REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 29, N° 1, 2000, pp. 49–56

# LA MÉTHODE DU LAGRANGIEN AUGMENTÉ POUR UN PROBLÈME D'INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE

CORNEL MARIUS MUREA

**Abstract.** In [3, p. 91] is presented a not-conditionally stable numerical method for solving a time-depend fluid structure interaction problem. This method consists in solving at each time step the mixed hybrid system (1) and to find out: $v$ the velocity of the fluid, $\nu$ the velocity of the structure, $p$ the pressure of the fluid and $\lambda$ the force on the fluid-structure interface.

In order to solve the system (1), we can use many algorithms just like: Uzawa's algorithm or the Augmented Lagrangien Method, but these algorithms don't permit to solve the fluid-structure problem in a decoupled way (via partitioned procedures), more exactly the fluid and structure problems are not solved separately. Consequently, we can't use the well established theories and software for the fluid and respectively for the structure.

Alternatively, we can use the iterative method presented in [4] in order to solve the fluid-structure linear system via partitioned procedures. Unfortunately, this method converges slowly.

Based on the method used in [4], we present in this paper an augmented algorithm, where the continuity of the fluid and structure velocities on the contact surface is penalized in order to improve the convergence rate. Numerically, the continuity of the fluid and structure velocities on the contact surface has the form $B_{21}v + B_{22}\nu = 0$.

The convergence of the method is proved in the third section.

## 1. INTRODUCTION

Soient $n_1$, $n_2$, $q$ et $m$ quatre nombres naturels non nuls. Sans risque de confusion, on utilise la même notation $(\cdot,\cdot)$ pour les produits scalaires euclidiens de $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^q$ et $\mathbb{R}^m$. Aussi, on fait la même convention pour la norme euclidienne $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$.

On note par $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $m$ lignes et $n$ colonnes sur $\mathbb{R}$.

Dans [3, p. 91] est présenté un schéma numérique inconditionnellement stable pour la résolution d'un problème évolutif tridimensionnel d'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique.

---

2000 AMS Classification: 65N12.

Ce schéma consiste à résoudre à chaque pas en temps un système linéaire du type suivant: trouver $v$ la vitesse du fluide, $\nu$ la vitesse de la structure, $p$ la pression du fluide et $\lambda$ la force de contact sur l'interface fluide-structure tel que

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} A_F & 0 & B_{11}^t & B_{21}^t \\ 0 & A_s & 0 & B_{22}^t \\ B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \nu \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

où

$$(2)\qquad \begin{cases} A_F \in M_{n_1}(\mathbb{R}) \text{ matrice symétrique, tel que} \\ \exists \alpha_F > 0,\ \forall w^1 \in \mathbb{R}^{n_1},\ (A_F w^1, w^1) \geqslant \alpha_F \left\| w^1 \right\|^2 \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} A_s \in M_{n_2}(\mathbb{R}) \text{ matrice symmétrique, tel que} \\ \exists \alpha_S > 0,\ \forall w^2 \in \mathbb{R}^{n_2},\ (A_S w^2, w^2) \geqslant \alpha_S \left\| w^2 \right\|^2 \end{cases}$$

$$B_{11} \in M_{q,n_1}(\mathbb{R}),\ B_{21} \in M_{m,n_1}(\mathbb{R}),\ B_{22} \in M_{m,n_2}(\mathbb{R}),$$
$$f_F \in \mathbb{R}^{n_1},\ f_S \in \mathbb{R}^{n_2}.$$

On note

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

et par la suite, nous travaillerons sous l'hypothèse suivante

$$(4)\qquad \operatorname{rang}(B) = q + m.$$

Sous les hypothèses (2), (3) et (4), le système (1) admet une solution unique.

*Remarque.* L'égalité $B_{11}v = 0$ représente la forme discrète de la condition d'incompressibilité du fluide et l'égalité $B_{21}v + B_{22}\nu = 0$ représente la forme discrète de la condition de couplage en vitesses, i.e. les vitesses du fluide et de la structure sont égales sur la surface de contact fluide-structure.

Pour la résolution du système linéaire de type mixte-hybride (1) on peut utiliser plusieurs algorithmes parmi lesquels nous citons: l'algorithme d'Uzawa (voir, par exemple, [1]) et la méthode du lagrangien augmenté (voir, par exemple, [2]). Mais, les algorithmes cités ci-dessus ne permettent pas la résolution découplée du problème fluide-structure, c'est à dire les problèmes du fluide et respectivement de la structure ne sont pas résolus séparément. On ne peut donc pas utiliser les théories et les codes numériques déjà existants pour chacun de ces deux problèmes.

On peut surmonter cet inconvénient en utilisant la méthode itérative présentée dans [4] pour la résolution découplée du problème fluide-structure. Malheureusement, cette méthode converge lentement.



À partir de cette méthode, dans la section suivante on construit un algorithme augmenté en pénalisant la contrainte de couplage en vitesses $B_{21}v + B_{22}\nu = 0$. D'une manière différente de celle de la méthode du lagrangien augmenté standard, nous ne pénalisons plus la contrainte $B_{11}v = 0$ qui peut être traiter efficacement pendant la résolution du problème du fluide.

## 2. PRÉSENTATION DE L'ALGORITHME AUGMENTÉ

**Pas 1 Initialisation**
Soient $\rho > 0,\ k = 0,\ r \geqslant 0,\ v_{-1} \in \mathbb{R}^{n_2},\ \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$

**Pas 2 Résolution du problème de la structure**
trouver $\nu_k \in \mathbb{R}^{n_2}$, tel que

$$(5)\qquad \left(A_S + rB_{22}^t B_{22}\right)\nu_k = f_S - B_{22}^t\lambda_k - rB_{22}^t B_{21} v_{k-1}$$

**Pas 3 Résolution du problème du fluide**
trouver $(v_k, p_k) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^q$, tel que

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} A_F + rB_{21}^t B_{21} & B_{11}^t \\ B_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_k \\ p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F - B_{21}^t\lambda_k - rB_{21}^t B_{22}\nu_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Pas 4 Réinitialisation**

$$(7)\qquad \begin{gathered} \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho\left(B_{21}v_k + B_{22}\nu_k\right) \\ k \leftarrow k+1 \text{ retour au pas 2} \end{gathered}$$

*Remarques.* C'est le paramètre $r$ qui fait la pénalisation de la contrainte $B_{21}v + B_{22}\nu = 0$. Pour $r = 0$ on obtient l'algorithme présenté dans [4].

Le système (6) peut être résolu d'une manière efficace par un algorithme d'Uzawa/gradient conjugué préconditionné.

Le critère pratique d'arrêt est $\|B_{21}v_k + B_{22}\nu_k\| \leqslant \epsilon$.

## 3. CONVERGENCE DE L'ALGORITHME AUGMENTÉ

On prouve maintenant un résultat de convergence de l'algorithme présenté ci-dessus.

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses (2), (3) et (4), pour tout $v_{-1} \in \mathbb{R}^{n_2}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ et $0 < \rho \leqslant r + \min\left\{\frac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \frac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2}\right\}$, l'algorithme (5)–(7) construit une suite $\{(v_k, \nu_k, p_k, \lambda_k)\}_{k\geqslant 0}$ convergeant vers la solution unique de (1).*

*Démonstration.* On va faire la preuve en trois étapes:
1) $\lim_{k\to\infty} (v_k) = v$ et $\lim_{k\to\infty} (\nu_k) = \nu$
2) $\lim_{k\to\infty} (\lambda_k) = \lambda$
3) $\lim_{k\to\infty} (p_k) = p$

1) Soient $(v,\nu,p,\lambda)$ la solution du système (1) et $\{(v_k,\ \nu_k,\ p_k,\ \lambda_k)\}_{k\geqslant 0}$ la suite donnée par l'algorithme (5)–(7).

On utilise les notations suivantes:

$$\bar{v}_k = v - v_k,\quad \bar{\nu}_k = \nu - \nu_k,\quad \bar{p}_k = p - p_k,\quad \bar{\lambda}_k = \lambda - \lambda_k .$$

D'après (1) on a $B_{21}v + B_{22}\nu = 0$ et en utilisant (7), on obtient

$$\bar{\lambda}_{k+1} = \bar{\lambda}_k + \rho\left(B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right).$$

On utilise maintenant l'égalité

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\,(a,b)$$

et on obtient

$$\left\|\bar{\lambda}_{k+1}\right\|^2 = \left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + \rho^2\left\|B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right\|^2 + 2\rho\left(\bar{\lambda}_k, B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right). \tag{8}$$

On a l'égalité suivante:

$$\left(\bar{\lambda}_k, B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right) = \left(B_{21}^t\bar{\lambda}_k, \bar{v}_k\right) + \left(B_{22}^t\bar{\lambda}_k, \bar{\nu}_k\right). \tag{9}$$

D'après (1) on a

$$A_S\nu + B_{22}^t\lambda = f_S \text{ et } B_{21}v + B_{22}\nu = 0,$$

ce qui donne

$$A_S\nu + rB_{22}^t\left(B_{21}v + B_{22}\nu\right) + B_{22}^t\lambda = f_S.$$

D'après (5) on a

$$A_S\nu_k + rB_{22}^t\left(B_{21}v_{k-1} + B_{22}\nu_k\right) + B_{22}^t\lambda_k = f_S.$$

En utilisant les deux dernières égalités, on obtient

$$B_{22}^t\bar{\lambda}_k = -A_S\bar{\nu}_k - rB_{22}^tB_{21}\bar{\lambda}_{k-1} - rB_{22}^tB_{22}\bar{\nu}_k \tag{10}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\left(B_{22}^t\bar{\lambda}_k, \bar{\nu}_k\right) = \\
&= -\left(A_S\bar{\nu}_k, \bar{\nu}_k\right) - r\left(B_{22}^tB_{21}\bar{v}_{k-1}, \bar{\nu}_k\right) - r\left(B_{22}^tB_{22}\bar{\nu}_k, \bar{\nu}_k\right) = \qquad (11)\\
&= -\left(A_S\bar{\nu}_k, \bar{\nu}_k\right) - r\left(B_{21}\bar{v}_{k-1}, B_{22}\bar{\nu}_k\right) - r\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{22}\bar{\nu}_k\right).
\end{aligned}$$

D'après (1) on a

$$A_Fv + B_{11}^tp + B_{21}^t\lambda = f_F \text{ et } B_{21}v + B_{22}\nu = 0$$



ce qui donne

$$A_Fv + B_{11}^tp + rB_{21}^t\left(B_{21}v + B_{22}\nu\right) + B_{21}^t\lambda = f_F.$$

D'après (6) on a

$$A_Fv_k + B_{11}^tp_k + rB_{21}^t\left(B_{21}v_k + B_{22}\nu_k\right) + B_{21}^t\lambda_k = f_F.$$

En utilisant les deux dernières égalités, on obtient

$$B_{21}^t\bar{\lambda}_k = -A_F\bar{v}_k - B_{11}^t\bar{p}_k - rB_{21}^tB_{21}\bar{v}_k - rB_{21}^tB_{22}\bar{\nu}_k \tag{12}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\left(B_{21}^t\bar{\lambda}_k, \bar{v}_k\right) = \\
&= -\left(A_F\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) - \left(B_{11}^t\bar{p}_k, \bar{v}_k\right) - r\left(B_{21}^tB_{21}\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) - r\left(B_{21}^tB_{22}\bar{\nu}_k, \bar{v}_k\right) = \\
&= -\left(A_F\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) - \left(\bar{p}_k, B_{11}\bar{v}_k\right) - r\left(B_{21}\bar{v}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) - r\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{21}\bar{v}_k\right).
\end{aligned}$$

Mais d'après (1) on a $B_{11}v = 0$ et d'après (6) on a $B_{11}v_k = 0$ . Donc, on obtient $B_{11}\bar{v}_k = 0$ ce qui implique

$$\left(B_{22}^t\bar{\lambda}_k, \bar{v}_k\right) = -\left(A_F\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) - r\left(B_{21}\bar{v}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) - r\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{21}\bar{v}_k\right). \tag{13}$$

D'après (8), (9), (11) et (13) on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 - \left\|\bar{\lambda}_{k+1}\right\|^2 = \\
&= 2\rho\left(A_S\bar{\nu}_k, \bar{\nu}_k\right) + 2r\rho\left(B_{21}\bar{v}_{k-1}, B_{22}\bar{\nu}_k\right) + 2r\rho\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{22}\bar{\nu}_k\right) \\
&\quad + 2\rho\left(A_F\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) + 2r\rho\left(B_{21}\bar{v}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) + 2r\rho\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) \\
&\quad - \rho^2\left\|B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right\|^2.
\end{aligned}$$

En utilisant dans l'égalité ci-dessus l'inégalité suivante

$$2\left(B_{21}\bar{v}_{k-1}, B_{22}\bar{\nu}_k\right) \geq -\left(B_{21}\bar{v}_{k-1}, B_{21}\bar{v}_{k-1}\right) - \left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{22}\bar{\nu}_k\right)$$

et le fait que $r\rho \geq 0$ on obtient l'inegalité

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 - \left\|\bar{\lambda}_{k+1}\right\|^2 \geq 2\rho\left(A_S\bar{\nu}_k, \bar{\nu}_k\right) - \\
&- r\rho\left(B_{21}\bar{v}_{k-1}, B_{21}\bar{v}_{k-1}\right) - r\rho\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{22}\bar{\nu}_k\right) + 2r\rho\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{22}\bar{\nu}_k\right) + \\
&+ 2\rho\left(A_F\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) + 2r\rho\left(B_{21}\bar{v}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) + 2r\rho\left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) \\
&- \rho^2\left\|B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right\|^2
\end{aligned}$$

ou écrite d'une manière équivalente

$$\left(\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right) - \left(\left\|\bar{\lambda}_{k+1}\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_k\right\|^2\right) \geq$$

$$\geq 2\rho \left(A_S\bar{\nu}_k, \bar{\nu}_k\right) + 2\rho \left(A_F\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) - \rho^2 \left\|B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right\|^2 +$$

$$+ r\rho \left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{22}\bar{\nu}_k\right) + r\rho \left(B_{21}\bar{v}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) + 2r\rho \left(B_{22}\bar{\nu}_k, B_{21}\bar{v}_k\right) =$$

$$= 2\rho \left(A_S\bar{\nu}_k, \bar{\nu}_k\right) + 2\rho \left(A_F\bar{v}_k, \bar{v}_k\right) + \rho \left(r - \rho\right) \left\|B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right\|^2 .$$

On utilise maintenant les hypothèses (2) et (3) dans la relation ci-dessus et on obtient

$$\left(\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right) - \left(\left\|\bar{\lambda}_{k+1}\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_k\right\|^2\right) \geq \tag{14}$$

$$\geq 2\rho\alpha_S \left\|\bar{\nu}_k\right\|^2 + 2\rho\alpha_F \left\|\bar{v}_k\right\|^2 + \rho \left(r - \rho\right) \left\|B_{21}\bar{v}_k + B_{22}\bar{\nu}_k\right\|^2 .$$

Dans la suite nous démontrons que la suite

$$\left\{\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right\}_{k\geq 0}$$

est décroissante pour $0 < \rho \leq r + \min\left\{\dfrac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \dfrac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2}\right\}$.

Si $0 < \rho \leq r$ alors on déduit de (14)

$$\left(\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right) - \left(\left\|\bar{\lambda}_{k+1}\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_k\right\|^2\right) \geq \tag{15}$$

$$\geq 2\rho\alpha_S \left\|\bar{\nu}_k\right\|^2 + 2\rho\alpha_F \left\|\bar{v}_k\right\|^2 ,$$

d'où on obtient le fait que la suite $\left\{\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right\}_{k\geq 0}$ est décroissante.

On a les inégalités

$$\left\|B_{21}\left(\bar{v}_k\right) + B_{22}\left(\bar{\nu}_k\right)\right\|^2 \leq \left(\left\|B_{21}\right\| \left\|\bar{v}_k\right\| + \left\|B_{22}\right\| \left\|\bar{\nu}_k\right\|\right)^2 \leq$$

$$\leq 2\left(\left\|B_{21}\right\|^2 \left\|\bar{v}_k\right\|^2 + \left\|B_{22}\right\|^2 \left\|\bar{\nu}_k\right\|^2\right).$$

Si $r < \rho$ alors

$$\rho \left(r - \rho\right) \left\|B_{21}\left(\bar{v}_k\right) + B_{22}\left(\bar{\nu}_k\right)\right\|^2 \leq 2\rho \left(r - \rho\right) \left(\left\|B_{21}\right\|^2 \left\|\bar{v}_k\right\|^2 + \left\|B_{22}\right\|^2 \left\|\bar{\nu}_k\right\|^2\right)$$

et en tenant compte de (14) on obtient

$$\left(\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right) - \left(\left\|\bar{\lambda}_{k+1}\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_k\right\|^2\right) \geq$$

$$\geq 2\rho \left(\alpha_S + \left(r - \rho\right) \left\|B_{22}\right\|^2\right) \left\|\bar{\nu}_k\right\|^2 + \tag{16}$$

$$+ 2\rho \left(\alpha_F + \left(r - \rho\right) \left\|B_{21}\right\|^2\right) \left\|\bar{v}_k\right\|^2 .$$



Si $r < \rho \leq r + \min\left\{\dfrac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \dfrac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2}\right\}$ alors en utilisant l'inégalité (16) on obtient que la suite $\left\{\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right\}_{k\geq 0}$ est décroissante.

Mais une suite décroissante avec les termes positifs est convergeante, d'òu

$$\lim_{k\to\infty} \left[\left(\left\|\lambda_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right) - \left(\left\|\lambda_{k+1}\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_k\right\|^2\right)\right] = 0.$$

En utilisant les relations (15) et (16) on obtient la conclusion de la première étape.

2) Intéressons nous maintenant à la convergence de $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$.

D'après la première étape, la suite $\left\{\left\|\bar{\lambda}_k\right\|^2 + r\rho \left\|B_{21}\bar{v}_{k-1}\right\|^2\right\}_{k\geq 0}$ converge pour $0 < \rho \leq r + \min\left\{\dfrac{\alpha_F}{\|B_{21}\|^2}, \dfrac{\alpha_S}{\|B_{22}\|^2}\right\}$, donc $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$ est bornée et, en conséquence, il existe au moins une sous-suite $\{\lambda_{k_s}\}_{s\geq 0}$ convergente vers un point d'accumulation $\lambda^*$.

En passant à la limite dans l'égalité (10) et en tenant compte de la première étape, on obtient

$$B_{22}^t \left(\lambda^* - \lambda\right) = 0.$$

Mais sous l'hypothèse (4) on a $\text{rang}(B_{22}) = m$, donc les colonnes de $B_{22}^t$ sont linéairement indépendantes, ce qui implique $\lambda^* = \lambda$, c'est à dire $\{\lambda_k\}_{k\geq 0}$ a un unique point d'accumulation.

Pour finir la deuxième étape, on utilise le résultat suivant: dans un espace de dimension finie, une suite bornée avec un unique point d'accumulation est convergente.

3) Intéressons nous maintenant à la convergence de la suite $\{p_k\}_{k\geq 0}$.

D'après (6) on a

$$A_F v_k + B_{11}^t p_k + r B_{21}^t \left(B_{21} v_k + B_{22}\nu_k\right) + B_{21}^t \lambda_k = f_F .$$

D'après les deux premières étapes, on obtient que $B_{11}^t p_k$ est bornée. Sous l'hypothèse (4) on a $\text{rang}(B_{11}) = q$ et on déduit que $\{p_k\}_{k\geq 0}$ est bornée. Soit $p^*$ un point d'accumulation de cette suite. En passant à la limite dans l'égalité (12), on obtient

$$B_{22}^t \left(p^* - p\right) = 0.$$

Puisque $\text{rang}(B_{11}) = q$ , alors $p^* = p$. Selon le même type de raisonnement que celui utilisé dans la deuxième étape, on obtient la convergence de $\{p_k\}_{k\geq 0}$ vers $p$.

□

*Remerciements.* Je remercie Professeur Yvon Maday pour ses nombreux conseils et pour sa hospitalité pendant mes stages aux Laboratoire ASCI, CNRS UPR 9029, Orsay.

## REFERENCES

[1] CIARLET, P. G., *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris, 1988.

[2] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R., *Méthodes des Lagrangien Augmenté: Application à la Résolution Numérique de Problèmes aux Limites*, Dunod, Paris, 1982.

[3] MUREA, C. M., *Modélisation mathématique et numérique d'un problème tridimensionnel d'interaction entre un fluide incompressible et une structure élastique*, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 1995.

[4] MUREA, C. M., *Sur la convergence d'un algorithme pour la résolution découplée d'un système de type Kuhn-Tucker*, An. Univ. Bucureşti Mat., **46**, no. 1, pp. 35–40, 1997.

Reçu 7 septembre, 1998

*Université de Bucarest,*
*Faculté de Mathématique,*
*14, str. Academiei, 70109 Bucarest, Roumanie,*
*tél/fax: +40-1-312.11.63*
*E-mail:* `murea@pro.math.unibuc.ro`
*Internet:* `http://pro.math.unibuc.ro/~murea`