REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 36 (2007) no. 1, pp. 97–106
ictp.acad.ro/jnaat

APPLICATION DES MÉTHODES D'OPTIMISATION POUR LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME D'INÉGALITÉS VARIATIONNELLES

SAMIA RADJEAI*, ABDELKRIM KERAGHEL* and DJAMEL BENTERKI*

Abstrait. Le problème d'inégalités variationnelles, lancé au milieu des années soixantes par Hartman et Stampacchia dans le cadre du calcul des variations, et celui des problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles, prend depuis quelques années une importance grandissante dans l'étude théorique et le traitement numérique de plusieurs types de problèmes pratiques et scientifiques d'intérêt capital.

Les techniques d'optimisation constituent un bon stimulant conduisant à une méthodologie riche et pleine d'expériences. A ce propos, ce problème est converti en un problème d'optimisation équivalent, avec ou sans contraintes, ayant les propriétés requises pour un traitement convenable.

Notre travail, se rattache à des méthodes d'optimisation sans contraintes. Nous avons pu mettre en œuvre plusieurs versions de ces algorithmes présentées dans un cadre comparatif signifiant, à travers des problèmes mathématiques importants.

MSC 2000. 90C33, 90C30, 65H10.
Mots clé. Problème d'Inégalités Variationnelles, Fonctions de Mérite, Optimisation Sans Contraintes, Méthode de premier ordre, Méthode de second ordre.

1. INTRODUCTION

Le problème d'inégalités variationnelles (VIP) consiste à:

$$(VIP)\left\{\begin{array}{c}\text{trouver } x^* \ \in C \text{ tel que:}\\ \langle F(x^*), x-x^*\rangle \geq 0, \forall x\in C,\end{array}\right.$$

où $F:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur continu, différentiable et $C\subseteq \mathbb{R}^n$.

Ce problème (VIP) joue un grand rôle dans plusieurs domaines (problème d'équilibre en économie, la théorie des jeux, calcul variationnel, problème de transport en recherche opérationnelle), il constitue également, une formulation générale de plusieurs problèmes mathématiques importants (l'optimisation convexe différentiable, le problème de projection, les systèmes non linéaires, les problèmes de complémentarité linéaire et non linéaire).

*Département de Mathématiques, Faculté des sciences, Université Ferhat Abbas, Sétif, 19000, Algérie. e-mail: kettab2@yahoo.fr, a_keragheldz@yahoo.fr, dj_benterki@yahoo.fr.

Récemment, (VIP) a connu une évolution remarquable tant sur le plan théorique que sur celui de la pratique. Des efforts considérables ont été effectués un peu partout dans le monde, visant la mise au point d'une véritable méthodologie pour (VIP).

Notre travail rentre dans le cadre d'une étude qualitative et adaptative des investigations, introduites tout récemment, concernant la résolution effective de (VIP) via des techniques d'optimisation.

L'approche en vue, est celle des fonctions de mérite qui passe par la conversion de (VIP) en un problème d'optimisation sans contraintes intéressant:

$$(VIP) \Leftrightarrow (P) \begin{cases} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Les algorithmes les plus illustres proposés dans ce contexte, nécessitent à chaque itération la résolution d'un sous problème variationnel affine pour déterminer la direction de descente. Ce dernier fait l'objet de nombreuses études concernant l'existence, l'unicité de la solution et la mise au point d'une procédure de résolution adéquate. Ce papier est organisé comme suit, dans la section 2 on présente le problème d'optimisation sans contraintes équivalent au problème d'inégalité variationnel (VIP). Dans la section 3 on s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation en utilisant deux algorithmes de premier et second ordre. D'autre part, à travers une étude théorique approfondie, on donne les conditions d'existence et d'unicité de la solution du sous-problème variationnel affine tout en dégageant les difficultés d'ordre pratique rencontrées au niveau de la résolution. Enfin, des résultats comparatifs signifiants sont présentés et analysés dans la dernière section.

2. PROBLÈME D'OPTIMISATION ÉQUIVALENT À (VIP)

L'idée générale consiste à transformer (VIP) en un problème d'optimisation différentiable avec ou sans contraintes dont le point stationnaire est une solution de (VIP).

Définition 1. *La fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est dite une fonction de mérite pour* (VIP) *si* $\arg\min_C f(x)$ *coïncide avec l'ensemble des solutions de* (VIP). *Ici* $\arg\min_C f(x)$ *désigne l'ensemble des minimiseurs globaux de* f *sur* C.

Ceci motive, la transformation de (VIP) en problème d'optimisation de la forme:

$$(P) \begin{cases} \min \ f(x) \\ x \in C, \end{cases}$$

où on peut envisager des méthodes de déscente à convergence globale.

La première fonction de mérite proposée est dûe à Auslender [3]:

$$f(x) = \max_{y \in C} \{F(x)^{\mathrm{t}}(x - y)\}.$$

Malheureusement, cette fonction n'est pas nécessairement différentiable.

Auchmuty et Fukushima [3] ont considéré la fonction régularisée:

$$f_\gamma(x) = \langle F(x), x - y_\gamma(x)\rangle - \tfrac{\gamma}{2}\left\|y_\gamma(x) - x\right\|^2,$$

où $y_\gamma(x) = \mathrm{Pr}_C(x - \gamma^{-1}F(x))$ est la projection de $(x - \gamma^{-1}F(x))$ sur C.

Pour transformer (VIP) en un problème d'optimisation sans contraintes, Peng [5] a proposé la fonction:

$$M_\alpha(x) = \tfrac{1}{\alpha} f_\alpha(x) - \alpha f_{\frac{1}{\alpha}}(x), \quad \alpha > 1,$$

cette dernière est généralisée par Fukushima et al. [7] par:

$$g_{\alpha\beta}(x) = f_\alpha(x) - f_\beta(x)/\beta > \alpha > 0.$$

Alors:

$$(VIP) \Longleftrightarrow (P)\begin{cases} \min\ \mathrm{g}_{\alpha\beta}(x) \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

et on a le résultat devenu classique:

Théorème 1. [9] *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $\nabla g_{\alpha\beta}(x) = 0$*, si la matrice jacobienne* $\nabla F(x)$ *de l'opérateur* F *est définie positive, alors* x *est une solution de* (VIP).

3. RÉSOLUTION DU PROBLÈME (P)

3.1. Méthode de premier ordre. On vérifie trivialement que si $\nabla g_{\alpha\beta}(x^k) \neq 0$, alors $\mathrm{d}^k = -\nabla g_{\alpha\beta}(x^k)$ est une direction de descente pour $g_{\alpha\beta}$ en x^k, d'où la possibilité de résoudre le problème (P) par une méthode de gradient classique. x^k ici désigne l'itéré à l'étape k.

On peut également envisager une méthode de premier ordre plus attractive utilisant la direction de Fukushima [4] donnée par:

$$d^k = y_\alpha(x^k) - y_\beta(x^k) + \rho(\alpha(x^k - y_\alpha(x^k)) - \beta(x^k - y_\beta(x^k)),$$

où $\rho > 0$ (suffisamment petit).

Un premier algorithme prototype peut ainsi être défini comme suit:

Algorithme 1.
Début algorithme
Données: $\varepsilon > 0$; $\rho > 0$; α, $\beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\beta > \alpha > 0$,

a) *Initialisation:* $x^0 \in \mathbb{R}^n$; $k = 0$;
b) *Calculer:*
   - $y_\gamma(x^k) = \mathrm{Pr}_C(x^k - \gamma^{-1}F(x^k),\ \gamma \in \{\alpha, \beta\}$;
   - $d(x^k) = \nabla F(x^k)(y_\alpha(x^k) - y_\beta(x^k)) - \beta(x^k - y_\beta(x^k)) + \alpha(x^k - y_\alpha(x^k))$ *ou*
   - $d(x^k) = y_\alpha(x) - y_\beta(x) + \rho(\alpha(x - y_\alpha(x)) - \beta(x - y_\beta(x)))$;
   - *Si* $\left\|d(x^k)\right\| \leq \varepsilon$ *stop:* x^k *est une solution de* (VIP);
   - *Sinon aller en* c).
c) *Calculer:*

– $t_k = \arg\min f(x^k + td(x^k))$, $t \in]0,1[$ *(recherche linéaire);*
– $x^{k+1} = x^k + t_k d(x^k)$*;*

d) *prendre* $k = k + 1$ *et retour en* b).

Fin algorithme.

Remarque 1.

- *La convergence de l'algorithme est globale.*
- *Le calcul de la projection dans* $d(x^k)$ *n'est pas évident pour* C *quelconque.*
- *La détermination de* t_k *nécessite une procédure convenable basée sur des règles de sélection du type Armijo.* □

3.2. Méthode du second ordre. La dérivée seconde de la fonction de mérite $g_{\alpha\beta}$ n'étant pas disponible, Peng et Fukushima [6] ont proposé en 1998 la méthode de Newton hybride (NH) suivante:

3.2.1. *Principe de la méthode* (NH). La direction de déplacement est donnée par $d(x) = z(x) - x$ où $z(x)$ est une solution du problème variationnel linéarisé $(VIP)_L$:

$$(VIP)_L \begin{cases} \text{trouver } \ z \in C \text{ tel que:} \\ \quad \left\langle F(x^k) + \nabla F(x^k)^t (z - x^k), x - z \right\rangle \geq 0, \ \forall x \in C. \end{cases}$$

Remarque 2. $d(x)$ *est une direction de type Newton, qui assure la décroissance de la fonction de mérite* $g_{\alpha\beta}$ *en* x, *et on a le résultat suivant:* □

Lemme 1. *Supposons que* $\nabla F(x)$ *est une matrice définie positive,* $\forall x \in \mathbb{R}^n$. *Si* x *n'est pas une solution de* (VIP), *alors* $d(x) = z(x) - x$ *est une direction de descente de* $g_{\alpha\beta}$.

Notons que la démonstration de ce résultat est très fastidieuse et impose des conditions supplémentaires sur les paramètres α et β .

Algorithme 2. (NH)
Début algorithme
Données: $\zeta, \varepsilon > 0$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $\beta > \alpha > 0$.

a) *Initialisation:* $x^0 \in \mathbb{R}^n$*;* $k = 0$*;*

b) *Calculer:*
– $g_{\alpha\beta}(x^k) = \left\langle F(x^k), y_\beta(x^k) - y_\alpha(x^k) \right\rangle - \frac{\alpha}{2} \left\| y_\alpha(x^k) - x^k \right\|^2 + \frac{\beta}{2} \left\| y_\beta(x^k) - x^k \right\|^2$;
– $\nabla g_{\alpha\beta}(x^k) = \nabla F(x^k)(y_\beta(x^k) - y_\alpha(x^k)) + \beta(x^k - y_\beta(x^k)) - \alpha(x^k - y_\alpha(x^k))$;
– *Si* $\left| g_{\alpha\beta}(x^k) \right| \leq \varepsilon$ *ou* $\left\| \nabla g_{\alpha\beta}(x^k) \right\| \leq \varepsilon$ *Stop:* x^k *est une solution de* (VIP)*;*
– *Sinon aller en* c).

c) *Calculer:*

– $d^k = z^k - x^k$, *tel que* z^k *solution du sous problème variationnel linéarisé*

$$(VIP)_k \begin{cases} z^k \in C \\ \left\langle F(x^k) + \nabla F(x^k)^{\mathrm{t}}(z^k - x^k), y - z^k \right\rangle \geq 0, \forall y \in C \end{cases}$$

– *Si* $g_{\alpha\beta}(x^k + d^k) \leq \zeta g_{\alpha\beta}(x^k)$, *prendre* $\lambda_k = 1$ *et aller en* e)*;*

– *Sinon prendre* $d^k = -\nabla g_{\alpha\beta}(x^k)$ *et aller en* d)*.*

d) *Calculer:*

– $\lambda_k = \arg\min\ g_{\alpha\beta}(x^k + \lambda d^k)\ \lambda \in [0,1]$ *et aller en* e)

e) *Calculer* $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$

f) *Prendre* $k = k + 1$ *et retour en* b)*.*

Fin algorithme.

3.2.2. *Propriétés de l'algorithme.*
Avantages: La convergence de l'algorithme est globale et superlinéaire.
Difficultés:

- Le calcul de la projection dépend directement de la structure de l'ensemble C.
- L'algorithme nécessite la résolution du sous problème variationnel linéarisé $(VIP)_L$ à chaque itération qui domine le coût de calcul.
- Le choix pratique des paramètres α et β n'est pas bien établi.

3.2.3. *Résolution du* $(VIP)_L$*.* La résolution du problème (VIP) dépend en grande partie de celle du sous problème $(VIP)_L$. A ce propos, il faut étudier: l'éxitence, l'unicité de la solution et proposer une méthode convenable pour calculer cette solution.
a) Existence de la solution.

Lemme 2. [6] *Soit* $x \in \mathbb{R}^n$ *et considérons le problème* $(VIP)_L$*.*
Si $\nabla F(x)$ *est une matrice définie positive, alors* $(VIP)_L$ *admet une solution unique* $z(x)$ *et on a:*

$$x \text{ est une solution de (VIP)} \iff z(x) = x.$$

b) Méthode de résolution du sous problème (problème ouvert). Conformément aux structures spécifiques de l'ensemble C, on peut envisager à priori deux alternatives pour résoudre $(VIP)_L$:
1) Méthode de projection. Cette méthode est utulisée dans le cas où l'ensemble C possède une structure simple ($C = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+$, un hypercube, etc.,...) auquel cas le calcul de la projection est trivial.

Le schéma itératif de base pour ces méthodes est le suivant:

$$x^{k+1} = \mathrm{Pr}_C(x^k - \lambda F(x^k)),$$

où λ est une constante positive.

Nous avons considéré une méthode de projection proposée à l'origine par He, Solodov et Tseng (HST) [1], pour résoudre les problèmes d'inégalités variationnelles linéaires, qui nécessite une seule projection par itération.

Posons:

$$\begin{aligned}&\nabla F(x^k) = Q,\ \ F(x^k) - \nabla F(x^k)x^k = q\\&G(z) = Qz + q.\end{aligned}$$

Le problème $(VIP)_L$ s'écrit alors sous la forme:

$$(VIP)_L \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } z \in C \text{ tel que:} \\ \langle Qz + q, x - z\rangle \geq 0,\ \forall x \in C \end{array}\right.$$

l'algorithme correspondant est le suivant:

Algorithme 3. (HST)
Début algorithme
Données: $\varepsilon > 0$.

- *Initialisation:* $z^0 \in C,\ k = 0$.
- *Calculer:*
  - $e(z^k) = z^k - \ \mathrm{Pr}_C(z^k - G(z^k))$

Tant que $\left\|e(z^k)\right\| > \varepsilon$ *faire:*

-
  - *Calculer*
    - $\gamma_k = \frac{\left\|e(z^k)\right\|^2}{\left\|(I+Q^t)e(z^k)\right\|^2}$
    - $z^{k+1} = z^k -\ \gamma_k(I + Q^t)e(z^k)$
  - *Prendre* $k = k + 1$

Fin tant que.
Fin algorithme.

Lemme 3. *Si:*

- *Q est une matrice semi-définie positive,*
- *L'ensemble des solutions de $(VIP)_L$ n'est pas vide.*

Alors: la suite $\{z^k\}$, générée par l'algorithme de (HST)*, converge vers une solution de $(VIP)_L$.*

2) Méthode d'optimisation. Rappelons que si F est le gradient d'une fonction convexe différentiable f quelconque, alors (VIP) n'est que la condition nécessaire et suffisante d'optimalité du problème d'optimisation convexe:

$$(P) \left\{ \begin{array}{c} \min f(x) \\ x \in C \end{array}\right.$$

Appliquons ce résultat sur le sous problème variationnel linéarisé:

$$(VIP)_L \left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } z^* \in C \\ \langle F_k(z^*), x - z^*\rangle \geq 0, \forall x \in C \end{array}\right.$$

avec:

$$F_k(z) = \nabla F(x^k)z + F(x^k) - \nabla F(x^k)x^k = \nabla G(z),$$

et

$$G(z) = \frac{1}{2} z^T \nabla F(x^k)z + (F(x^k) - \nabla F(x^k)x^k)z.$$

Donc, $(VIP)_L$ est équivalent au problème d'optimisation suivant:

$$(P)_L \begin{cases} \min G(z) \\ z \in C. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème $(P)_L$, on distingue en particulier les deux cas suivants:

1) C est un polyèdre convexe, i.e.

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b,\ x \geq 0\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m.$$

Le problème d'optimisation équivalent à $(VIP)_L$ est un problème quadratique convexe:

$$(PQ) \begin{cases} \min\ (\frac{1}{2} z^{\mathrm{t}} \nabla F(x) z + (F(x) - \nabla F(x) x) z \\ Az = b, \quad z \geq 0 \end{cases}$$

qu'on peut résoudre moyennant un algorithme spécifique au problèmes de la programmation quadratique convexe.

2) C est de la forme

$$C = \{z \in \mathbb{R}^n |\ f_i(z) \leq 0, i = 1, ..., m\}.$$

Dans ce cas, z^* est une solution de $(P)_L \Leftrightarrow \exists \lambda^* \in \mathbb{R}^m_+$ tel que (z^*, λ^*) est une solution du système:

$$(KT) \begin{cases} \nabla G(z) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(z) = 0, \\ \lambda_i f_i(z) = 0, \qquad i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Ce problème peut être résolu par une technique convenable aux systèmes non linéaires.

3.2.4. *Convergence de l'algorithme (NH).*

Théorème 2. [6] *Supposons que F est un opérateur continu et différentiable et soit $\{x^k\}$ la suite générée par l'algorithme* (NH).

Alors, tout point d'accumulation x^* de la suite $\{x^k\}$ est un point stationnaire pour la fonction $g_{\alpha\beta}$.

Théorème 3. [9] *Supposons que l'opérateur F est continu, différentiable et fortement monotone.*

Alors, pour tout point $x^0 \in \mathbb{R}^n$, la suite générée par l'algorithme (NH) *converge vers la solution unique de (VIP).*

4. IMPLÉMENTATIONS NUMÉRIQUES

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement numérique des algorithmes présentés dans la section 3 dans un cadre comparatif.

On traite des classes de (VIP) connues par leurs importance en analyse numérique:

- Les systèmes d'équations ($C = \mathbb{R}^n$): la projection $y_\gamma(x)$ est triviale.

- Le problème de complémentarité: $\mathbf{C} = \mathbb{R}_+^n$.

La projection $y_\gamma(x) = \Pr_C(x - \gamma^{-1}F(x))$ est donnée par:

$$y_\gamma(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad x_i - \gamma^{-1}F_i(x) \ \leq 0 \\ x_i - \gamma^{-1}F_i(x) \quad \text{si non} \end{cases}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

- (VIP) avec C rectangle de $\mathbb{R}^n$: i.e.,
$C = (\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \mid a_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \, b_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.

La projection $y_\gamma(x) = \Pr_C(x - \gamma^{-1}F(x))$ est donnée par:

$$y_\gamma(x) = \begin{cases} a_i \quad \text{si} \quad x_i - \gamma^{-1}F_i(x) \ \leq 0 \\ x_i - \gamma^{-1}F_i(x) \quad \text{si} \quad a_i \leq x_i - \gamma^{-1}F_i(x) \ \leq b_i, \\ b_i \quad \text{si} \quad x_i - \gamma^{-1}F_i(x) \ \geq b_i \end{cases} \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}$$

Dans un premier temps, on présente des tests numériques effectués sur les trois classes d'exemples cités auparavant, en utilisant l'algorithme I (section 3.1). La direction est calculée de deux façons, une fois par la méthode du gradient classique (G), et une autre fois par celle du descente sans gradient (DSG) dûe à Fukushima.

Tableau 1.

	Taille	Nombre d'itérations		Temps d'exécution (s)	
		G	D-S-G	G	D-S-G
Exemple 1	4	17	11	0.05	0.00
Exemple 2	4	21	16	0.11	0.00
Exemple 3	3	17	10	0.05	0.00
Exemple 4	4	16	26	0.06	0.05
Exemple 5	9	38	17	0.17	0.05
Exemple 6	15	41	36	0.27	0.21
Exemple 7	4	18	10	0.05	0.00
Exemple 8	4	25	19	0.11	0.05
Exemple 9	9	17	17	0.11	0.06
Exemple 10	20	76	21	0.88	0.05

Commentaires des résultats:

Nous remarquons que le calcul de la direction par l'algorithme (DSG) est moins coûteux que l'algorithme (G), du fait que ce dernier demande plus d'itérations et de temps. Ce qui n'est pas surprenant car l'itération de l'algorithme (G) possède plus d'opérations que celle de l'algorithme(DSG).

De toute évidence, il serait intéressant de comparer l'algorithme (DSG) avec l'algorithme (NH) qui utilise une direction du type Newton.

Tableau 2.

	Taille	Nombre d'itérations		Temps d'exécution (s)	
		G	D-S-G	G	D-S-G
Exemple 1	4	1	11	0.05	0.00
Exemple 2	4	1	16	0.05	0.00
Exemple 3	3	1	10	0.00	0.00
Exemple 4	4	2	26	0.16	0.05
Exemple 5	9	17	17	7.08	0.05
Exemple 6	15	26	36	11.28	0.21
Exemple 7	4	1	10	0.00	0.00
Exemple 8	4	2	19	0.16	0.05
Exemple 9	9	1	17	0.00	0.06
Exemple 10	20	–	21	–	0.05

Commentaires des résultats:

On remarque que le nombre d'itérations dans l'algorithme (NH) est nettement inférieur à celui de l'algorithme (DSG). Par contre, le temps de calcul est considérable dans (NH), ceci est dû au calcul coûteux de la solution z^* du sous problème variationnel linéarisé.

4.1. Conclusion. La méthode que nous avons étudié, possède des propriétés théoriques confortables: convergence globale et super-linéaire.

Cependant, son comportement numérique n'a pas la même appréciation du fait que le sous-problème définissant la direction de déplacement reste une véritable gêne malgré les aménagements que nous avons apportés.

Notre étude montre aussi que pour l'instant, les méthodes de premier ordre sont privilégiées numériquement grâce à leur simplicité algorithmique d'une part et leur performance d'autre part.

Les méthodes de second ordre constitueront sans doute l'objet d'études prospères dans un proche avenir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bengheng, H. E., *A class of Projection and Contraction Method for Monotone Variational inequalities*, Applied Mathematics Optimization, **35**, pp. 69–79, 1997.

[2] Bnouhachem, A., *Self-adaptive method for solving general mixed variational inequalities*, Journal Mathematical Analyssis and Applications, **309**, pp. 136–150, 2005.

[3] Fukushima, M., *Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for symmetric variational inequality problems*, Mathematical Programming, **53**, pp. 99–110, 1992.

[4] Fukushima, M., *Merit functions for variational inequality and complementarity problems*, Nonlinear Optimization and applications, Edited bay G. Di pillo and F. Gianness, Plenum publishing Corporation, New York, pp. 155–170, 1996.

[5] Peng, J. M., *Equivalence of variational inequality problems to unconstrained minimization*, Mathematical Programming, **78**, pp. 347–355, 1997.

[6] Peng, J. M. and Fukushima, M., A hyprid Newton method for solving the variational inequality problem via the D-gap function, Mathematical Programming, **2**, pp. 367–386, 1999.

[7] Yamashita, N., Taji, K. and Fukushima, M., *Unconstrained optimization reformulations of Variational inequality problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **92**, pp. 439–456, 1997.

[8] Zhang, J. Z. and Xiu, N. H, *Local convergence behavior of some Projection-type methods for affine variational inequalities,* Journal of Optimization Theory and Applications, **108**, no. 1, pp. 205–216, 2001.

[9] Radjeai, S., *Résolution du problème d'inégalités variationnelles dans* $\mathbb{R}^n$ *par des techniques d'optimisation sans contraintes*, Thèse de Magistter, Université Ferhat Abbas, Sétif, Algérie, 2002.

[10] He, Y., *A new double projection algorithm for variational inequalities*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **185**, pp. 166–173, 2006.

Received by the editors: May 18, 2006.