REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION

Tome 29, N° 2, 2000, pp. 201–206

ZUR INTERPOLATION GESTREUTER DATEN

EGON SCHEFFOLD

Abstract. In dieser Note wird gezeigt, daß man gestreute beziehungsweise reguläre Daten ohne Hinzunahme willkürlicher Daten mit ein und derselben Methode interpolieren kann. Die interpolierende Funktion s kann in einem gewissen Funktionenraum als Spline-Funktion betrachtet werden, für welche der Ausdruck

$$\left(\int_I\int\left(\frac{\partial^4}{(\partial x)^2(\partial y)^2}s(x,y)\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}$$

minimal wird. Obwohl die Spline-Funktionen Tensorprodukte von Funktionen einer Variablen sind, handelt es sich dabei nicht um die Tensorprodukt-Methode.

1. INTERPOLATION GESTREUTER DATEN

Gegeben seien n Punkte (x_i, y_i) im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und n reelle Zahlen $z_i (1 \leq i \leq n)$. Es geht nun darum, durch die n Punkte (x_i, y_i, z_i) im $\mathbb{R}^3$ eine hinreichend glatte Fläche zu legen, d.h. eine möglichst einfache differenziebare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu finden, so daß gilt: $f(x_i, y_i) = z_i$, für $1 \leq i \leq n$.

Als theoretischer Hintergrund für dieses Problem genügt die folgende, aus der Hilbertraum-Theorie bekannte Tatsache:

Satz 1. *Es sei H ein reeller Hilbertraum und V die lineare Hülle der n linear unabhängigen Vektoren $u_1, u_2, \ldots, u_n \in H$. Dann gilt:*

(i) *Zu jedem n-Tupel $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau dann ein $u \in V$ mit $(u, u_i) = z_i$ für $1 \leq i \leq n$.*

(ii) *Für $v \in H$ mit $v \neq u$ und $(v, u_i) = z_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt*

$$v - u \in V^{\perp}, \ \|u\| < \|v\| \quad \text{und} \quad \|v - u\| < \|v\|.$$

Wir wählen nun im $\mathbb{R}^2$ ein Rechteck $I := [a, b] \times [c, d]$ so, daß die n Punkte (x_i, y_i) in Inneren von I liegen. Im Beispiel ([2], 5.) sind die Funktionen

1991 AMS subject classification: 41A15.

aus dem Funktionenraum $K^{(2,2)}(\Omega)$ durch 9 Koordinaten darstellbar. Zur Vereinfachung setzen wir nun die ersten 8 Koordinaten gleich 0 und erhalten für das Rechteck I den entsprechenden Funktionenraum $K_0^{(2,2)}(I)$, bestehend aus den Funktionen f mit der Darstellung

$$f(x,y) = \int_a^x \int_c^y (x-s)(y-t)\tilde{f}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

für alle $(x,y) \in I$, wobei $\tilde{f}$ ein Element des reellen Hilbertraumes $L^2(I)$ ist. Da nach ([2], 1.5) eine eindeutige Beziehung zwischen f und $\tilde{f}$ besteht, nennen wir $\tilde{f}$ die (Hilbertraum-) Koordinate von f. Die Funktionen aus $K_0^{(2,2)}(I)$ sind stetig differenzierbar (vgl. [2], 1.3).

Für festes $(x,y) \in I$ sei auf I die Funktion $\tilde{\varepsilon}_{(x,y)}$ definiert durch

$$\tilde{\varepsilon}_{(x,y)}(s,t) := (x-s)_+ \cdot (y-t)_+,$$

wobei wie üblich $(x-s)_+$ bedeutet:

$$(x-s)_+ = \begin{cases} (x-s) & \text{für} \quad s \le x \\ 0 & \text{für} \quad s > x. \end{cases}$$

Eine Funktion $f \in K_0^{(2,2)}(I)$ läßt sich dann mit Hilfe des inneren Produkts $(\cdot,\cdot)$ auf $L^2(I)$, der Funktionen $\tilde{\varepsilon}_{(x,y)} \in L^2(I)$ und ihrer Koordinate $\tilde{f} \in L^2(I)$ kurz so darstellen:

$$f(x,y) = \left(\tilde{\varepsilon}_{(x,y)}, \tilde{f}\right)$$

für alle $(x,y) \in I$.

Zu jedem Punkt $(x,y) \in I$ definieren wir nun eine Knotenfunktion $k_{(x,y)} \in K_0^{(2,2)}(I)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} k_{(x,y)}(s,t) &:= \left(\tilde{\varepsilon}_{(s,t)}, \tilde{\varepsilon}_{(x,y)}\right) \\ &= \int_a^b \int_c^d (x-\tau_1)_+(y-\tau_2)_+(s-\tau_1)_+(t-\tau_2)_+ \mathrm{d}\tau_1 \mathrm{d}\tau_2 \\ &= \left(\int_a^b (x-\tau_1)_+(s-\tau_1)_+ \mathrm{d}\tau_1\right)\left(\int_c^d (y-\tau_2)_+(t-\tau_2)_+ \mathrm{d}\tau_2\right). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$k_x(s) := \int_a^b (x-\tau_1)_+(s-\tau_1)_+ \mathrm{d}\tau_1 \quad \text{und}$$

$$k_y(t) := \int_c^d (y-\tau_2)_+(t-\tau_2)_+ \mathrm{d}\tau_2.$$

Die Auswertung der beiden Integrale ergibt:

$$k_{(x,y)}(s,t) = k_x(s) \cdot k_y(t)$$

mit

$$k_x(s) = \begin{cases} \dfrac{(x-s)^3}{6} - \dfrac{(x-a)^3}{6} + (s-a)\dfrac{(x-a)^2}{2} & \text{für} \quad s \le x \\ -\dfrac{(x-a)^3}{6} + (s-a)\dfrac{(x-a)^2}{2} & \text{für} \quad s > x \end{cases}$$

und

$$k_y(t) = \begin{cases} \dfrac{(y-t)^3}{6} - \dfrac{(y-c)^3}{6} + (t-c)\dfrac{(y-c)^2}{2} & \text{für} \quad t \le y \\ -\dfrac{(y-c)^3}{6} + (t-c)\dfrac{(y-c)^2}{2} & \text{für} \quad t > y \end{cases}$$

Unter einer Spline-Funktion verstehen wir nun eine Linearkombination von Knotenfunktionen. Knotenfunktionen zu inneren Punkten von I sind linear unabhängig, wie aus dem Beweis des nächsten Satzes hervorgeht.

Satz 2. *Sei $P = \{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$ ein Knotensatz im Innern des Rechtecks I, bestehend aus n verschiedenen Knoten. Ferner seien n reelle Zahlen $z_i (1 \le i \le n)$ vorgegeben. Dann existiert genau eine Linearkombination $f := \sum_{i=1}^n \alpha_i k_{(x_i,y_i)}$ der n Knotenfunktionen $k_{(x_i,y_i)}$ mit $f(x_i,y_i) = z_i$ für $1 \le i \le n$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß im Hilbertraum $L^2(I)$ die Koordinatenfunktionen $\tilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}$ linear unabhängig sind.

In $L^2(I)$ sei nun $\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)} = 0$ mit $\beta_i \in \mathbb{R}$ für $1 \le i \le n$. Da $\sum_{i=1}^n \beta_i \tilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}$ eine stetige Funktion auf I ist, folgt

$$\sum_{i=1}^n \beta_i (x_i - s)_+ \cdot (y_i - t)_+ = 0 \quad \text{für alle} \quad (s,t) \in I.$$

Ordnet man die Knoten (x_i,y_i) lexikographisch an und ist $(\overline{x_n},\overline{y_n})$ der letzte Knoten in dieser Anordnung mit Koeffizient $\overline{\beta_n}$, so gibt es positive Zahlen r_1 und r_2 mit

$$0 = \sum_{i=1}^n \overline{\beta}_i(\overline{x}_i - s)_+ \cdot (\overline{y}_i - t)_+ = \overline{\beta}_n(\overline{x}_n - s)(\overline{y}_n - t)$$

für $\overline{x}_n - r_1 < s < \overline{x}_n$ und $\overline{y}_n - r_2 < t < \overline{y}_n$. Hieraus folgt $\overline{\beta}_n = 0$. Analog ergibt sich $\overline{\beta}_{n-1} = 0$. So fortfahrend erhält man, daß alle Koeffizienten $\overline{\beta}_i$ gleich 0 sind. Die Funktionen $\tilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}$ sind also linear unabhängig in $L^2(I)$. Nach Satz 1 gibt es genau ein $u := \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i \tilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)} \in L^2(I)$ mit

$$\left(u, \tilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}\right) = z_j \text{ für } 1 \le j \le n.$$

Nun ist

$$z_j = \left(u, \widetilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\widetilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}, \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}, \widetilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_{(x_i,y_i)} (x_j, y_j)$$

für $1 \le j \le n$. Dies bedeutet, es gibt genau eine Spline-Funktion f mit $f(x_i, y_i) = z_i$ für $1 \le j \le n$, nämlich $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_{(k_i,y_i)}$.

Die Koeffizienten α_i sind die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{k}_{(\mathrm{x}_i,\mathrm{y}_i)} (\mathrm{x}_j, \mathrm{y}_j) \cdot \alpha_i = \mathrm{z}_j$$

für $1 \le j \le n$, q.e.d. □

2. SPLINE-INTERPOLATION IN $K_0^{(2,2)}(I)$

Es sei $f \in K_0^{(2,2)}(I)$ und $P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ ein Knotensatz im Innern von I. Nach Satz 2 existiert dann genau eine Spline-Funktion $s_f := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot k_{(x_i,y_i)}$ mit $s_f(x_j, y_j) = f(x_j, y_j)$ für $1 \le j \le n$. Als Maß für die Dichte des Knotensatzes P im Rechteck I definieren wir die Größe

$$d(P) := \sup_{(x,y)\in I} \left\{ \min_{1 \le i \le n} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right\}.$$

Für die Spline-Interpolierende s_f von f gelten nun folgende Aussagen:

SATZ 3. (i) *Ist* $g \in K_0^{(2,2)}(I)$ *mit* $g \ne s_f$ *und* $g(x_i, y_i) = f(x_i, y_i)$ *für* $1 \le i \le n$, *so gilt*

$$\|\widetilde{g}\| > \|\widetilde{s}_f\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ *die Hilbertraum-Norm von* $L^2(I)$ *bedeutet.*

(ii) *Der Fehler läßt sich mit der Supremumsnorm* $\|\cdot\|_\infty$ *wie folgt abschätzen:*

$$\|f - s_f\|_\infty \le C d(P) \left\|\widetilde{f}\right\| \quad \textit{mit } C = 2\sqrt{(b-a)(d-c)} \cdot (b + d - a - c).$$

(iii) *Ist* (P_n) *eine Folge von Knotensätzen im Innern von I mit* $\lim_{n\to\infty} d(P_n) = 0$, *so konvergiert die Folge der dazugehörigen Spline-Interpolierenden* $((s_f)_n)$ *von* f *gleichmäßig gegen* f *auf* I.

Beweis. Zu i) Aus $\widetilde{k}_{(x_i,y_i)} = \widetilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}$ für $1 \le i \le n$ folgt

$$\widetilde{s}_f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{k}_{(x_i,y_i)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{\varepsilon}_{(x_i,y_i)}.$$

Nun gilt für $1 \le j \le n$:

$$g(x_j, y_j) = \left(\widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}, \widetilde{g}\right) = f(x_j, y_j),$$

$$s_f(x_j, y_j) = \left(\widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}, \widetilde{s}_f\right) = f(x_j, y_j).$$

Nach Satz 1 ist daher $\|\widetilde{s}_f\| < \|\widetilde{g}\|$. Zu ii) Sei $(x, y) \in I$. Dann existiert ein Knotenpunkt (x_j, y_j) mit $|x - x_j| \le d(P)$ und $|y - y_j| \le d(P)$. Aus

$$s_f(x,y) - f(x,y) = s_f(x,y) - s_f(x_j,y_j) + f(x_j,y_j) - f(x,y)$$

folgt

$$\begin{aligned}
|s_f(x,y) - f(x,y)| &\le |s_f(x,y) - s_f(x_j,y_j)| + |f(x_j,y_j) - f(x,y)| = \\
&= \left|\left(\widetilde{\varepsilon}_{(x,y)} - \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}, \widetilde{s}_f\right)\right| + \left|\left(\widetilde{\varepsilon}_{(x,y)} - \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}, \widetilde{f}\right)\right| \le \\
&\le \left\|\widetilde{\varepsilon}_{(x,y)} - \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}\right\| \|\widetilde{s}_f\| + \left\|\widetilde{\varepsilon}_{(x,y)} - \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}\right\| \left\|\widetilde{f}\right\| \le \\
&\le 2 \left\|\widetilde{f}\right\| \left\|\widetilde{\varepsilon}_{(x,y)} - \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}\right\|,
\end{aligned}$$

da $\|\widetilde{s}_f\| \le \left\|\widetilde{f}\right\|$ nach (i). Nun ist

$$\left\|\widetilde{\varepsilon}_{(x,y)} - \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}\right\| = \left\{ \int_a^b \int_c^d \left((x-s)_+ (y-t)_+ - (x_j - s)_+ (y_j - t)_+\right)^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&\left|(x-s)_+ (y-t)_+ - (x_j-s)_+ (y_j-t)_+\right| \le \\
&\le \left|(x-s)_+ \{(y-t)_+ - (y_j-t)_+\}\right| + \left|(y_j-t)_+ \{(x-s)_+ - (x_j-s)_+\}\right| \le \\
&\le (b-a)|y - y_j| + (d-c)|x - x_j| \le (b - a + d - c)\, d(P).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\left\|\widetilde{\varepsilon}_{(x,y)} - \widetilde{\varepsilon}_{(x_j,y_j)}\right\| \le (b - a + d - c) \cdot d(P) \cdot \sqrt{(b-a)(d-c)}$$

und somit

$$\|s_f - f\|_\infty \le 2(b + d - a - c)\sqrt{(b-a)(d-c)} \cdot d(P) \left\|\widetilde{f}\right\|.$$

Zu iii) Dies folgt sofort aus Punkt (ii), q.e.d. □

Die vorher betrachteten Spline-Funktionen verschwinden auf den Rechteckseiten $\{(x,c) : a \leq x \leq b\}$ und $\{(a,y) : c \leq y \leq d\}$, und die Knotenpunkte liegen im Innern des Rechteckes. Diese Beschränkungen lassen sich vermeiden, indem man zum Beispiel den ganzen Raum $K^{(2,2)}(I)$ als direkte Hilbertsumme seiner 9 Koordinatenräume betrachtet. Für diesen Raum lassen sich zu den Sätzen 2 und 3 analoge Aussagen beweisen. Für die interpolierenden Spline-Funktionen s ist dann die folgende Hilbertsummen-Norm minimal:

$$
\begin{aligned}
\|s\| \; = \; \Bigg(& s(a,c)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} s(a,c)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} s(a,c)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} s(a,c)\right)^2 + \\
& + \int_c^d \left(\frac{\partial^2}{(\partial y)^2} s(a,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial^3}{\partial x\,(\partial y)^2} s(a,y)\right)^2 \mathrm{d}y + \\
& + \int_a^b \left(\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} s(x,c)\right)^2 + \left(\frac{\partial^3}{(\partial x)^2\,\partial y} s(x,c)\right)^2 \mathrm{d}x + \\
& + \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial^4}{(\partial x)^2 (\partial y)^2} s(x,y)\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Bigg)^{1/2} .
\end{aligned}
$$

Was die Darstellung und Berechnung von Spline-Funktionen anbelangt, ist aber die Sache um einiges umfangreicher.

REFERENCES

[1] MICULA, G., TÖRNIG, W., *Literaturverzeichnis / Theorie und Anwendung von Spline-Funktionen*, 162 S., THD Preprint Nr. 890, 1985.

[2] SCHEFFOLD, E., SCHLOSSER, K.-H., *Spline-Funktionen mehrerer Veränderlicher*, J. Approximation Theory, **23**, pp. 242–260, 1978.

Received April 28, 1996

Technische Hochschule
Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstrae 7
D-64289 Darmstadt