

## UN IMPORTANT ANNIVERSAIRE POUR LA SCIENCE ROUMAINE

ELENA POPOVICIU\*

**Abstract.** We evocate the foundation, in 1957, of the Institute of Numerical Analysis in Cluj-Napoca, by Tiberiu Popoviciu. We underline the research programme of the Institute and the main results obtained here.

**MSC 2000.** 41.

**Keywords.** Allure, convexity, interpolation.

### 1.

Il y a 45 ans depuis la fondation de l'Institut de Calcul, de Cluj-Napoca, de l'Académie Roumaine. Fondé en mars 1957, par l'académicien Tiberiu Popoviciu, cet Institut a produit un grand changement dans la recherche scientifique de la Cité Universitaire Cluj-Napoca. Dans très peu de temps la nouvelle situation créée par la présence d'un Institut ayant un profil special, a eu pour résultat un écho facile à remarquer autant en Roumanie que dans le milieu scientifique international.

En tant qu'Institut de Calcul, le nouvel Institut, par son organisation (par sa structure), refletait la tendance de ces années-là, des recherches scientifiques en général et de la recherche mathématique en particulier.

Ayant, en dehors des secteurs de recherches théoriques du domaine des mathématiques, une équipe multidisciplinaire (mathématiciens, ingénieurs, économistes, physiciens) qui avait à son programme la construction d'une machine électronique de calcul, l'Institut de Calcul dirigé par Tiberiu Popoviciu était unique dans la partie centrale et au sud-est de l'Europe.

Les recherches portant sur la Théorie de l'Approximation, l'Analyse Numérique et la Théorie de la Convexité, ainsi que sur leurs ramifications dans d'autres domaines des mathématiques, ont fait remarquer les chercheurs de l'Institut dont la présence dans les revues de spécialité de Roumanie et d'ailleurs devient de plus en plus fréquente.

La collaboration avec les spécialistes non-mathématiciens (économistes, ingénieurs, architectes, médecins, biologistes et artistes) des membres de l'Institut de Calcul a produit un mouvement scientifique d'une qualité toute neuve.

Les Conférences avec participation internationale organisées par l'Institut de Calcul ont facilité la collaboration avec d'autres mathématiciens provenant de différents pays du monde.

---

\*Str. Roşiori nr. 40, 3400 Cluj-Napoca, Romania, e-mail: [elenap@math.ubbcluj.ro](mailto:elenap@math.ubbcluj.ro).

En quelques années la Section de Machines de Calcul de l'Institut, après quelques réalisations préparatoires, a produit les premiers ordinateurs complètement transistorisés de Roumanie.

Le Séminaire de Recherche dirigé par Tiberiu Popoviciu ainsi que ses leçons de calcul numérique et de langages de programmation tenus à l'Université Babeş-Bolyai de Cluj-Napoca, peuvent être considérés comme les premières manifestations de l'Informatique Roumaine.

Je me rappoterai par la suite à une recherche du domaine des mathématiques qui tient ses racines au programme d'études de l'Institut de Calcul.

Parmi les thèmes qui étaient inclus au programme de l'Institut de Calcul on remarque, tout d'abord, l'étude de certains domaines de l'Analyse Numérique qui arrivent en étroite liaison avec l'Analyse Fonctionnelle. Il s'agit, par exemple, de la représentation des fonctionnelles linéaires qui interviennent dans l'évaluation de la précision pour les procédés d'approximation. Ainsi, par exemple, la représentation du reste pour les formules d'intégration numérique.

$C[a, b]$  étant l'espace linéaire des fonctions définies sur l'intervalle  $[a, b]$  et continues sur  $[a, b]$ , l'entier  $n \geq -1$  étant fixé,

$$(1.1) \quad A : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

étant une fonctionnelle linéaire et en désignant par

$$(1.2) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$$

la différence divisée, sur les points distincts  $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ , de l'intervalle  $[a, b]$ , de la fonction

$$(1.3) \quad f \in C[a, b],$$

on se pose la question de *chercher les conditions qui assurent la vérité de la*

PROPOSITION 1.1. *Quelle que soit la fonction (1.3), il existent dans l'intervalle  $[a, b]$   $n + 2$  points distincts*

$$(1.4) \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2},$$

*ainsi que l'on ait*

$$(1.5) \quad A(f) = K[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+2}; f],$$

*où le facteur numérique  $K$  ne dépend pas de la fonction  $f$ .*

La relation d'égalité (1.5) exprime une propriété de la moyenne et appartient à Tiberiu Popoviciu [9]. *Les conditions qui assurent la valabilité* de la Proposition 1.1 ont à la base la notion de fonction d'ordre  $n$  sur  $[a, b]$ . Tiberiu Popoviciu a construit la théorie des fonctions d'un ordre  $n \geq -1$ , fixé, sur un ensemble quelconque de  $\mathbb{R}$ , contenant au moins  $n + 2$  points distincts [8], [9]. Évidemment, cette théorie a imprimé une orientation spéciale à l'élaboration du programme de l'Institut.

Pour préciser les idées, considérons l'ensemble  $\mathcal{P}_m$  des polynômes de degré au plus égal à  $m$ ,  $m \geq 0$ . Pour un élément  $P \in \mathcal{P}_{n+1}$  nous utilisons la notation

$$(1.6) \quad P = \sum_{i=0}^{n+1} a_i e_i,$$

où  $e_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $e_i(x) = x^i$  pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$ . Soit  $E \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble ayant au moins  $n+2$  points distincts. Considérons les points distincts

$$(1.7) \quad x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$$

de l'ensemble  $E$ . Quand il sera nécessaire on supposera

$$(1.8) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}.$$

Dans la théorie des fonctions d'ordre  $n$ , au sens de Tiberiu Popoviciu, interviennent les opérateurs d'interpolation de Lagrange

$$(1.9) \quad L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; \cdot)$$

définis sur l'ensemble des fonctions réelles, définies sur les points (1.7), les valeurs de (1.9) étant des polynômes de  $\mathcal{P}_{n+1}$ . Dans la théorie dont nous parlons interviennent, aussi, les opérateurs

$$(1.10) \quad L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \cdot)$$

ayant comme ensemble de définition l'ensemble de fonctions définies sur les points distincts  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ , les valeurs de (1.10) étant dans l'ensemble  $\mathcal{P}_n$ .

On a pour  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1.11) \quad L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f)(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+2.$$

On a, aussi

$$(1.12) \quad L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Le nombre (1.2) est le coefficient de  $e_{n+1}$  dans la représentation sous la forme (1.6) du polynôme

$$(1.13) \quad L(\mathcal{P}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f).$$

Dans la théorie des fonctions d'ordre  $n$  on considère les deux définitions de Tiberiu Popoviciu [9] qui vont suivre.

Soit, d'abord,  $X \subseteq E$  un ensemble ayant au moins  $n+2$  points distincts.

DÉFINITION 1.1. La fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  s'appelle

(1.14) *convexe (non-concave, polynômiale, non-convexe, respectivement concave) d'ordre  $n$  sur l'ensemble  $X$ , si l'on a*

$$(1.15) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] > (\geq, =, \leq \text{ respectivement } <) 0$$

quels que soient les points (1.7) de  $X$  (qui ont été supposés distincts dans la formule (1.7)).

Si l'ensemble  $X$  se réduit à l'ensemble des point (1.7), alors, dans (1.14) interviennent seulement les trois cas

$$(1.16) \quad \text{convexe (polynômiale, respectivement concave)}$$

et dans (1.15), seulement les cas

$$(1.17) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] > (=, \text{ respectivement } <) 0.$$

DÉFINITION 1.2. *La fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  s'appelle*

$$(1.18) \quad \text{convexe (non-concave, polynômiale, non-concave, respectivement concave) d'ordre } n$$

sur l'ensemble  $X$ , si l'on a

$$(1.19) \quad \begin{aligned} f(x_{n+2}) - L(\mathcal{P}_n; x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)(x_{n+2}) = \\ = (x_{n+2} - x_1)(x_{n+2} - x_2) \dots (x_{n+2} - x_{n+1})[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] > \\ > (\geq, =, \leq \text{ respectivement } <) 0 \end{aligned}$$

quels que soient les points (1.8) de l'ensemble  $X$ .

Comme plus haut, on peut, aussi, considérer, le cas dans lequel  $X$  se réduit à l'ensemble des point (1.8).

On remarque que les deux définitions 1.1 et 1.2 de Tiberiu Popoviciu (qui dans le cas (1.8) sont équivalentes) s'obtient en comparant la fonction  $f$  avec les éléments de l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$ , dans le premier cas, et avec les éléments de  $\mathcal{P}_n$ , dans le deuxième cas. On remarque, donc, encore, qu'on arrive à la notion de fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  d'ordre  $n \geq -1$  sur  $X$  (c'est à dire convexe (non-concave, polynômiale, non-concave ou bien concave)) en considérant les fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne se réduisent pas à des éléments de  $\mathcal{P}_{n+1}$  et qui ont une des propriétés contenues dans (1.15) ou bien dans (1.19).

L'Analyse Numérique moderne ne peut pas être imaginée sans la Théorie des Fonctions d'Ordre Supérieur et leur généralisations. La remarque reste valable, aussi, pour les chapitres de l'Analyse Fonctionnelle qui ont comme objet la Théorie de l'Approximation.

## 2.

Les définitions, les théorèmes, les démonstrations qui font l'objet de la Théorie de Fonctions d'Ordre Supérieur ont à la base les propriétés et le calcul des différences divisées. Il s'agit, donc, d'une théorie linéaire. La question qui se pose, donc, est de développer le point de vue de Tiberiu Popoviciu en deux directions. Premièrement j'ai considéré une généralisation qui garde le caractère linéaire mais dans laquelle les points d'interpolation (1.7) n'interviennent plus. Une deuxième manière de recherche fait intervenir les ensembles interpolatoires qui ne sont plus supposés linéaires. Pour les deux domaines de recherche qui en résultent on peut consulter [16], [17], [19].

En désignant par  $S$  un espace linéaire et par

$$(2.1) \quad S_1 \subset S_2 \subset S_3$$

des sous-espaces de  $S$ , on considère les ensembles d'opérateurs

$$(2.2) \quad \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3$$

où

$$(2.3) \quad \mathcal{U}_k \subset \{T|T : S \rightarrow S\}, \quad \mathcal{U}_k \neq \emptyset, \quad k = 1, 2, 3.$$

Supposons que l'on a

$$(2.4) \quad \forall x \in S, \forall U \in \mathcal{U}_k \Rightarrow U(x) \in S_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$(2.5) \quad \forall x \in S_k, \forall U \in \mathcal{U}_k \Rightarrow U(x) = x, \quad k = 1, 2, 3.$$

On remarque [16], [17], [19] que pour obtenir des propriétés semblables à celles qui se trouvent dans la Théorie des Fonctions d'Ordre Supérieur on peut considérer les éléments  $x \in S$  qui ont l'une des propriétés

$$(2.6) \quad \forall U \in \mathcal{U}_2 \Rightarrow U(x) \notin S_1,$$

$$(2.7) \quad \forall U_1 \in \mathcal{U}_1, \forall U_2 \in \mathcal{U}_1, U_1 \neq U_2 \Rightarrow U_1(x) \neq U_2(x).$$

La propriété (2.6) est semblable à celle d'une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  d'être convexe ou bien concave au sens de la Définition 1.1 ou au sens de la Définition 1.2. J'ai donné, aussi, d'autre interprétation dans [16].

### 3.

Considérons l'ensemble

$$(3.1) \quad F \subset C[a, b]$$

et un entier  $m \geq 1$  fixé.

**DÉFINITION 3.1.** *On dit que  $F$  est un ensemble interpolatoire d'ordre  $m$  sur l'intervalle  $[a, b]$  si quels que soient les points distincts*

$$(3.2) \quad v_1, v_2, \dots, v_m$$

*de l'intervalle  $[a, b]$  et quelle que soit la fonction*

$$(3.3) \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

*il existe dans  $F$  une fonction  $l$  et une seule, de telle manière que l'on a*

$$(3.4) \quad l(v_i) = f(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

*Pour la fonction  $l \in F$  j'ai utilisé la notation*

$$l = L(F; v_1, v_2, \dots, v_m; f)$$

qu'on trouve dans mes travaux [16], [17], [19] et en d'autres.

Considérons, maintenant, les points

$$(3.5) \quad v_1 < v_2 < \dots < v_m < v_{m+1}$$

de l'intervalle  $[a, b]$ .

DÉFINITION 3.2. *On dit que la fonction (3.3) est  $F$ -convexe ( $F$ -concave) sur  $[a, b]$ , si quels que soient les points (3.5), de l'intervalle  $[a, b]$ , l'on a*

$$(3.6) \quad l(v_{m+1}) < f(v_{m+1}) \text{ (respectivement } l(v_{m+1}) > f(v_{m+1}) \text{)}.$$

J'ai considéré, dans mes travaux, les propriétés d'une fonction (3.3) d'être  $F$ -convexe ( $F$ -concave) sur un ensemble quelconque  $E \subseteq [a, b]$  contenant au moins  $m + 1$  points distincts.

Soit, maintenant  $p \geq 0$  un entier et  $F$  interpolatoire d'ordre  $m$  sur  $[a, b]$ .

DÉFINITION 3.3. *On dit que la fonction (3.3) est  $(m+p)$ -valente, par rapport à  $F$ , sur  $[a, b]$ , si elle prend les valeurs de n'importe quelle fonction de  $F$  sur au plus  $m + p$  points distincts de  $[a, b]$ .*

On donne une définition analogue, en considérant au lieu de  $[a, b]$  un ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  contenant un nombre suffisant de points, ainsi que la propriété de  $(m + p)$  valence ait un sens.

Dans les recherches de [4] et encore d'autres, la propriété donnée par la Définition 3.3 a été remarquée et on en a donné des applications.

Dans le cas particulier dans lequel  $p = 0$ , on retrouve, pour  $m = n + 1$  et  $F = \mathcal{P}_n$ , la propriété de  $(n + 1)$ -valence par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_n$ , considérée par Tiberiu Popoviciu [8], [9].

#### 4.

Pour pouvoir souligner la signification des définitions et des propriétés considérées plus haut, je donnerai, en quelques mots les notions les plus importants qui se trouvent à la base de la Théorie de l'Allure que j'ai élaborée [16], [17], [18], [19], [20], [21].

Soient  $A$  et  $B$  des ensembles non-vides et l'ensemble, aussi, non-vide

$$(4.1) \quad \mathcal{T} \subset \{T|T : A \rightarrow B\}.$$

On considère la partition

$$(4.2) \quad B = \bigcup_{j=1}^h B_j, \quad h \geq 2, \quad B_i \cap B_k = \emptyset \text{ pour } i \neq k.$$

DÉFINITION 4.1. *L'élément  $a \in A$  a l'allure*

$$(4.3) \quad (B_i, T)$$

si l'on a

$$(4.4) \quad T(a) \in B_i.$$

DÉFINITION 4.2. *L'élément  $a \in A$  a l'allure*

$$(4.5) \quad (B_i, \mathcal{T})$$

si l'on a

$$(4.6) \quad T(a) \in B_i$$

quels que soient les opérateurs  $T \in \mathcal{T}$ .

J'ai essayé plusieurs fois de considérer des allures qui sont comparables dans un sens qui doit être précisé. On remarque que dans les relations (4.3) et (4.5) interviennent deux composantes. Pour comparer, donc, deux allures, on peut se rapporter à chacune des composantes. Dans mes travaux [17], [21] j'ai considéré la deuxième composante. Maintenant je vais considérer la première composante.

Considérons, pour l'ensemble  $B$  les deux partitions

$$(4.7) \quad B = \bigcup_{j=1}^{h_1} B_j^{(1)}, \quad h_1 \geq 2$$

et

$$(4.8) \quad B = \bigcup_{j=1}^{h_2} B_j^{(2)}, \quad h_2 \geq 2.$$

On peut donc, considérer, pour un élément  $a \in A$  les allures

$$(4.9) \quad (B_i^{(1)}, T), \text{ quand } T(a) \in B_i^{(1)}, \text{ pour un } T \in \mathcal{T},$$

$$(4.10) \quad (B_i^{(1)}, \mathcal{T}), \text{ quand } T(a) \in B_i^{(1)},$$

quels que soient les opérateurs  $T \in \mathcal{T}$  et, en même temps, les allures

$$(4.11) \quad (B_i^{(2)}, T), \text{ quand } T(a) \in B_i^{(2)},$$

pour un  $T \in \mathcal{T}$  et

$$(4.12) \quad (B_i^{(2)}, \mathcal{T}), \text{ quand } T(a) \in B_i^{(2)}$$

quels que soient les opérateurs  $T \in \mathcal{T}$ .

On a, maintenant, la suivante définition.

DÉFINITION 4.3. *Si les nombres  $h_1$  et  $h_2$  satisfont l'inégalité*

$$(4.13) \quad h_1 < h_2,$$

alors nous disons que les allures (4.11) respectivement (4.12) sont plus fines que les allures (4.9) respectivement (4.10). On utilise, aussi, en gardant la condition (4.13), les locutions: les allures (4.9) respectivement (4.10) sont plus grossières que les allures (4.11) respectivement les allures (4.12).

Pour des exemples concernant la notion d'allure on peut consulter [16], [4], [18]. On en trouve, aussi, des exemples et des applications dans les travaux de mes disciples [1], [2], [3], [5], [6], [7], [22], [23].

## 5.

Pour un entier  $n \geq 1$  fixé, considérons les deux ensembles interpolatoires

$$(5.1) \quad \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}.$$

Considérons, aussi, la partition

$$(5.2) \quad \mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_{n+1}^{eff}.$$

On a désigné par

$$(5.3) \quad \mathcal{P}_{n+1}^{eff}$$

l'ensemble des éléments de  $\mathcal{P}_{n+1}$  dont le degré ne se réduit pas à  $n$ .

LEMME 5.1. *Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est  $(n+1)$ -valente par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_n$ , sur  $E$ , alors son image obtenue par n'importe quel polynôme d'interpolation de l'ensemble  $\mathcal{P}_{n+1}$  appartient à l'ensemble (5.3).*

On a supposé que l'ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}$  contient au moins  $n+2$  points distincts. Le Lemme 5.1 a comme conséquence la suivante proposition.

PROPOSITION 5.1. *La propriété de la fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  d'être  $(n+1)$ -valente, sur  $E$ , par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  est une allure.*

Supposons maintenant que l'ensemble  $E$  contient, comme plus haut, au moins  $n+2$  points distincts. Soit, aussi, la partition

$$(5.4) \quad \mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_{n+1}^+ \cup \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_{n+1}^-,$$

la notation étant celle que j'ai utilisée dans [16], [17], [19], [20].

THÉOREME 5.1. *L'allure de la fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  d'être  $(n+1)$ -valente par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_n$ , sur  $E$ , est plus grossière que l'allure d'être convexe d'ordre  $n$  ou bien concave d'ordre  $n$  sur  $E$ .*

On peut formuler une remarque concernant le cas  $E = [a, b]$  dans lequel la condition d'être  $(n+1)$ -valente sur  $[a, b]$ , par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_n$  n'est pas suffisante pour que la fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  soit convexe ou concave d'ordre  $n$  sur  $[a, b]$ . Il faut donc ajouter à la  $(n+1)$ -valence encore une condition, comme, par exemple, la continuité sur l'intervalle  $[a, b]$ .



## 6.

Considérons, maintenant, les ensembles



$$(6.1) \quad F \subset G$$

et supposons que  $F$  est interpolatoire d'ordre  $m$  sur  $[a, b]$  et  $G$  un ensemble interpolatoire d'ordre  $m + 1$  sur  $[a, b]$ , l'entier  $m \geq 1$  étant fixé. Avec une partition convenable de  $G$ , on remarque que la  $F$ -convexité sur  $[a, b]$ , respectivement la  $F$ -concavité sur  $[a, b]$  d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est plus fine que l'allure d'être  $m$ -valente par rapport à  $F$  de la fonction  $f$ . Pour obtenir ce résultat on peut se baser sur le fait que les éléments de l'ensemble  $G$  qui n'appartiennent pas à  $F$  sont  $m$ -valentes par rapport à  $F$  sur  $[a, b]$ .

Revenons, maintenant, un peut, au triplet (2.1) de sous-espaces de  $S$  et au triplet (2.2) d'ensembles d'opérateur d'interpolation. Il faut expliquer la présence de 3 sous-espaces au lieu de 2 sous-espaces. On remarque que les éléments  $x \in S$  pour lesquels l'image  $U(x) \notin S_1$ , quels que soient les opérateurs  $U \in \mathcal{U}_3$  ont, dans cette théorie, un rôle special à cause du quel ils sont semblables avec les fonctions  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui ont la propriété de  $(m + 2)$ -valence par rapport à l'ensemble  $\mathcal{P}_m$  (qui est interpolatoire d'ordre  $m + 1$  sur  $\mathbb{R}$ ) sur un ensemble contenant au moins  $m + 2$  points distincts.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CRISTESCU, G., *L'extension des notions de comportement et d'approximation aux certains domaines particuliers de la recherche*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1998 (en roumaine).
- [2] IACOB, E. M., *Convexité, approximation et optimisation sur les reseaux*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1998 (en roumaine).
- [3] IVAN, M., *Procédés d'interpolation et leur applications*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1982 (en roumaine).
- [4] HAUPT, O., *Zur Verallgemeinerung der konvexen Funktionen und Kurven*, Bull. Soc. Math. Grèce Nouv. Sér., **6**, pp. 1–26, 1965.
- [5] MARIAN, D., *Analyse mathématique sur des graphes et sur des reseaux*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 2002 (en roumaine).
- [6] MOȚ, G., *Sur certaines implications de la théorie générale de la convexité dans la géométrie*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1998 (en roumaine).
- [7] LUPȘA, L., *Problèmes particuliers de programmation linéaire ou non-linéaire*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1981 (en roumaine).
- [8] POPOVICIU, T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica, **8**, pp. 1–85, 1934.
- [9] POPOVICIU, T., *Les fonctions convexes*, Actualités Sci. Ind., no. 992., Hermann et Cie, Paris, 1944.
- [10] POPOVICIU, T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, Mathematica, **10**, pp. 59–64, 1934.
- [11] POPOVICIU, T., *Remarques sur la définition fonctionnelle d'un polynôme d'une variable réelle*, Mathematica, **12**, pp. 5–12, 1936.
- [12] POPOVICIU, T., *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur*, Revue Math. de l'Union Interbalkanique, **2**, pp. 31–40, 1939.

- [13] POPOVICIU, T., *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. de la Section Sc. Acad. Roumaine, **20**, pp. 45–49, 1938.
- [14] POPOVICIU, T., *Sur la meilleure approximation des fonctions continues par des polinômes*, Ed. Ardealul, Cluj, 1937 (en roumaine).
- [15] POPOVICIU, T., *Sur une généralisation des fonctions spline*, Mathematical Structures, Computational Mathematical Modeling (Sofia), pp. 405–410, 1957.
- [16] POPOVICIU, E., *Théorèmes de la moyenne de l'Analyse Mathématique et leur liaison avec la Théorie de l'Interpolation*, Ed. Dacia, Cluj, 1972 (en roumaine).
- [17] POPOVICIU, E., *Sur une allure de quasi-convexité d'ordre supérieur*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, **11**, pp. 129–137, 1982. 
- [18] POPOVICIU, E., *Sur certaines propriétés des fonctions quasi-convexes*, L'Analyse Numérique et la Théorie de l'Approximation, **12**, pp. 175–186, 1983. 
- [19] POPOVICIU (MOLDOVAN), E., *Sur une généralisation des fonctions convexes*, Mathematica, **1(24)**, pp. 49–80, 1959.
- [20] POPOVICIU, E., *Sur quelques moments significatifs dans le développement de la théorie de la convexité*, Seminaire Itinerant “Tiberiu Popoviciu” d'Equations Fonctionnelles, Approximation, Convexité, Cluj-Napoca, pp. 89–92, 1995.
- [21] POPOVICIU, E., *Allures qui sont liées aux certains problèmes*, Sémin. de la Théorie de la Meilleure Approximation, Convexité et Optimization, Ed. SRIMA, Cluj-Napoca, pp. 243–253, 2000.
- [22] PRECUP, R., *Propriétés d'allures et certaines applications*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1985 (en roumaine).
- [23] RAŞA, I., *Fonctionnelles simples au sens de Tiberiu Popoviciu*, Thèse de doctorat, Université Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 1982 (en roumaine).

Received by the editors: March 15, 2002.