REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 30 (2001) no. 2, pp. 213–218
ictp.acad.ro/jnaat

ABSOLUTE PROJEKTIONSKOSTANTEN ENDLICHDIMENSIONALER TEILRÄUME VON $C^k(I)$

PETER POTTINGER

gewidmet Herrn Prof. Dr. Werner Haußmann zu seinem 60. Geburtstag

Zusammenfassung. Mit $C^k(I)$ bezeichnen wir den Vektorraum der auf dem Intervall $I=[a,b]$ k-mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen versehen mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz in Funktions- und Ableitungswerten. In der vorliegenden Arbeit wird aufgezeigt, daß die absolute Projektionskonstante eines endlichdimensionalen Teilraumes X von $C^k(I)$ übereinstimmt mit der relativen Projektionskonstanten von X in $C^k(I)$, falls auf $C^k(I)$ die Norm $\|\cdot\|_k^c$ verwendet wird. Es wird ferner nachgewiesen, daß dieses Ergebnis nicht mehr gültig ist, falls man auf $C^k(I)$ zu anderen äquivalenten Normen übergeht. In diesem Fall erhalten wir jedoch Abschätzungen für die absoluten Projektionskonstanten.

MSC 2000. 41A65, 46B99.

1. EINLEITUNG

Es sei X ein normierter Vektorraum und Y ein normierter Obervektorraum, der auf X die Ausgangsnorm induziert. Dann ist (vgl. E. W. Cheney und K. Price [2])

$$P(X,Y) := \begin{cases} \inf\{\|P\| \in R \mid \text{stetige lineare Projektion von } Y \text{ auf } X\}, \\ \infty, \text{ falls keine stetige lineare Projektion existiert,} \end{cases}$$

die relative Projektionskonstante von X in Y. Hierbei ist $\|P\|$ die Operatornorm der stetigen linearen Projektion P. Die Größe

$$P(X) := \sup_Y P(X,Y),$$

Universität Koblenz–Landau, Abteilung Koblenz, Mathematisches Institut, D-56075 Koblenz, Deutschland.

wobei Y die Gesamtheit aller normierten Obervektorräume von X durchläuft, die auf X die Ausgangsnorm induzieren, heißt absolute Projektionskonstante von X.

In [9] wurde gezeigt, daß für einen endlichdimensionalen Vektorraum X

$$P(X) = \sup_{Y} P(X, Y)$$

gilt, wobei das Supremum nur über alle endlichdimensionalen normierten Obervektorräume Y von X genommen wird. Mit diesem Ergebnis wurde in [10] bewiesen, daß für jeden endlichdimensionalen Unterraum X von $C(I)$ gilt

$$P(X) = P(X, C(I)).$$

Hierbei ist $C(I)$ der Vektorraum der auf dem kompakten Intervall $I = [a, b]$ stetigen reellwertigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_c = \sup_{x \in I} |f(x)| \quad \text{für} \quad f \in C(I).$$

Im folgenden wird untersucht, inwieweit dieses Ergebnis auch für endlichdimensionale Teilräume X von $C^k(I)$ gilt. Dabei ist $C^k(I)$ der Vektorraum der auf dem Intervall I k-mal differenzierbaren Funktionen versehen mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz in Funktions- und Ableitungswerten.

2. DER ZUSAMMENHANG VON $P(X)$ UND $P(X, C^k(I))$

Auf dem Vektorraum der auf dem Intervall I k-mal stetig differenzierbaren Funktionen betrachten wir für $f \in C^k(I)$ die Norm

$$\|f\|_k^c = \max_{0 \le v \le k-1} \left(|D^v f(c)|, \|D^k f\|_c \right).$$

Hierbei ist das Element $c \in I$ fest gewählt.

Dann erhalten wir das sowohl in approximationstheoretischer als auch in funktionalanaly-tischer Hinsicht (vgl. z. B. D. B. Goodner [5] und B. Gründbaum [6]) interessante Ergebnis:

Satz 1. *Es sei X ein endlichdimensionaler Teilraum von $C^k(I)$. Dann gilt unter Verwendung der Norm $\|\cdot\|_k^c$ und für $c \in I$*

$$P(X) = P\left(X, C^k(I)\right).$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$j : C^k(I) \to C(J)$$

mit $J = I \cup S$, wobei S und j durch

$$
\begin{aligned}
S &:= \bigcup_{i=0}^{k-1} \{b + i + 1 \in R\}, \\
j(f) &:= g \quad \text{mit} \quad g|_I := D^k f \\
g(b+i+1) &:= D^i f(c) \quad (0 \leq i \leq k-1)
\end{aligned}
$$

definiert sind. Hierbei sei der Raum $C(J)$ mit der Supremumsnorm versehen. Dann ist die Abbildung j eine Isometrie. Folglich gilt (vgl. [9])

$$P\left(X, C^k(I)\right) = P(j(X), C(j)).$$

Ist $m(S)$ der Raum der auf S definierten reellwertigen Funktionen mit der Supremumsnorm, so folgen die Isometrien

$$
\begin{aligned}
C(J) &\cong C(I) \oplus m(S) \\
j(X) &\cong D^k(X) \oplus Y
\end{aligned}
$$

mit einem geeigneten Teilraum Y von $m(S)$. Insgesamt erhalten wir also

$$
\begin{aligned}
P\left(X, C^k(I)\right) &= P\left(D^k(X) \oplus Y,\ C(I) \oplus m(S)\right) \\
&= \max\left\{P\left(D^k(X),\ C(I)\right),\ P(Y, m(S))\right\} \quad \text{(vgl. J. Blatter} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{und E. W. Cheney [1])} \\
&= \max\left\{P\left(D^k(X)\right), P(Y)\right\} \\
&= P(j(X)) = P(X) \qquad\qquad \text{(vgl. [9])}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnet Π_{n+k}^k den Teilraum der Polynome vom Grad $\leq n+k$ als Unterraum von $C^k(I)$ und Π_n den Teilraum der Polynome vom Grad $\leq n$ als Unterraum von $C(I)$, so gilt (vgl. [10]):

$$P\left(\Pi_{n+k}^k, C^k(I)\right) = P(\Pi_n, C(I)).$$

□

Mit Satz 1 erhält man also folgendes

Korollar 2. *Es gilt*

$$P\left(\Pi_{n+k}^k\right) = P(\Pi_n, C(I)).$$

Da bekanntlich (vgl. M. Golomb [4], E. W . Cheney und K. Price [2] und [8]) gilt:

$$\tfrac{1}{2}\cdot(\lambda_n - 1) \leq P\left(\Pi_n, C\left(I\right)\right) \leq \lambda_n$$

mit $\lambda_n = \frac{4}{\pi^2}\cdot\log n + 1{,}27033 + \varepsilon_n$, wobei ε_n eine monoton fallende Nullfolge ist, die nach oben durch $0{,}166$ beschränkt ist, erhalten wir mit Korollar 2 die Abschätzung:

$$\tfrac{1}{2}\cdot(\lambda_n - 1) \leq P\left(\Pi^k_{n+k}\right) \leq \lambda_n.$$

Wir betrachten im folgenden auf $C^k\left(I\right)$ die Normen

$$|f|_k = \max\left\{\|f\|_c\,,\ \|D^k f\|_c\right\} \quad \text{und} \quad \|f\|_k = \max_{1\leq v\leq k}\|D^v f\|_c$$

für $f \in C^k\left(I\right)$.

Ist nun X ein Teilraum von $C^k\left(I\right)$, so verwenden wir auf X und auf $C^k\left(I\right)$ die Norm $|\cdot|_k$ bzw. die Norm $\|\cdot\|_k$. Die zugehörige relative Projektionskonstante nennen wir $P_1\left(X, C^k\left(I\right)\right)$ und die absolute Projektionskonstante $P_1\left(X\right)$ bzw. $P_2\left(X, C^k\left(I\right)\right)$ und $P_2\left(X\right)$.

Wir werden zeigen, daß in diesen Fällen die universelle Eigenschaft aus Satz 1 nicht erhalten bleibt. Hierzu benötigen wir einige Hilfsmittel.

Für einen Teilraum X von $C^k\left(I\right)$ bezeichnen wir mit $S\left(X^*\right)$ die Einheitskugel von X^*. Dabei ist X^* der topologische Dualraum von X versehen mit der kanonischen Norm. Ferner ist *ext* $S\left(X^*\right)$ die Menge der Extremalpunkte von $S\left(X^*\right)$ (vgl. N. Dunford und J. T. Schwartz [3]). In Analogie zu dem bekannten Ergebnis für $C(I)$ (vgl. N. Dunford und J. T. Schwartz [3]) beweist man

Lemma 3. *Es sei X ein Teilraum von $C^1\left(I\right)$ unter der Norm $|\cdot|_1$, die in diesem Fall mit $\|\cdot\|_1$ übereinstimmt. Dann gilt*

$$\mathit{ext}\ S\left(X^*\right) \subset A := \left\{\pm\delta_x, \pm\delta'_x \in X^* \mid x \in I\right\},$$

wobei die Funktionale durch

$$\delta_x\left(f\right) := f\left(x\right) \quad \mathit{und} \quad \delta'_x\left(f\right) := f'\left(x\right) \qquad \left(f \in C^1\left(I\right)\right)$$

definiert sind.

Satz 4. *Für den Raum Π^1_1 erhalten wir mit $I = [0,1]$ die Abschätzung*

$$P_1\left(\Pi^1_1\right) = P_2\left(\Pi^1_1\right) > P_1\left(\Pi^1_1, C^1\left(I\right)\right) = P_2\left(\Pi^1_1, C^1\left(I\right)\right).$$

Beweis. Die Abbildung $P : C^1(I) \to \Pi_1^1$ mit

$$P(f) = f(0) \cdot \pi_0 + (f(1) - f(0)) \cdot \pi_1$$

ist sicherlich eine Projektion auf Π_1^1, wobei die Monome π_0 und π_1 definiert sind $\pi_0(x) = 1$ und $\pi_1(x) = x$ für $x \in I$. Man rechnet leicht nach, daß für die Operatornorm von P gilt $\|P\| = 1$. Also folgt $P_1\left(\Pi_1^1, C^1(I)\right) = P_2\left(\Pi_1^1, C^1(I)\right) = 1$.

Angenommen es wäre $P_1\left(\Pi_1^1\right) = P_2\left(\Pi_1^1\right) = 1$. Dann hat $S\left(\Pi_1^{1^*}\right)$ genau 4 Extremalpunkte, nämlich $\pm x_1^*$ und $\pm x_2^*$. Damit gilt für alle $f \in \Pi_1^1$

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \sup\{|x^*(f)| : x^* \in S(X^*)\}\\ &= \sup\{|x^*(f)| : x^* \in E\} \quad \text{mit} \quad E = ext\, S(X^*)\\ &= \max_{1\le i\le 2} |x_i^*(f)| \quad \text{(vgl. N. Dunford und J. T. Schwartz [3]).}\end{aligned}$$

Wir wählen zunächst $f = \pi_0 - \frac{1}{2} \cdot \pi_1 \in \Pi_1^1$. Dann erhalten wir

$$\|f\|_1 = 1 = \max_{1\le i\le 2} |x_i^*(f)|.$$

Hierbei können wir o.B.d.A. $x_1^*(f) = 1$ annehmen. Nun ist $x_1^* = \pm\delta_q$ oder $x_1^* = \pm\delta_q'$ mit einem geeigneten $q \in I$ (vgl. Lemma 3). Da für $q \in I$

$$\delta_q(f) = 1 - \tfrac{1}{2}q \quad \text{und} \quad \delta_q'(f) = -\tfrac{1}{2}$$

gilt, folgt $x_1^* = \delta_0$. Nun betrachten wir $g = \pi_0 + \pi_1 \in \Pi_1^1$. Wegen $\|g\|_1 = 2$ und $\delta_0(g) = 1$ folgt o.B.d.A. $x_2^*(g) = 2$. Aus

$$\delta_q(g) = 1 + q \quad \text{und} \quad \delta_q'(g) = 1 \quad \text{für} \quad q \in I$$

entnehmen wir $x_2^* = \delta_1$. Demnach muß für $h = \pi_1 - \frac{1}{2} \cdot \pi_0$ gelten

$$\|h\|_1 = \max\{|h(0)|, |h(1)|\} = \tfrac{1}{2},$$

was im Widerspruch zu $\|h\|_1 = 1$ steht. □

Für den Banach-Raum $C^k(I)$ läßt sich also nicht die universelle Eigenschaft aus Satz 1 garantieren.

Jedoch erhalten wir in diesem Fall eine Abschätzung. Dazu benötigen wir (vgl. B. Grünbaum [6] und [9])

Lemma 5. *X und Y seien normierte Vektorräume und die Abbildung $A : X \to Y$ ein topologischer Vektorraumisomorphismus mit*

$$\|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \leq \lambda \in R, \quad \lambda \neq 0.$$

Dann gilt für die absoluten Projektionskonstanten

$$\frac{1}{\lambda} \cdot P(Y) \leq P(X) \leq \lambda \cdot P(Y).$$

Da die auf $C^k(I)$ verwendeten Normen $\|\cdot\|_k^c$, $|\cdot|_k$ und $\|\cdot\|_k$ topologisch äquivalent sind, erhalten wir:

Korollar 6. *Für die absoluten Projektionskonstanten eines endlichdimensionalen Teilraumes X von $C^k(I)$ gilt*

$$P_1(X) = \mathcal{O}\left(P(X, C^k(I))\right) \quad \textit{und} \quad P_2(X) = \mathcal{O}\left(P(X, C^k(I))\right).$$

Insbesondere erhalten wir für den Polynomraum Π_{n+k}^k mit Korollar 6 und Satz 1

$$P_1(\Pi_{n+k}^k) = \mathcal{O}\Big(P(\Pi_{n+k}^k, C^k(I))\Big) = \mathcal{O}(\log n) \quad \text{und}$$
$$P_2(\Pi_{n+k}^k) = \mathcal{O}\Big(P(\Pi_{n+k}^k, C^k(I))\Big) = \mathcal{O}(\log n).$$

LITERATUR

[1] Blatter, J. und Cheney, E. W., *On the existence of extremal projections*, J. Approx. Theory, **6**, pp. 72–79, 1972.
[2] Cheney, E. W. und Price, K., *Minimal projections*, Approximation Theory, A. Talbot ed., pp. 261–289, Academic Press, New York–London, 1970.
[3] Dunford, N. und Schwartz, J. T., *Linear Operators, Part I*, Interscience, New York, 1958.
[4] Golomb, M., *Optimal and nearly optimal linear approximation*, Approximation of functions, H. L. Garabedian ed., pp. 83–100, Elsevier Publ. Co., New York, 1965.
[5] Goodner, D. B., *Projections in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **69**, pp. 89–108, 1950.
[6] Grünbaum, B., *Projection Constants*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**, pp. 451–465, 1960.
[7] Pottinger, P., *Absolute Projektionskonstanten endlich-dimensionaler normierter Vektor-räume*, Dissertation, Bochum, 1973.
[8] Pottinger, P., *Polynomoperatoren in $C^k[a, b]$*, Computing, **17**, pp. 163–167, 1976.
[9] Pottinger, P., *Zur Berechnung der absoluten Projektionskonstanten endlich-dimensionaler normierter Vektorräume*, Mathematica–Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. (Cluj), **4**, pp. 161–170, 1975.
[10] Pottinger, P., *Zur linearen Approximation im Raum*, Habilitationsschrift, Duisburg, 1976.

Eingegangen am 5. Oktober 2000.