REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Tome 29, N° 1, 2000, pp. 75–82

CONVEXITÉ AU SENS DIRECT OU INVERSE ET APPLICATIONS DANS L'OPTIMISATION VECTORIELLE

NICOLAE POPOVICI

Résumé. Le but de cet article est d'étudier les problèmes d'optimisation vectorielle ayant des fonctions objectifs convexes au sens direct ou inverse. Il s'agit notamment de donner des conditions suffisantes pour que l'image d'un ensemble cône-convexe, propriété qui joue un rôle important dans la plupart des méthodes de scalarisation utilisées dans l'optimisation vectorielle.

1. INTRODUCTION

La cône-convexité de l'image des objectifs joue un rôle important dans la plupart des méthodes de scalarisation dans l'optimisation vectorielle. Il est bien connu que cette propriété est satisfaite dans le cas des objectifs cône-convexes, mais elle n'est plus valable dans le cas des objectifs cône-quasiconvexes quelconques. Nous nous proposons ici d'identifier, dans un cadre abstraite, une classe des fonctions quasiconvexes, qui ont certaines propriétés, qui les rassemblent à des fonctions quasiconvexes, qui ont certaines propriétés qui les rassemblent à des fonctions cône-convexes lorsqu'on reprend le cadre vectoriel.

Considérons deux ensembles E_1 et E_2 non vides, $\Gamma_1 : E_1 \times E_1 \rightrightarrows E_1$ et $\Gamma_2 : E_2 \times E_2 \rightrightarrows E_2$ deux applications multivoques et $\Omega \subset E_2 \times E_2$ une relation binaire. Nous adopterons la convention que $\Omega : E_2 \rightrightarrows E_2$, $\Omega y = \{y' \in E_2 | \, (y, y') \in \Omega\}$, $\forall y \in E_2$.

De plus, nous utiliserons les notations suivantes:

$$\Omega^{-} y = \left\{y' \in E_2 \mid y \in \Omega y'\right\}, \ \Omega^{c} y = E_2 \backslash \left(\Omega y\right), \ \forall y \in E_2.$$

Si Y est un partie non vide de E_2, alors

$$\Omega Y = \cup \left\{\Omega y \mid y \in Y\right\}, [\Omega]\, Y = \cap \left\{\Omega y \mid y \in Y\right\},$$
$$[\Omega^{-}]\, Y = \cap \left\{\Omega^{-} y \mid y \in Y\right\}.$$

1991 Subject Classification: 90C29.

Rappelons [1] que l'ensemble polaire de Y par rapport à Ω est définie par

$$\mathrm{cl}_{\Omega}\text{-}Y = [\Omega]\,[\Omega^{-}]\,Y.$$

Les notions suivantes ont été introduites par nous dans [5]:

DÉFINITION 1.1. *Une partie X de E_1 est dite Γ_1-convexe, si*

$$\Gamma_1\left(x^1, x^2\right) \subset X,\ \forall x^1, x^2 \in X.$$

DÉFINITION 1.2. *Soit X une partie non vide et Γ_1-convexe de E_1. Une fonction $f : X \to E_2$ est dite (Γ_1, Ω)-quasiconvexe sur X si*

$$f\left(\Gamma_1\left(x^1, x^2\right)\right) \subset \mathrm{cl}_{\Omega}\text{-}\left\{f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right\},\ \forall x^1, x^2 \in X.$$

Il est aisé de vérifier [6] que les fonctions (Γ_1, Ω) - quasiconvexes peuvent être caractérisées en termes d'ensembles de niveau, comme suit:

PROPOSITION 1.1. *Soit X un sous-ensemble Γ-convexe non vide de E_1 et soit $f : X \to E_2$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*
i) *f est (Γ_1, Ω)-quasiconvexe sur X;*
ii) *$L_f(y) = \{x \in X : f(x) \in \Omega y\}$ est Γ_1-convexe, $\forall y \in E_2$.*

Ce résultat montre que la (Γ_1, Ω)-quasiconvexité est une généralisation naturelle de la quasiconvexité classique des fonctions à valeurs réelles. Si E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels, C est un cône convexe dans E_2 et

$$(1)\quad \begin{aligned} \Gamma_1\left(x^1, x^2\right) &= \mathrm{conv}\left\{x^1, x^2\right\},\ \forall x^1, x^2 \in E_1 \\ \Gamma_2\left(y^1, y^2\right) &= \mathrm{conv}\left\{y^1, y^2\right\},\ \forall y^1, y^2 \in E_2 \\ \Omega y &= y - C,\ \forall y \in E_2, \end{aligned}$$

alors la notion de (Γ_1, Ω)-quasiconvexité coïncide avec la notion de C- quasiconvexité au sens de Dinh The Luc. Rappelons [3] qu'une fonction vectorielle $f : X \to E_2$ définie sur une partie non vide et convexe de E_2 est dite:
i) C-quasiconvexe sur X, si

$$f\left((1-t)\,x^1 + tx^2\right) \in y - C, \forall y \in \left[f\left(x^1\right) + C\right] \cap \left[f\left(x^2\right) + C\right],\ \forall x^1,\ x^2 \in X,\ \forall t \in [0,1];$$

ii) C-convexe sur X, si

$$f\left((1-t)\,x^1 + tx^2\right) \in (1-t)\,f\left(x^1\right) + tf\left(x^2\right) - C,\ \forall x^1, x^2 \in X,\ \forall t \in [0,1].$$

En particulier, si $E_2 = \mathbb{R}^n$ et $C = \mathbb{R}^n_+$ alors une fonction $f = (f_1, ..., f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n_+$-(quasi)convexe si et seulement si les fonctions $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ sont (quasi)convexes au sens classique.

2. CONVEXITÉ AU SENS DIRECT OU INVERSE

Notons que l'application multivoque Γ_2 n'intervient pas dans la Définition 1.2, ce qui montre que la notion de quasiconvexité est indépendante de la structure de convexité de E_2 et qu'elle est plutôt liée à la relation binaire Ω, qui remplace l'ordre induit par un cône lorsque la structure est vectorielle. En utilisant essentiellement la structure de convexité induite par Γ_2, nous avons proposé dans [5] les notions de convexité généralisée suivantes:

DÉFINITION 2.1. *Soit X un sous-ensemble non vide et Γ_1-convexe de E_1. Nous dirons d'une fonction $f : X \to E_2$ qu'elle est:*
i) *$(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens direct sur X, si*

$$(2)\quad f\left(\Gamma_1\left(x^1, x^2\right)\right) \subset \Omega\Gamma_2\left(f\left(x^1\right),\ f\left(x^2\right)\right),\ \forall x^1, x^2 \in X;$$

ii) *$(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens inverse sur X, si*

$$(3)\quad \Gamma_2\left(f\left(x^1\right),\ f\left(x^2\right)\right) \subset \Omega^{-} f\left(\Gamma_1\left(x^1, x^2\right)\right),\ \forall x^1, x^2 \in X.$$

THÉORÈME 2.1. *Soit X un sous-ensemble non vide et Γ_1-convexe de E_1 et soit $f : X \to E_2$ une fonction $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens direct sur X. Si la relation Ω est transitive et de plus, Ωy est Γ_2-convexe quel que soit $y \in E_2$, alors la fonction f est (Γ_1, Ω)-quasiconvexe sur X.*

Démonstration. Soient $x^1, x^2 \in X$ et $y \in E_2$ tels que $f\left(x^1\right), f\left(x^2\right) \in \Omega y$. Puisque Ωy est un ensemble Γ_2-convexe, on a $\Gamma_2\left(f\left(x^1\right),\ f\left(x^2\right)\right) \subset \Omega y$, d'où on tire $\Omega\Gamma_2\left(f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right) \subset \Omega\left(\Omega y\right)$. La relation Ω étant transitive, on a $\Omega\left(\Omega y\right) \subset \left(\Omega y\right)$ et donc $\Omega\Gamma_2\left(f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right) \subset \Omega y$. Il en résulte que

$$\Omega\Gamma_2\left(f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right) \subset \mathrm{cl}_{\Omega}\text{-}\left\{f\left(x^1\right),\ f\left(x^2\right)\right\}.$$

Ensuite, puisque f est une fonction $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens direct sur X, on a

$$f\left(\Gamma_1\left(x^1, x^2\right)\right) \subset \Omega\Gamma_2\left(f\left(x^1\right),\ f\left(x^2\right)\right)$$

ce qui montre que f est (Γ_1, Ω)-quasiconvexe sur X. □

Remarques 2.1. Considérons le cas particulier dans lequel E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels, C est un cône convexe dans E_2 et Γ_1, Γ_2 et Ω sont définies par (1).

1. Il est aisé de voir que toute fonction C-convexe sur une partie convexe X de E_1 est à la fois $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens direct et au sens inverse sur X.
2. En vertu du Théorème 2.1 il résulte que toute fonction $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens direct sur X est une fonction C-quasiconvexe sur X.
3. En prenant $E_2 = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}_+$ nous retrouvons le cas des fonctions scalaires.

a) Dans ce cas, une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens direct si et seulement si elle est quasiconvexe sur X au sens classique.

En effet, dans ce cas on a $\Omega\Gamma_2 (f(x^1), f(x^2)) =]-\infty, \max\{f(x^1), f(x^2)\}]$ et donc la condition (2) est équivalente à

$$f(tx^1 + (1-t)x^2) \le \max\{f(x^1), f(x^2)\}, \ \forall x^1, x^2 \in X, \ \forall t \in [0,1].$$

b) Il est aisé de voir que la condition (3) est satisfaite par n'importe quelle fonction $f : X \to \mathbb{R}$. En effet, en supposant le contraire, il existe $x^1, x^2 \in X$ et $t \in [0,1]$ tels que

$$tf(x^1) + (1-t) f(x^2) < f(sx^1 + (1-s)x^2), \forall s \in [0,1].$$

En particulier, pour $s \in \{0,1\}$, ceci entraîne

$$tf(x^1) + (1-t) f(x^2) < \min\{f(x^1), f(x^2)\}, \ \forall t \in [0,1].$$

On aboutit à une absurdité.

Par conséquent, toutes les fonctions à valeurs réelles sont $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexes au sens inverse.

Les exemples suivants montrent que les conclusions de la Remarque 2.1,3 ne sont valables que pour des fonctions scalaires; plus précisément, il existe des fonctions vectorielles cône-quasiconvexes qui ne sont $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexes ni au sens direct ni au sens inverse.

Exemple 2.1. Soient $E_1 = \mathbb{R}$, $E_2 = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$ et Γ_1, Γ_2, Ω définies par (1). Considérons la fonction $f = (f_1, f_2) : X = [0,1] \to \mathbb{R}^2$, où f_1 et f_2 sont définies par

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in [0,1/4] \\ 4x-2 & \text{si} \quad x \in]1/4, 3/4[\\ 1 & \text{si} \quad x \in [3/4, 1] \end{cases}$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} 1-4x & \text{si} \quad x \in [0,1/4] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]1/4, 3/4[\\ 3-4x & \text{si} \quad x \in [3/4, 1] \end{cases}$$

Il est aisé de voir que les fonctions f_1 et f_2 sont quasiconvexes et donc f est cône-quasiconvexe au sens de Dinh The Luc, c'est à dire f est (Γ_1, Ω)-quasiconvexe sur X.

D'autre part, pour $x^1 = 0$ et $x^2 = 1$ on a

$$\begin{aligned} f(\Gamma_1(x^1, x^2)) &= f([0,1]) = \\ &= (\{-1\} \times [0,1]) \cup ([-1,1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [-1,0]) \end{aligned}$$

et

$$\Gamma_2(f(x^1), f(x^2)) = \mathrm{conv}\{f(0), f(1)\} = \{(t, -t) \mid t \in [-1,1]\}$$

ce qui montre qu'aucune des conditions (2) et (3) n'est satisfaite.

Par conséquent, la fonction f n'est $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe ni au sens direct ni au sens inverse.

Dans ce qui suit nous allons voir que les fonctions cône-quasiconvexe qui sont aussi convexes au sens directe et inverse ont certaines propriétés qui les rassemblent à des fonctions cône-convexe.

3. APPLICATIONS DANS L'OPTIMISATION VECTORIELLE

Rappelons que si E_2 est un espace vectoriel ordonné par un cône convexe C, alors une partie Y de E_2 s'appelle C-convexe si $Y + C$ est un ensemble convexe. On sait que si $f : X \to E_2$ est une fonction C-convexe sur une partie non vide et convexe d'un espace vectoriel E_1, alors l'image $f(X)$ est un ensemble C-convexe. Dans ce qui suit nous allons montrer que les fonctions $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexes au sens inverse ont unee propriété analogue.

Considérons de nouveaux deux ensembles non vides E_1 et E_2, $\Gamma_1 : E_1 \times E_1 \rightrightarrows E_1$ et $\Gamma_2 : E_2 \times E_2 \rightrightarrows E_2$ deux applications multivoques et $\Omega \subset E_2 \times E_2$ une relation binaire.

DÉFINITION 3.1. *Une partie non vide Y de E_2 s'appellera (Γ_2, Ω)-convexe. si*

$$\Gamma_2(y^1, y^2) \subset \Omega^- Y, \ \forall y^1, y^2 \in Y.$$

THÉORÈME 3.1. *Soit X un sous-ensemble non vide et Γ_1-convexe de E_1. Si $f : X \to E_2$ est une fonction $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens inverse sur X, alors $f(X)$ est un ensemble (Γ_2, Ω)-convexe.*

Démonstration. Soient $y^1, y^2 \in f(X)$. Si $x^1, x^2 \in X$ sont tels que $y^1 = f(x^1)$ et $y^2 = f(x^2)$ alors $\Gamma_1(x^1, x^2) \subset X$, car X est Γ_1-convexe, et donc

$$\Omega^- f(\Gamma_1(x^1, x^2)) \subset \Omega^- f(X).$$

D'autre part, f étant $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens inverse sur X, on a

$$\Gamma_2(f(x^1), f(x^2)) \subset \Omega^- f(\Gamma_1(x^1, x^2))$$

et donc $\Gamma_2(y^1, y^2) \subset \Omega^- f(X)$. □

Dans le cas particulier des fonctions vectorielles, on obtient le résultat suivant:

COROLLAIRE 3.1. *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels, C un cône convexe de E_2 et soient Γ_1, Γ_2 et Ω définies par (1). Si $f : X \to E_2$ est une fonction $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens inverse sur une partie X non vide et convexe de E_1, alors $f(X)$ est un ensemble C-convexe, c'est à dire $f(X) + C$ est convexe.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.1 il suffit de montrer qu'une partie non vide Y de E_2 est C-convexe si et seulement si elle est (Γ_2, Ω)-convexe. Or, cette équivalence est immédiate, compte tenu de (1). □

Remarques 3.1. **1.** Le corollaire ci-dessus contient, en particulier, le cas des fonctions vectorielles C-convexes (vu la Remarque 2.1,1).

2. Considérons la fonction $f : X = [0,1] \to \mathbb{R}^2$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x, 1-x) & \text{si} \quad x \in]0,1] \setminus \{1,2\} \\ (1/2, 1/2) & \text{si} \quad x = 0 \\ (0,1) & \text{si} \quad x = 1/2 \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sens inverse sur X, car pour $x^1 = 1/4$ et $x^2 = 1/2$ on a

$$\begin{aligned} \Omega^- f\left(\Gamma_1\left(x^1, x^2\right)\right) &= f([1/4, 1/2]) + \mathbb{R}^2_+ = \\ &= \{(t, 1-t) \mid t \in \{0\} \cup [1/4, 1/2[\} + \mathbb{R}^2_+ \end{aligned}$$

et donc

$$(1/8, 7/8) = \frac{1}{2}\left[f\left(x^1\right) + f\left(x^2\right)\right] \in \Gamma_2\left(f\left(x^1\right), f\left(x^2\right)\right) \setminus \Omega^- f\left(\Gamma_1\left(x^1, x^2\right)\right).$$

D'autre part, il est aisé de voir que $f(X)$ est $\mathbb{R}^2_+$ -convexe, ce qui montre que la réciproque du Corollaire 3.1 n'est pas vraie.

Tournons maintenant notre attention vers l'optimisation vectorielle. Dans ce qui suit E_1 sera un espace vectoriel, $E_2 = \mathbb{R}^n$ $(n \in N,\ n \geq 2)$ et $C = \mathbb{R}^n_+$. De même, les applications multivoques Γ_1 et Γ_2 et la relation binaire Ω seront définies par (1).

Rappelons que pour tout sous-ensemble non vide Y de $\mathbb{R}^n$, les ensembles des points efficients et faiblement-efficients de Y sont définies par

$$\begin{aligned} \mathrm{Min} Y &= \left\{y^0 \in Y \mid Y \cap y^0 - \mathbb{R}^n_+ = \left\{y^0\right\}\right\} \\ \mathrm{WMin} Y &= \left\{y^0 \in Y \mid Y \cap y^0 - \mathrm{Int}\left(\mathbb{R}^n_+\right) = \varnothing\right\}. \end{aligned}$$

Si $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle définie sur un sous-ensemble non vide X de E_1, alors les ensembles des solutions efficientes et faiblement-efficientes du problème d'optimisation vectorielle

$$(\mathcal{P}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} f_1(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{array}\right\} \to \min. \\ x \in X \end{array} \right.$$

sont définies par

$$\begin{aligned} \mathrm{Min}(X \mid f) &= \left\{x^0 \in X \mid f\left(x^0\right) \in \mathrm{Min} f(X)\right\} \\ \mathrm{WMin}(X \mid f) &= \left\{x^0 \in X \mid f\left(x^0\right) \in \mathrm{WMin} f(X)\right\}. \end{aligned}$$

L'étude de la cône-convexité de l'image $f(X)$ de l'objectif du problème $(\mathcal{P})$ est motivée par le résultat suivant, qui est déjà classique dans l'optimisation vectorielle [8]. Désignons par S_n le simplexe standard de l'espace $\mathbb{R}^n$:

$$S_n = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$$

et par $S^0_n = S_n \cap \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n_+)$ son intérieur relatif.

LEMME 3.1. *Si Y est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, alors*

$$\bigcup_{\lambda \in S^0_n} \mathrm{Argmin}\{<\lambda, y> \mid y \in Y\} \subset \mathrm{Min} Y,$$

$$\bigcup_{\lambda \in S_n} \mathrm{Arg\,min}\{<\lambda, y> \mid y \in Y\} \subset \mathrm{WMin} Y.$$

Si de plus Y est $\mathbb{R}^n_+$-convexe, alors

$$\mathrm{WMin} Y = \bigcup_{\lambda \in S_n} \mathrm{Arg\,min}\{<\lambda, y> \mid y \in Y\}.$$

Le théorème suivant donne une caractérisation de l'ensemble des solutions faiblement-efficientes pour des problèmes d'optimisation vectorielle ayant la fonction objectif convexe au sens inverse.

THÉORÈME 3.2. *Si $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ est une fonction $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$-convexe au sense inverse sur une partie X non vide et convexe de E_1, alors l'ensemble des solutions faiblement-efficientes du problème d'optimisation vectorielle (P) admet la représentation:*

$$\mathrm{WMin}(X \mid f) = \bigcup_{\lambda \in S_n} \mathrm{Arg\,min}\{<\lambda, f(x)> \mid x \in X\}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Lemme 3.1 et du Corollaire 3.1. □

L'importance pratique du théorème ci-dessus est motivée par le fait qu'il permet d'utiliser la méthode classique de scalarisation d'un problème d'optimisation multicritère convexe par des coefficients d'importance dans le cadre plus général des problèmes ayant des fonctions objectif convexes au sens inverse.

Notons que la classe des fonctions vectorielles convexes au sens inverse est assez riche, car elle contient en particulier toutes les fonctions composées d'une fonction convexe avec une fonction ratio-affine au sens de Rothblum [7]:

DÉFINITION 3.2. *Soit X un sous-ensemble non vide et convexe de l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$. Une fonction $\rho : X \to \mathbb{R}^k$ est dite ratio-affine s'il existe une fonction vectorielle affine $H = (h_1, \ldots, h_k) : X \to \mathbb{R}^k$ et une fonction affine* *à valeurs réelles* $h : X \to \mathbb{R}^k$ *et une fonction affine à valeurs réelles* $h : X \to]0, \infty[$ *telles que*

$$\rho(x) = (h_1(x)/h(x), ..., h_k(x)/h(x)), \ \forall x \in X.$$

PROPOSITION 3.1. *Soit* $\rho : X \to \mathbb{R}^k$ *une fonction ratio-affine définie sur l'ensemble non vide et convexe* $X \subset \mathbb{R}^n$ *et soit* $g : Y \to \mathbb{R}^n$ *une fonction* $\mathbb{R}^n_+$*-convexe, définie sur un ensemble convexe* $Y \subset \mathbb{R}^k$ *tel que* $\rho(X) \subset Y$. *Si* Γ_1, Γ_2 *et* Ω *sont définies par (1) (où* $E_1 = \mathbb{R}^m$, $E_2 = \mathbb{R}^n$ *et* $C = \mathbb{R}^n_+$*) alors la fonction composée* $f = g \circ \rho : X \to \mathbb{R}^n$ *est à la fois* $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Omega)$*-convexe au sens direct et au sens inverse sur* X.

Démonstration. En tenant compte du fait que les fonctions ratio-affines transforment les segments en segments [7], c'est à dire

$$\rho\left(\operatorname{conv}\left\{x^1, x^2\right\}\right) = \operatorname{conv}\left(\left\{\rho\left(x^1\right), \rho\left(x^2\right)\right\}\right), \ \forall x^1, x^2 \in X,$$

il est aisé de voir que, sous les hypothèses de la proposition, les deux conditions (2) et (3) sont satisfaites, d'où la conclusion. □

Pour conclure, notons que les fonctions vectorielles convexes à la fois au sens direct et au sens inverse sont des fonctions quasiconvexes qui ne sont pas forcément convexes, ni strictement quasiconvexes, mais qui possèdent des propriétés supplémentaires utiles dans l'optimisation vectorielle, notamment pour l'étude de la structure topologique des ensembles d'efficience [2] et pour certaines méthodes de scalarisation des problèmes d'optimization multicritère [4].

REFERENCES

[1] DOLECKI, S., MALIVERT, C., *Stability of Efficient Sets: Continuity of Mobile Polarities,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl, **12**, no. 12, pp. 1461–1486, 1988.

[2] LUC, D. T., *Theory of vector optimization,* Lecture Notes in Econ. and Math. Systems, vol. **319**, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[3] LUC, D. T., *On Three Concepts of Quasiconvexity in Vector Optimization,* Acta Mathematica Vietnamica, **15**, no. 1, pp. 3–9, 1990.

[4] PODINOWSKI, V. V., NOGIN, V. D., *Solutions Pareto-optimales des problèmes multicritères* (en russe), Nauka, Moscou, 1982.

[5] POPOVICI, N., *Contribution à l'optimisation vectorielle,* Thèse de doctorat, Université de Limoges, 1995.

[6] POPOVICI, N., *Sur une notion abstraite de quasi-convexité,* Rev. d'Anal. Numér. et de Théorie de l'Approx., **26**, no. 1–2, pp. 191–196, 1997.

[7] ROTHBLUM, U. G., *Ratios of affine functions,* Mathematical Programming, **32**, pp. 357–365, 1985.

[8] YU, P. L., *Multiple criteria decision making: concepts, techniques and extensions,* Plenum Press, New York and London, 1985.

Reçu 15 Février 1999