REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 30 (2001) no. 1, pp. 81–87
ictp.acad.ro/jnaat

HOMMAGE À LA MÉMOIRE DE TIBERIU POPOVICIU

ELENA POPOVICIU

Dedié à la mémoire de l'Academicien Tiberiu Popoviciu

Résume. On évoque l'activité scientifique de l'académicien Tiberiu Popoviciu le fondateur de l'Institut de Calcul de Cluj-Napoca de l'Académie Roumaine et le fondateur de l'École Mathématique Roumaine d'Analyse Numérique.

Mots clé. approximation, interpolation, fonctions d'ordre supérieur (convexes, non-concaves, polynômiales, non-convexes, concaves), Théorie de l'allure, F-convexité.

1.

L'académicien Tiberiu Popoviciu est né à Arad (Roumanie), le 16 février 1906. Ses travaux sont devenus des points de départ pour des recherches importantes. Ses résultats forment, aujourd'hui, un chapitre distinct de l'Analyse Mathématique ayant des ramifications dans l'Analyse Numérique, la Théorie de l'Approximation, la Théorie et la Pratique du Calcul, y compris, le Calcul avec des ordinateurs.

Les travaux de Tiberiu Popoviciu sur la convexité d'ordre supérieur, sur la représentation de certaines fonctionnelles et encore d'autre sujets mathématiques sont considérés comme un chapitre de l'Analyse fonctionnelle.

En ceux qui suivent, je désire évoquer les résultats obtenus de Tiberiu Popoviciu specialement dans la Théorie de la Convexité. Je désire, aussi, remarquer certaines directions de recherche qui ont eu comme point de départ les résultats de Tiberiu Popoviciu. Pour des détails on peut consulter la bibliographie qui se trouve à la fin de cette note.

Naturelement il ne faut pas oublier les importants résultats sur les opérateurs linéaires et positifs, y compris les opérateurs de S.N. Bernstein, les résultats sur la quasi-convexité, sur les fonctions spline, sur certaines équations fonctionnelles et beaucoups d'autres.

Str. Roşiori nr. 40, 3400 Cluj–Napoca, Roumanie, e-mail: elenap@math.ubbcluj.ro.

2.

Comme disciple et collaborateur de Tiberiu Popoviciu j'ai eu la chance de diriger l'un des secteurs de recherche de l'Institut de Calcul. En cette qualité, je suis devenue, aussi, le rédacteur en chef de la Revue d'Analyse Numérique et de Théorie de l'Approximation, plusieurs années. Mes Séminaires de recherche (il s'agit de trois Séminaires) ont été fondés quand j'ai été chercheur à l'Institut (1960, 1967 respectivement 1972). Le programme de ces Séminaires est en étroite liaison avec celui ci de l'Institut et, par consequence, avec les recherches et les travaux de Tiberiu Popoviciu. Les trois Séminaires sont en pleine activité, encore, aujourd'hui. Ils s'appelent "Séminaire de Théorie de la Meilleure Approximation, Convexité et Optimization", "Séminaire de Recherches Interdisciplinaires" et "Séminaire d'Equations Fonctionnelles, Convexité et Approximation".

On remarque que l'activité scientifique de Tiberiu Popoviciu et celle de l'Institut qu'il a fondé ont déterminé un mouvement d'une grande amplitude qui est orienté vers les divers branches des mathématiques.

3.

Maintenant, pour souligner les resultats obtenus comme applications ou bien comme généralisation des travaux de Tiberiu Popoviciu, j'en donnerai des exemples.

Je l'ai dit, plus haut, qu'on distingue, parmi les recherches de Tiberiu Popoviciu, la Théorie des Fonctions d'Ordre Supérieur (convexes, non-concaves, polynômiales, non-convexes, respectivement concaves). On peut mettre en évidence plusieurs voies pour arriver à cette théorie. Dans la monographie [7] on peut remarquer les inegalités (1) et (5). Si l'entier $n \geq -1$ est fixé et $X \subseteq \mathbb{R}$ a le card $X \geq n+2$, on considère la fonction

$$f : X \to \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Soit $Y \subseteq X$ et card $Y \geq n+2$. Considérons l'ensemble de points distincts

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\} \subseteq Y \tag{3.2}$$

Pour obtenir les définitions de [7] il faut considérer aussi le cas dans lequel

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}. \tag{3.3}$$

Désignons par $\mathcal{P}_h$ l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à h. On désigne par

$$L(\mathcal{P}_h; u_1, u_2, \ldots, u_{h+1}; \cdot) \tag{3.4}$$

l'opérateur d'interpolation de Lagrange construit pour les points distincts $u_1, u_2, \ldots, u_{h+1}$ de X. Pour la fonction (3.1) l'image

$$L(\mathcal{P}_h; u_1, u_2, \ldots, u_{h+1}; f) \tag{3.5}$$

est un polynôme $P \in \mathcal{P}_h$

$$P = \sum_{i=0}^{h} a_i e_i, \quad e_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad e_i(x) = x^i, \ i = 0, 1, \ldots, h.$$

On a $P(u_i) = f(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, h+1$.

La différence divisée

$$[u_1, u_2, \ldots, u_{h+1}; f] = a_h \tag{3.6}$$

a un rôle très important.

Pour la fonction (3.1) considérée ici et en supposant (3.3), on a

$$\begin{aligned} &f(x_{n+2}) - L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) = \\ &= (x_{n+2} - x_1) \ldots (x_{n+2} - x_{n+1})[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

On peut énoncer les définitions de Tiberiu Popoviciu.

Définition 3.1. *La fonction (3.1) s'appelle*

(3.8) convexe (non-concave, polynômiale, non-convexe respectivement concave)

d'ordre n, sur l'ensemble Y, si l'on a

(3.9) $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0$ $(\geq 0, = 0, \leq 0$ *respectivement* $< 0)$ *quels que soient*

les points (3.2) de l'ensemble Y.

Définition 3.2. *La fonction (3.1) s'appelle*

(3.10) convexe (non-concave, polynômiale, non-convexe, respectivement concave)

d'ordre n sur l'ensemble Y, si l'on a

(3.11) $f(x_{n+2}) - L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) > 0$ $(\geq 0, = 0, \leq 0$, *respectivement* $< 0)$

quels que soient les points (3.3) de l'ensemble Y.

Si on considère les deux définitions 3.1. et 3.2., on remarque que la relation (3.11) exprime une propriété geometrique. Comme on peut le voir dans [14], [17], cette propriété geometrique permet la construction d'une définition analogue à celle de Tiberiu Popoviciu dans le cas dans lequel au lieu de l'ensemble $\mathcal{P}_h$ on fait intervenir un ensemble interpolatoire quelconque, d'ordre $h+1$, sans être linéaire.

Si nous nous rapportons, maintenant, à la relation (3.9) et à la définition 3.1. qui contient cette relation, nous remarquons la linéarité de la fonctionnelle différence divisée qui intervient. A cause de cette linéarité et à cause de la linéarité du calcul avec les différences divisées, les deux voies suivies pour obtenir la définition des fonctions d'ordre n offrent des possibilités de généralisation tout à fait différentes. Pour en avoir des exemples concernant les diverses généralisations on peut consulter [14].

Je désire fair encore une remarque. Les deux définitions 3.1. et 3.2. peuvent être considérées comme des résultats d'un procédé de comparaison. Pour obtenir 3.1. on a comparé la fonction (3.1) avec les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}_{n+1}$. D'autre part, pour obtenir la définition 3.2, on a comparé la fonction (3.1) avec les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}_n$. Dans le premier cas le critère a été le signe des différences divisées (3.9). Dans le deuxième cas le critère a été le signe de la différence (3.7). En même temps, la relation (3.7) exprime la liaison entre les deux procédés de comparaison.

Si l'on considère l'interpolation dans des espaces abstraits (voir [14], [15], [17]), alors on peut exprimer la comparaison, dont nous venons de parler, à l'aide des opérateurs d'interpolation abstraite.

4.

Je désire, maintenant, dire quelques mots concernant les ensembles interpolatoires et la comparaison d'une fonction (qu'on doit preciser) avec les éléments d'un tel ensemble.

Soit D un ensemble de fonctions réelles et d'une variable réelle, définies sur l'intervalle $[a,b]$. On donne les points u_k, $k=1,2,\dots,h$, $h\geq 1$, distincts de l'intervalle $[a,b]$. On donne aussi les nombres réelles y_k, $k=1,2,\dots,h$.

DÉFINITION 4.1. *L'ensemble D s'appelle interpolatoire d'ordre h sur l'intervalle $[a,b]$ ou bien du type $I_h[a,b]$ s'il existe, dans D, une fonction φ et une seule qui satisfait les conditions $\varphi(u_i)=y_i$, $i=1,2,\dots,h$.*

Soit donnée la fonction

$$f:[a,b]\to\mathbb{R} \tag{4.1}$$

et les ensembles $F\subset G$. On suppose que F est du type $I_n[a,b]$ et G du type $I_{n+1}[a,b]$. L'entier $n\geq 1$ est fixé.

Soit l'ensemble de points

$$x_1<x_2<\cdots<x_{n+1} \tag{4.2}$$

de l'intervalle $[a,b]$. On désigne par

$$l=L(F;x_1,x_2,\dots,x_n;f) \tag{4.3}$$

où

$$l(x_i)=f(x_i),\quad i=1,2,\dots,n, \tag{4.4}$$

la fonction $l\in F$ dont l'existence et l'unicité sont satisfaites.

DÉFINITION 4.2. *La fonction f s'appelle F-convexe (F-concave) sur $[a,b]$ si l'on a*

$$l(x_{n+1}) < f(x_{n+1}) \quad (\textit{respectivement } l(x_{n+1}) > f(x_{n+1})) \tag{4.5}$$

quels que soient les points (4.2) de $[a,b]$.

On désigne l'ensemble des fonctions qui sont F-convexes (respectivement F-concave) sur $[a,b]$ par $\mathcal{C}(F,[a,b],+)$ (respectivement par $\mathcal{C}(F,[a,b],-)$).

Les ensembles $\mathcal{C}(F,[a,b],+)$ et $\mathcal{C}(F,[a,b],-)$ ont beaucoup de propriétés qui les font importants. J'ai étudié ces ensemble dans mes travaux (voir [14]).

Ici les ensembles $F \subset G$ ne sont pas supposés linéaires. Dans le cas $F = \mathcal{P}_{n-1}$ on obtient les fonctions convexes d'ordre $n-1$ sur $[a,b]$ et les fonctions concaves d'ordre $n-1$ sur $[a,b]$.

Désignons par $C[a,b]$ l'espace linéaire, doué de la norme uniforme, des fonctions continues sur $[a,b]$. Pour une fonction

$$f \in C[a,b] \tag{4.6}$$

quelconque on peut se poser la question d'étudier les propriétés de la fonction

$$g_f \in G \tag{4.7}$$

qui satisfait l'égalité

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - g_f(x)| = \inf_{g\in G} \left\{ \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \right\}. \tag{4.8}$$

On sait que l'ensemble G contient une et une seule fonction g_f.

Dans [14] on trouve le

THÉORÈME 4.1. *Si $f \in \mathcal{C}(F,[a,b],+)$ (ou bien $f \in \mathcal{C}(F,[a,b],-)$) alors on a $g_f \in \mathcal{C}(F,[a,b],+)$ (respectivement $g_f \in \mathcal{C}(F,[a,b],-)$.*

La démonstration de ce théorème résulte en se basant sur la propriété d'alternance de Tschebytschef et en sachant qu'une fonction de $\mathcal{C}(F,[a,b],+)$ (respectivement de $\mathcal{C}(F,[a,b],-)$) ne peut pas prendre les valeurs d'une fonction de l'ensemble F que sur au plus n points distincts de $[a,b]$. Il faut consulter [14].

5.

Les propriétés obtenues par comparaison avec celles des éléments des ensembles $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$ ou bien de F peuvent être étudiées d'une manière plus générale en se basant sur la théorie de l'allure [15], [16].

Soient donnés les ensembles non-vides A et B et l'ensemble aussi non-vide

$$\mathcal{T} \subset \{T | T : A \to B\}. \tag{5.1}$$

On considère la partition

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j, \quad m \geq 3, \quad B_i \cap B_k = \emptyset \text{ pour } i \neq k. \tag{5.2}$$

Définition 5.1. *L'élément $a \in A$ a l'allure*

$$(B_i, T) \tag{5.3}$$

si l'on a

$$T(a) \in B_i. \tag{5.4}$$

Définition 5.2. *L'élément $a \in A$ a l'allure*

$$(B_i, \mathcal{T}) \tag{5.5}$$

si l'on a

$$T(a) \in B_i \tag{5.6}$$

quels que soient les opérateurs $T \in \mathcal{T}$.

En considérant d'une manière convenable les ensemble $A, B, \mathcal{T}$ et la partition (5.2) on retrouve les propriétés données par les définitions 5.1. et 5.2. dans le cas des fonctions F-convexes, F-concaves, quasi-convexes, et particulierement dans le cas des fonctions d'ordre n au sens de Tiberiu Popoviciu. Mais comme on peut le voir dans [15], [16], [18] on a des allures encore plus générales. On peut consulter aussi les travaux de mes disciples et collaborateurs [1], [2], [3], [4], [5], [19], [20].

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Cristescu, *Extinderea noţiunilor de comportare şi aproximare la unele domenii particulare ale cercetării*, Thèse de doctorat, Université Babeş–Bolyai, Cluj–Napoca, Romania, 1998.

[2] E. M. Iacob, *Convexitate, aproximare şi optimizare pe reţele*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj–Napoca, Romania, 1998.

[3] G. Moţ, *Asupra unor implicaţii ale teoriei generale a convexităţii în geometrie*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj–Napoca, Romania, 1998.

[4] M. Ivan, *Procedee de interpolare şi aplicaţiile lor*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, Romania, 1982.

[5] L. Lupşa, *Tipuri particulare de probleme de programare liniară şi neliniară*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj–Napoca, Romania, 1981.

[6] T. Popoviciu, *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica, **8** (1934), 1–85.
[7] T. Popoviciu, *Les fonctions convexes*, Paris, 1945.
[8] T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica, **10** (1934), 59–64.
[9] T. Popoviciu, *Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle*, Mathematica, **12** (1936), 5–12.
[10] T. Popoviciu, *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur*, Revue Math. de l'Union Interbalkanique, **2** (1939), 31–40.
[11] T. Popoviciu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. de la Section Sc. Acad. Roumaine, **20** (1938), 45–49.
[12] T. Popoviciu, *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame*, Ed. Ardealul, Cluj, Romania, 1937 (in Romanian).
[13] T. Popoviciu, *Sur une généralisation des fonctions spline*, Mathematical Structures, Computational Mathematical Modeling (Sofia), 1957, 405–410.
[14] E. Popoviciu, *Teoreme de medie din analiza matematică şi legătura lor cu teoria interpolării*. Ed. Dacia, Cluj–Napoca, Romania, 1972 (in Romanian).
[15] E. Popoviciu, *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, **11** (1982), 129–137.
[16] E. Popoviciu, *Sur certaines propriétés des fonctions quasi-convexes*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation **12** (1983), 175–186.
[17] E. Popoviciu (Moldovan), *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica, **1** (24) (1959), 49–80.
[18] E. Popoviciu, *Despre unele momente semnificative în dezvoltarea teoriei convexităţii*, Seminarul Itinerant "Tiberiu Popoviciu", de Ecuaţii Funcţionale, Aproximare şi Convexitate, Cluj–Napoca, Romania, 1995, 89–92.
[19] R. Precup, *Proprietăţi de alură şi unele aplicaţii ale lor*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj–Napoca, Romania, 1985.
[20] I. Raşa, *Funcţionale simple în sensul lui Tiberiu Popoviciu*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj–Napoca, Romania, 1982.

Reçu le 15 fevrier, 2001.