REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 28, N° 1, 1999, pp. 79–84

SUR CERTAINS RÉSULTATS AYANT COMME POINT DE DÉPART LE PROGRAMME DE RECHERCHE DE L'INSTITUT DE CALCUL DE CLUJ-NAPOCA DE L'ACADÉMIE ROUMAINE

ELENA POPOVICIU

1. Le 40e anniversaire de la fondation, en 1957, de l'Institut de Calcul de Cluj-Napoca de l'Académie Roumaine a été évoqué, en 1997, par diverses sessions scientifiques organisées par les collaborateurs de l'Institut. En 1998, ont eu lieu, encore, des telles sessions. Ainsi, à 27 mai 1998, a eu lieu un symposion dédidé au moment 1957, dont nous venons de parler. A cette occasion on a présenté les divers aspects de l'activité des chercheurs de l'Institut et du directeur, l'académicien Tiberiu Popoviciu, qui a fondé cet Institut. Ainsi, j'ai fait un synthèse concernant l'organisation de l'Institut et, en même temps, les plus importants résultats théoriques obtenues par les collaborateurs de l'Institut. L'une des sections de l'Institut avait, au centre de l'activité, un programme de construction des ordinateurs, en utilisant des solutions appartenant au collective de la section. Les collaborateurs de cette section étaient des ingénieurs, phisiciens, economistes, mathématiciens, etc. Nous n'insistons pas. Il faut souligner qu'en cette section on a construit les ordinateurs, bien connus, DACICC-1 et DACICC-200.

2. En 1957 on a élaboré un plan de recherches mathématiques qui a été suivi par les collaborateurs mathématiciens de l'Institut. Ce plan avait comme point de départ les théorie de l'académicien Tiberiu Popoviciu. Nous penssons à la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur et à la liaison de cette théorie avec l'analyse fonctionnelle, l'analyse numérique, la théorie de l'approximation et la théorie et la pratique du calcul. Les idées contenues dans les domaines dont nous venons de parler ont formé la base théorique de l'École d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation fondé par Tiberiu Popoviciu et dont les origines se trouve dans le Séminaire de recherche qu'il a organisé en 1947, après son arrivée à Cluj-Napoca. Dans ce Séminaire se sont groupés des jeuns mathématiciens et des professeurs de la Faculté de Mathématique de Cluj-Napoca. Les membres du Séminaire ont développé, en diverses directions, les théories appartenant au programme du Séminaire.

3. Comme collaborateur de l'Institut et membre du Séminaire de Tiberiu Popoviciu, j'ai eu la chanse de construire des nouvelles théories et pour ilustrer cette affirmation je donnerai, en ceux qui suivent un résumé concernant l'une des mes théories. Il s'agit de la théorie de l'allure. J'ai elaboré cette théorie ayant comme but une présentation abstraite de l'allure capable de contenir comme cas particulier les diverses propriétés de convexité et aussi d'autres propriétés plus généralles et des nouvelles idées qui ne sont pas strictement liées avec la notion de convexité. Comme on peut le remarquer, dans les thèses de doctorat préparées sous ma direction [1], [2],[3] la théorie de l'allure a des implications dans la reconnaissance des formes, dans l'interprétation des images obtenues par des divers analyses pratiquées en médecine, biologie et d'autres domaines. Les implications de ma théorie sont présentes aussi dans l'analyse fonctionnelle [12], la géometrie abstraite [3] et ainsi de suite.

4. La notion de fonction convexe d'ordre supérieur au sens de Tiberiu Popoviciu [4], [5] peut être interpreté comme résultat de la comparaison de la fonction considéré avec les polynômes d'un degré donné. Les fonctions aux quelles on se rapporte sont réelles et d'une variable réelle. Leur propriété de convexité est considerée sur un sous-ensemble de leur ensemble de définition. Les divers principes de comparaison de la fonction considérée avec les polynômes peuvent générer des diverses propriétés de convexité ou concavité généralisée.

Je donne, ici, la définition qui se trouve dans plusieurs travaux de Tiberiu Popoviciu, comme, par exemple, en [5]. Etant fixé l'entier $n \geq -1$, on considère les ensembles $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ où card $Y \geq n+2$. Soit donné la fonction $f : X \to \mathbb{R}$ et les points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ de l'ensemble Y. La définition dont nous venons de parler a l'énoncé suivant: on dit que la fonction f est convexe (non-concave, polynômiale, non-convexe, concave) d'ordre n, sur l'ensemble Y si l'on a

(1) $$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > (\geq, =, \leq, <)\, 0,$$

quels que soient les $n+2$ points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, de l'ensemble Y.

On a désigné par $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ la différence divisée de la fonction f. La première et la dernière inégalité dans la formule (1), signifie que le polynôme d'interpolation de degré $n+1$ qui prende les valeurs de f sur les points x_i $i = 1, 2, \ldots, n+2$, ne se réduit pas à un polynôme de degré n.

Désignons par $\mathcal{P}_{n+1}$ l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à $n+1$. Comme d'habitude, on désigne par a_0, a_1, ..., a_{n+1} les coefficients d'un polynôme quelconque $P \in \mathcal{P}_{n+1}$. C'est à dire, $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n+1} x^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}$. On peut considérer pour $n \geq 0$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}_{n+1}$, noté par

(2) $$\mathcal{P}_{n+1}\,(a_{n+1} = \alpha)$$

qui s'obtient en remplaçant a_{n+1} avec un nombre fixé $\alpha \neq 0$. Un peut, aussi, considérer pour $n \geq 0$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}_{n+1}$, désigné par

(3) $$\mathcal{P}_{n+1}\,(u_1, u_2, \ldots, u_h \text{ fixés})$$

où h étant fixé, $h = 1$ pour $n = 0$, $1 \leq h \leq n+1$ pour $n > 0$, les points distincts u_1, u_2, ..., u_h de l'ensemble Y sont fixés.

Il s'agit, donc, d'un sous-sensemble de $\mathcal{P}_{n+1}$ dont les éléments sont des polynômes qui ont sur les points fixés $u_1, u_2, \ldots, u_h$ des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_h$ fixées.

Les ensemble $\mathcal{P}_{n+1}$ $(a_{n+1} = \alpha)$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ $(u_1, u_2, \ldots, u_h$ fixés) sont des susensembles remarquables de $\mathcal{P}_{n+1}$. Les deux sous-ensembles ont des analogues même dans l'interpolation que j'ai considéré plusieures fois, comme, par example, en [12]. Pour préciser les idées, soit E un espace linéaire et $S_1 \subset S_2$ des sous-espaces propres. Considérons les ensembles $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ d'opérateurs

(4) $$\mathcal{U} \subset \{H \mid H : E \to E\},\ \mathcal{U} \neq \varnothing,$$

(5) $$\mathcal{V} \subset \{H \mid H : E \to E\},\ \mathcal{V} \neq \varnothing,$$

On suppose que

(6) $$U \in \mathcal{U},\ x \in E \Rightarrow U(x) \in S_2,$$

(7) $$U \in \mathcal{U},\ x \in S_2 \Rightarrow U(x) = x,$$

(8) $$V \in \mathcal{V},\ x \in E \Rightarrow V(x) \in S_1,$$

(9) $$V \in \mathcal{V},\ x \in S_1 \Rightarrow V(x) = x.$$

Si les conditions (6), (7), (8), (9) sont satisfaites, alors on peut considérer diverses propriétés analogues à celles qui ont été étudiées en utilisant les inégalités (1) et les propriétés interpolatoires des ensembles $\mathcal{P}_{n+1}$ et des ensembles (2) et (3). Ainsi, par exemple, les elements $x \in E$ qui satisfont des conditions comme sont celles qui suivent, (10) et (11), présentent un grand interêt. Nous pensons, donc, aux éléments $x \in E$ qui ont les propriétés

(10) quel que soit $U \in \mathcal{U}$, l'on a $U(x) \notin S_1$

ou bien

quel que soient les $V_1 \in \mathcal{V}$, $V_2 \in \mathcal{V}$, où

(11) on suppose $V_1 \neq V_2$, l'on a

$$V_1(x) \neq V_2(x).$$

Évidement, dans le cas (11), il faut supposer que l'ensemble d'opérateurs $\mathcal{V}$ contient au mois deux éléments distincts.

Pour comprendre la liaison des conditions (10) et (11) avec les inégalités (1) il faut voir [4] et [5].

5. Les propriétés de convexité d'ordre n et de concavité d'ordre n exprimées par les inégalitées (1) peuvent être considérées comme des propriétés par rapport à l'ensemble $\mathscr{P}_{n+1}$. Dans [5] en sont données les interpretations géométriques. En considérant l'interpretation géométrique en question, on peut arriver à une convexité (ou bien une concavité) par rapport à l'ensemble (2). Il faut voir, par exemple, [12].

Soit, maintenant, l'ensemble (3). On peut considérer, au lieu des inégalités (1) les analogues qui s'obtient quand au lieu des différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ on considère les

(12) $$[u_1, u_2, \ldots, u_h, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2-h}; f].$$

Evidement, l'ensemble des différences divisées (12) où on considère de toutes les manières possible les points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2-h}$ de Y est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les différences divisées $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$.

DÉFINITION 1. *La fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *est*

(13) *convexe (non-convexe, polynômiale, non-convexe, concave)*

par rapport à l'ensemble (3) sur Y, si l'on a

(14) $$[u_1, u_2, \ldots, u_h, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2-h}; f] > (\geq, =, \leq, <)$$

quels que soient les points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2-h}$ *de l'ensemble Y.* ■

Des propriétés qui sont présentes quand les conditions contenues dans l'énoncé de la définition 1 sont satisfaites ont été données dans [12] et aussi en autres travaux. On y trouve, aussi, des exemples.

6. Nous considérons comme des cas importants dans (14) les deux inégalités extrêmes, c'est à dire les inegalités dans les quelles on a

(15) $$[u_1, u_2, \ldots, u_h, x_1, x_2, \ldots, x_{n+2-h}; f] > 0 \text{ ou bien } < 0.$$

On peut parler d'une convexité et d'un concavité par rapport à l'ensemble (3).

En ce qui concerne l'ensemble (2), on a parlé, plus haut, d'une convexité et d'une concavité par rapport à l'ensemble (2).

Si on remplace l'ensemble $\mathscr{P}_{n+1}$ avec les combinaisons linéaires d'un nombre $m \geq 2$ de fonctions qui forment un système de Tschebytschef sur un intervalle $[a, b]$ ou avec un ensemble interpolatoire de fonctions sur $[a, b]$ qui, en générale, n'est pas linéaire (voir [15]), alors on peut développer une théorie ayant comme point de départ la comparaison d'une fonction $f;[a, b] \to \mathbb{R}$ avec les éléments d'un tel ensemble. Il faut, aussi, voir [12].

En considérant les cas particuliers des propriétés dont nous venons de parler et qui impliquent toujours des procédés de comparaisons avec un ensemble précisé, alors, d'une manière naturelle, s'impose le problème de construire une théorie dont l'objet seront tous les cas particuliers remarqués. Une telle théorie doit, aussi, apporter des nouvelles propriétés.

Dans plusieurs travaux, comme, par exemple, dans [13], j'ai considéré une théorie d'allure ayant la définition qui suive.

Considérons les ensembles non-vides A et B et un ensemble

(16) $$\mathscr{T} \subset \{T | T : A \to B\},$$

aussi non-vide.

Soit donnée la partition

(17) $$B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \quad m \geq 3, \quad B_j \cap B_k = \varnothing \text{ pour } i \neq k.$$

DÉFINITION 2. *L'élément* $a \in A$ *a l'állure* (B_j, T) *si* $T(a) \in B_j$ *et il a l'allure* $(B_j, \mathscr{T})$ *si* $T(a) \in B_j$ *quel que soit* $T \in \mathscr{T}$. ■

On a démontré que les propriétés de convexité et de concavité d'ordre n donnés par les inégalités (1) sont des allures.

On démontre d'une manière semblable que les théorèmes qui suivent ont aussi lieu.

THÉORÈME 1. *Les propriétés de convexité et de concavité par rapport à l'ensemble (2) sont des allures.* ■

THÉORÈME 2. *Les propriétés de convexité et de concavité par rapport à l'ensemble (3) sont des allures.* ■

Dans la définition 2 intervient l'ensemble $\mathscr{T}$. Si on considère en dehors de l'ensemble (16) l'ensemble

(18) $$\mathscr{H} \subset \{T | T : A \to B\}, \quad \mathscr{H} \neq \varnothing,$$

alors on peut se rapporter à deux allures

(19) $$(B_j, \mathscr{T}) \text{ et } (B_j, \mathscr{H}).$$

On peut se poser la question de comparer les deux allures (19).

DÉFINITION 3. *On dit que l'allure* $(B_j, \mathscr{H})$ *précède l'allure* $(B_j, \mathscr{T})$ *si l'on a* $\mathscr{H} \subset T$. ■

Tenons compte, maintenant, des explications que nous avons données pour la convexité et la concavité par rapport à l'ensemble (2) et par rapport à l'ensemble (3). On peut donc énoncer les deux théorèmes qui suivent.

THÉORÈME 3. *Les allures de convexité (respectivement de concavité) par rapport à l'ensemble (2) précèdent les allures de convexité (respectivement de concavité) d'ordre n donnés par les inégalités (1).*

THÉORÈME 4. *Les allures de convexité (respectivement de concavité) par rapport à l'ensemble (3), donnés par les inégalités (15) précèdent les allures de convexité (respectivement de concavité) d'ordre n donnés par les inégalités (1).* ■

La comparaison de certaines allures présente un intérêt special. À l'aide de la relation donnée par la définition 3 concernant la comparaison de deux allures on peut construire des suites monotones d'allures et on peut se poser la question de développer une analyse des telles suites. On va étudier ce problème dans un autre travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. Gabriela Cristescu, *Extinderea noțiunilor de comportare și aproximare la unele domenii particulare ale cercetării*, Thèse de doctorat, Université Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 1998.
2. Eugenia Maria Iacob, *Convexitate, aproximare și optimizare pe rețele* Thèse de doctorat, Université Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 1998.
3. Ghiocel Moț, *Asupra unor implicații ale teoriei generale a convexității în geometrie*, Thèse de doctorat, Université Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 1998.
4. Tiberiu Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica, 8 (1934), 1–85.
5. Tiberiu Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.
6. Tiberiu Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica, 10 (1934), 59–64.
7. Tiberiu Popoviciu, *Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle*, Mathematica, 12 (1936), 5–12.
8. Tiberiu Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexe d'ordre supérieur*, Revue Math. De l'Union Interbalkanique, 2 (1939), 31–40.
9. Tiberiu Popoviciu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. De la Section Sc. Acad. Roumaine, 20 (1938), 45–49.
10. Tiberiu Popoviciu, *Despre cea mai bună aproximație a funcțiilor continue prin polinoame*, Ed. Ardealul, Cluj, 1937.
11. Tiberiu Popoviciu, *Sur une généralisation des fonctions spline*, Mathematical Structures, Computational Mathematical Modeling (Sofia) (1957), 405–410.
12. Elena Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică și legătura lor cu teoria interpolării*, Ed. Dacia, Cluj, 1972.
13. Elena Popoviciu, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, 11 (1982), 129–137.
14. Elena Popoviciu, *Sur certaines propriétés des fonctions quasi-convexes*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, 12 (1983), 175–186.
15. Elena Popoviciu (Moldovan), *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica 1 (24) (1959), 49–80.
16. Elena Popoviciu, *Despre unele momente semnificative în dezvoltarea teoriei convexității*, Seminarul Itinerant „Tiberiu Popoviciu" de Ecuații Funcționale, Aproximare și Convexitate, Cluj-Napoca, 1995, p. 89–92.

Reçu le 27 mai 1998.

Str. Roșiori, nr. 40
3400 Cluj-Napoca
România