuwählen, daß

$$\limsup_{N\to\infty}\|\Phi_{N,a,\psi}\|=\infty$$

gilt. Mit dieser Funktion ψ bildet dann die Menge D_ψ aller Funktionen $f\in C_0(\mathbb{R})$, für die

$$\limsup_{N\to\infty}|\Phi_{N,a,\psi}f|=\infty$$

gilt, eine Residualmenge [5] im Raum $C_0(\mathbb{R})$. Es sei f_1 eine beliebige Funktion aus der Menge D_ψ, dann gilt

$$\limsup_{N\to\infty}|\Phi_{N,a,\psi}f_1| = \limsup_{N\to\infty}|G_{N,a,f_1}\psi|=\infty,$$

womit unser Satz bewiesen ist. Da die Menge D_ψ eine Residualmenge ist, existiert stets eine solche Funktion f_1.

Uns verbleibt also nur noch die Aufgabe, die Funktion ψ zu finden.

Dazu sei $\phi\in\mathcal{D},\phi\not\equiv 0$, so gewählt, daß $\phi(t)=-\phi(-t)\ \forall t\in\mathbb{R}$ gilt. Daraus folgt $\hat\phi(x)=-\hat\phi(-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Da die Funktion ϕ einen kompakten Träger hat, ist $\hat\phi$ eine ganze Funktion. In jedem endlichen Intervall der reellen Achse existieren folglich nur endlich viele Nullstellen der Funktion $\hat\phi$. Es sei also $c>0$ eine beliebige Zahl mit $|\hat\phi(c)|>0$. Wir betrachten nun die Funktion

$$\hat\psi(x):=\hat\phi\left(\frac{xca}{\pi}\right)\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Es gilt

$$C_1:=\left|\hat\psi\left(\frac{\pi}{a}\right)\right|=|\hat\phi(c)|>0.$$

Für die Fourier-Transformierte erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat\psi(x)\,e^{ixt}\,dx\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat\phi\left(\frac{xca}{\pi}\right)e^{ixt}\,dx\\&=\frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{ca}\int_{-\infty}^{\infty}\hat\phi(x)\exp\left(\frac{itx\pi}{ca}\right)dx\\&=\frac{\pi}{ca}\,\phi\left(\frac{t\pi}{ca}\right)\qquad\forall t\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

also ist $\psi\in\mathcal{D}$. Es gilt nun weiterhin für alle $k>0$

$$\begin{aligned}\psi_a(ka)\,ka&=\frac{ka}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\hat\psi(x)\,e^{ixka}\,dx\\&=\frac{1}{2\pi i}\left(\psi\left(\frac{\pi}{a}\right)e^{ik\pi}-\psi\left(-\frac{\pi}{a}\right)e^{-ik\pi}\right)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\hat\psi'(x)\,e^{ixka}\,dx\\&=\frac{1}{\pi i}\,\psi\left(\frac{\pi}{a}\right)\cos k\pi-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\hat\psi'(x)\,e^{ixka}\,dx,\end{aligned}$$

was man durch partielle Integration unmittelbar nachprüft. Die Funktion $\hat\psi$ ist beliebig oft differenzierbar, und die Ableitungen beliebiger Ordnung sind absolut integrierbar. Damit gilt aufgrund des Lemmas von Riemann-Lebesgue

$$\lim_{|k|\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\hat\psi'(x)\,e^{ixka}\,dx=0,$$

woraus

$$\lim_{|k|\to\infty}|\psi_a(ka)|\,|ka|=\frac{C_1}{\pi}$$

folgt. Es sei weiterhin C_2 eine beliebige reelle Zahl mit $0 < C_2 < \frac{C_1}{\pi}$. Es existiert nun ein $k_0 = k_0(C_2)$ mit

$$|\psi_a(ka)| \geq \frac{C_2}{ka} \quad \forall k \geq k_0.$$

Ist nun $N > k_0 + 1$, so ergibt sich daraus für die Norm der Funktionale

$$\|\Phi_{N,a,\psi}\| \geq a \sum_{k=-k_0}^{k_0} |\psi_a(ka)| + 2aC_2 \sum_{k=k_0+1}^{N} \frac{1}{ka} =$$

$$= 2C_2 \ln N + O(1),$$

womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. □

Wir werden im weiteren zeigen, daß man Funktionen mit äußerst guten Eigenschaften konstruieren kann, so daß deren Abtast-Reihe im Sinne der Distributionen-Theorie nicht existiert.

Es sei ψ die im Satz 3 angegebene Funktion aus $\mathcal{D}$. Durch

$$f_1(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sign}(\psi_a(ka))}{\sqrt{\ln(2+ka)}} g(t-ka) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

und

$$f_2(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sign}(\psi_a(ka))}{\sqrt{\ln(2+ka)}} g\left(\frac{t-ka}{l_k}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

sind zwei auf der positiven reellen Achse konzentrierte, beliebig oft differenzierbare Funktionen definiert. (Die Folge $\{l_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist wie im Abschnitt 2, Seite & definiert.) Weiterhin gilt

$$\lim_{t \to \infty} f_1^{(n)}(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und

$$\int_0^{\infty} |f_2(t)|^p \, dt < \infty \quad \forall p \geq 1.$$

Mit diesen Funktionen erhalten wir den folgenden Satz:

SATZ 4. *Für die Funktionen f_1, f_2 und $\psi \in \mathcal{D}$ gidt*

$$\lim_{N \to \infty} |G_{N,a,f_1} \psi| = \infty$$

und

$$\lim_{N \to \infty} |G_{N,a,f_1} \psi| = \infty$$

Beweis. Es gilt mit $N > \max(k_0+1, 2a^{-1}, 10)$

$$|G_{N,a,f_1}\psi| = a \sum_{k=1}^{N} \frac{\text{sign}(\psi_a(ka))\, \psi_a(ka)}{\sqrt{\ln(2+ka)}} =$$

$$= |G_{N,a,f_2}\psi| = a \sum_{k=1}^{N} \frac{|\psi_a(ka)|}{\sqrt{\ln(2+ka)}} \geq \frac{a}{\sqrt{\ln(2+Na)}} \sum_{k=1}^{N} |\psi_a(ka)| =$$

$$= 2C_2 \frac{\ln N}{\sqrt{\ln(2+Na)}} + o(1) \geq 2C_2 \frac{\ln N}{\sqrt{\ln(2Na)}} + o(1) \geq$$

$$\geq 2C_2 \frac{\ln N}{\sqrt{\ln N + \ln 2a}} + o(1) \geq 2C_2 \sqrt{\ln N} \frac{1}{\sqrt{1 + (\ln 10)^{-1} \ln 2a}} + o(1),$$

womit die Aussage des Satzes bereits bewiesen ist. □

LITERATURVERZEICHNIS

1. A. Papoulis, *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
2. P. Butzer, W. Splettstößer and R. Stens, *The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis*, Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker Vereinigung **90** (1988), 1–70.
3. P. Butzer and R. Stens, *Sampling Theory for not necessarily band-limited Functions*, SIAM Review **34**, *1* (1992).
4. H. Triebel, *Höhere Analysis*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
5. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

Received January 10, 1996.

Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
Friedrich Schiller Universität Jena
07740 Jena
Germany