REVUE D'ANALYSE NUMÉRIQUE ET DE THÉORIE DE L'APPROXIMATION
**Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., vol. 42 (2013) no. 2, pp. 151–160**
ictp.acad.ro/jnaat

# SUR LA SUITE DES OPÉRATEURS BERNSTEIN COMPOSÉS

HEINER GONSKA* and IOAN RAŞA†

**Abstrait.** Nous considérons une suite des opérateurs de Bernstein composés et les formules de quadrature associées avec elles. Nous obtenons des bornes supérieures pour l'erreur de l'approximation de fonctions continues et de l'approximation des integrales de fonctions continues. Les bornes sont données en terme de modules de continuité d'ordre un et deux. Deux inégalités de type Tchebycheff-Grüss sont aussi presentées.

ON THE SEQUENCE OF COMPOSITE BERNSTEIN OPERATORS
**Abstract.** We consider a sequence of composite Bernstein operators and the quadrature formulae associated with them. Upper bounds for the approximation error of continuous functions and for the approximation of integrals of continuous functions are given. The bounds are described in terms of moduli of continuity of order one and two. Two inequalities of Tchebycheff-Grüss-type are also included.

**MSC 2000.** 41A36, 41A15, 65D30.
**Mots clé.** opérateurs de Bernstein composés, formules de quadrature composées, modules de continuité, degré d'approximation, inégalité de type Tchebycheff-Grüss.
**Keywords.** Composite Bernstein operators, composite quadrature formulas, modulus of continuity, degree of approximation, inequalities of Chebyshev-Grüss type.

## 1. INTRODUCTION

Dans l'article [1] D. Bărbosu et D. Miclăuş ont consideré une formule de quadrature basée sur des polynômes de type Bernstein composés. Ils ont donné une inégalité pour le reste de la formule de quadrature pour des fonctions dans la classe $C^2[0,1]$, l'éspace de fonctions définie sur l'intervalle $[0,1]$ ayant deux dérivées continues. Dans cet article nous utilisons les opérateurs introduits par les auteurs cités pour approcher toutes les fonctions dans la classe $C[0,1]$, et nous donnons une évalution de l'erreur en utilisant le deuxième module de continuité.

De plus, nous étudions les itérations d'ordre $r$ des opérateurs lorsque $r \to \infty$.

*University of Duisburg-Essen, Department of Mathematics, D-47048 Duisburg, Germany, e-mail: `heiner.gonska@uni-due.de`.
†Technical University, Department of Mathematics, RO-400020 Cluj-Napoca, e-mail: `Ioan.Rasa@math.utcluj.ro`.

Pour la formule de quadrature de Bărbosu et Miclăuş, nous trouvons l'ordre de grandeur du reste pour toutes les fonctions de l'éspace $C[0,1]$. Notre note contient aussi deux résultats du type Tchebycheff-Grüss concernant la non-multiplicativité de l'opérateur et de la formule de quadrature.

## 2. DEFINITION DES OPÉRATEURS $\overline{B}_{n,m}$

Rappelons les faits suivants:

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ le polynôme de Bernstein de degré $n \in \mathbb{N}$ associé avec $f$ est donné par

$$B_n^{[a,b]}(f;x) = \tfrac{1}{(b-a)^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(x-a)^k(b-x)^{n-k} \cdot f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right).$$

2. Pour $g \in C^2[a,b]$ on a

$$g(x) - B_n^{[a,b]}(g;x) = -\tfrac{(x-a)(b-x)}{2n} \cdot g''(\xi_x), \quad \xi_x \in (a,b).$$

Nous allons étudier la méthode d'approximation suivante pour les fonctions continues definies sur $[0,1]$:

On divise $[0,1]$ en sous-intervalles $\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$, $k = 1, \ldots, m \in \mathbb{N}$. Sur $\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$ nous considérons

$$B_{n,k}(f;x) := B_n^{\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]}(f;x) = m^n \cdot \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} \left(x - \tfrac{k-1}{m}\right)^i \left(\tfrac{k}{m} - x\right)^{n-i} f\left(\tfrac{k-n+i}{m \cdot n}\right).$$

Maintenant nous composons les $B_{n,k}(f;\cdot)$ pour obtenir l'opérateur $\overline{B}_{n,m}$ defini par

$$\overline{B}_{n,m}(f;x) := B_{n,k}(f;x), \quad \text{si } x \in \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right], 1 \le k \le m.$$

Ceci nous donne une fonction polynômiale par morceaux de degré $\le n$, continue aux points $\frac{k}{m}, 1 \le k \le m-1$.

D'autre part, $\overline{B}_{n,m}$ est un operateur linéaire et positif réproduisant tous les fonctions linéaires. Ces faits sont impliqués par ceux de l'opérateur Bernstein classique (non-composé).

Les opérateus $\overline{B}_{n,m}$ constituent une généralisation de

- l'opérateur de Bernstein sur $[0,1]$ - le cas $m = 1, n \in \mathbb{N}$,
- l'interpolation linéaire par morceaux $S_{\Delta_m}$ sur $[0,1]$ et aux points

$$\Delta_m : 0 < \tfrac{1}{m} < \tfrac{2}{m} < \ldots < \tfrac{m-1}{m} < 1.$$

  - le cas $n = 1, m \in \mathbb{N}$.

Chaque $\overline{B}_{n,m}$ est un cas spécial des operateurs spline de Schoenberg ("variation-diminishing spline operator") associés à une suite de nœuds appropriée.

## 3. LE DEGRÉ D'APPROXIMATION PAR $\overline{B}_{n,m}$

Plusieurs des nos resultats ci-dessous seront formulés à l'aide du module de continuité d'ordre deux, donné pour une fonction $f \in C[a,b]$ et $\delta \geq 0$ par

$$\omega_2^{[a,b]}(f,\delta) := \sup \Big\{ \big| f(x-h) - 2f(x) + f(x+h) \big| : x+h, x-h \in [a,b], |h| \leq \delta \Big\}.$$

Nous allons aussi utilizer la convention $\omega_2 := \omega_2^{[0,1]}$.

Les deuxièmes moments $\overline{B}_{n,m}((e_1-x)^2;x)$, où $e_1(x) = x$, contrôlent le degré d'approximation. Pour $x \in \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$ on a

$$\overline{B}_{n,m}((e_1-x)^2;x) = \frac{\left(x-\frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-1\right)}{n}.$$

Maintenant nous utilisons le résultat suivant de Păltănea [5].

Théorème 1. *Si $L : C[0,1] \to C[0,1]$ est un operateur linéaire et positif reproduisant toutes les fonctions linéaires, alors pour tous $h > 0$ on a*

$$|L(f;x) - f(x)| \leq \left[1 + \tfrac{1}{2h^2} \cdot L((e_1-x)^2;x)\right] \omega_2(f;h).$$

*Si $L((e_1-x)^2;x) > 0$ le choix $h = \sqrt{L((e_1-x)^2;x)}$ implique*

$$|L(f;x) - f(x)| \leq \tfrac{3}{2} \cdot \omega_2\Big(f; \sqrt{L((e_1-x)^2;x)}\Big);$$

*cette inégalité est aussi valable si $L((e_1-x)^2;x) = 0$.*

Il en résulte l'inégalité suivante:

Proposition 1. *Pour $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in C[0,1]$ et $x \in [0,1]$ on a*

$$\left|\overline{B}_{n,m}(f;x) - f(x)\right| \leq \tfrac{3}{2}\omega_2\left(f; \sqrt{\frac{\left(x-\frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-x\right)}{n}}\right),$$

*pour $x \in \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$, $1 \leq k \leq m$.*

## 4. ITÉRATIONS DES $\overline{B}_{n,m}$

Considérons $\overline{B}_{n,m}^{\ell}$, lorsque $\ell \to \infty$, avec $n, m$ fixés. Il est bien connu que chaque constituant

$$B_{n,k} : C\left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right] \to \Pi_n\Big|_{\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

produit une suite d'itérations $(B_{n,k})^{\ell}$, $\ell \geq 0$, qui pour toutes $f \in C\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$ génére une suite de polynômes

$$(B_{n,k})^{\ell}(f)$$

qui approche, uniformement en $\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$, la fonction linéaire $\ell_k$ interpolant $f$ aux points $\frac{k-1}{m}$ et $\frac{k}{m}$, c'est-à-dire, $\ell_k = B_{1,k}(f)$. D'ici il en résulte que $(\overline{B}_{n,m})^{\ell}(f)$, $f \in C[0,1]$ converge uniformement vers $S_{\Delta_m}f$, l'interpolation linéaire par morceaux.

En utilisant la transformation $\ell : [0,1] \to [a,b]$ donnée par $\ell(x) = (b-a)x+a$, on peut écrire

$$\begin{aligned} B_n^{[a,b]}(f;x) &= \tfrac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(x-a)^k(b-x)^{n-k} f\left(a + k \cdot \tfrac{b-a}{n}\right) \\ &= B_n^{[0,1]}(f \circ \ell; y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} y^k (1-y)^{n-k} (f \circ \ell)\left(\tfrac{k}{n}\right), \quad \text{avec } \ y = \ell^{-1}(x) = \tfrac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Soit $r \in \mathbb{N}$, et considérons l'itération d'ordre $r$ de $B_n^{[a,b]}$, c'est à dire, $(B_n^{[a,b]})^r$. Nous utilisons le resultat suivant pour les itérations de $B_n = B_n^{[0,1]}$ donné par Gonska, Kacsó et Piţul dans l'article [2].

Proposition 2. *Soit $B_n, n \in \mathbb{N}$, la suite des opérateurs de Bernstein classiques. Pour $r \in \mathbb{N}, \overline{f} \in C[0,1]$ et $x \in [0,1]$ on a*

$$\left|B_n^r(\overline{f};x) - B_1(\overline{f};x)\right| \le \tfrac{9}{4} \cdot \omega_2\Big(\overline{f}, \sqrt{x(1-x)\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big).$$

Ceci implique immédiatement qu'on a, pour toutes $f \in C[a,b]$ et $x \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} &\left|\left(B_n^{[a,b]}\right)^r(f;x) - B_1^{[a,b]}(f;x)\right| = \\ &= \left|\left(B_n^{[0,1]}\right)^r\left(f \circ \ell; \ell^{-1}(x)\right) - B_1^{[0,1]}(f \circ \ell, \ell^{-1}(x))\right| \\ &\le \tfrac{9}{4} \cdot \omega_2^{[0,1]}\Big(f \circ \ell, \sqrt{\ell^{-1}(x)\left[1-\ell^{-1}(x)\right]\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big) \\ &= \tfrac{9}{4} \cdot \omega_2^{[0,1]}\Big(f \circ \ell, \sqrt{\tfrac{(x-a)}{(b-a)} \cdot \tfrac{(b-x)}{(b-a)} \cdot \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big) \\ &= \tfrac{9}{4} \cdot \omega_2^{[a,b]}\Big(f; (b-a)\sqrt{\tfrac{(x-a)(b-x)}{(b-a)^2} \cdot \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big) \\ &= \tfrac{9}{4} \cdot \omega_2^{[a,b]}\Big(f, \sqrt{(x-a)(b-x) \cdot \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big) \end{aligned}$$

Pour

$$[a,b] = \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right]$$

et $\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ considérons la fonction

$$f := \overline{f}\big|_{[a,b]} : \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right] \to \mathbb{R}.$$

Alors on en déduit

$$\begin{aligned} &\left|\left(\overline{B}_{n,m}\right)^r(\overline{f};x) - S_{\Delta_m}(\overline{f};x)\right| \le \\ &\le \tfrac{9}{4}\omega_2^{\left[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}\right]}\Big(\overline{f}\big|_{\left[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}\right]}, \sqrt{\left(x-\tfrac{k-1}{m}\right)\left(\tfrac{k}{m}-x\right)\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big) \\ &= \tfrac{9}{4}\omega_2^{\left[\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}\right]}\left(\overline{f}, \sqrt{\ldots}\right) \le \end{aligned}$$

$$\le \tfrac{9}{4}\omega_2^{[0,1]}\Big(\overline{f}, \sqrt{\left(x-\tfrac{k-1}{m}\right)\left(\tfrac{k}{m}-x\right)\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big), \quad \text{si } x \in \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right], 1 \le k \le m.$$

Donc nous avons

PROPOSITION 3. *Pour l'itération d'ordre $r$ de l'opérateur $\overline{B}_{m,m}$, $\overline{f} \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ on a l'inégalité*

$$\left|\left(\overline{B}_{n,m}\right)^r(\overline{f},x) - S_{\Delta_m}(\overline{f},x)\right| \le$$
$$\le \tfrac{9}{4}\omega_2^{[0,1]}\Big(\overline{f}, \sqrt{\left(x-\tfrac{k-1}{m}\right)\left(\tfrac{k}{m}-x\right)\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big), \quad x \in \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right], 1 \le k \le m.$$

*Pour la norme uniforme il en résulte*

$$\left\|(\overline{B}_{n,m})^r(\overline{f}) - S_{\Delta_m}(\overline{f})\right\|_\infty \le \tfrac{9}{4}\omega_2^{[0,1]}\Big(\overline{f}; \tfrac{1}{2m}\sqrt{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^r}\Big),$$

*c'est à dire la convergence uniforme $(\overline{B}_{n,m})^r(\overline{f}) \to S_{\Delta_m}(\overline{f})$ pour $n, m$ fixés et $r \to \infty$.*

### 5. NON-MULTIPLICATIVITÉ DE $\overline{B}_{n,m}$

Dans cette section nous démontrons une ínegalité de type Tchebycheff-Grüss. Nous allons utiliser l'inégalité generale suivante publiée en [4].

PROPOSITION 4. *Si $H : C[0,1] \to C[0,1]$ est un opérateur linéaire et positif reproduisant les fonctions constantes, alors pour toutes $f, g \in C[0,1]$ et $x \in [0,1]$ on a:*

$$\begin{aligned} T(f,g;x) &:= \left|H(f,g;x) - H(f;x)\cdot H(g;x)\right| \\ &\le \tfrac{1}{4}\widetilde{\omega}\big(f; 2\sqrt{H((e_1-x)^2;x)}\big)\cdot \widetilde{\omega}\big(g; 2\sqrt{H((e_1-x)^2;x)}\big). \end{aligned}$$

*Pour $t \in [0,\infty)$ la quantité*

$$\omega(f;t) = \sup\left\{|f(x)-f(y)| : |x-y| \le t\right\}$$

*est le module de continuité d'ordre un, et le plus petit majorant concave du module est donné par*

$$\widetilde{\omega}(f;t) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{0\le x\le t\le y\le 1\\ x\ne y}} \frac{(t-x)\omega(f,y)+(y-t)\omega(f,x)}{y-x}, & 0 \le t \le 1,\\ \omega(f,1), & t > 1.\end{cases}$$

En substituant dans l'inégalité la représentation des moments d'ordre deux de $\overline{B}_{n,m}$ on obtient

PROPOSITION 5. *Pour $f, g \in C[0,1]$ et $x \in [0,1]$ l'inégalité suivante de type Grüss est valable:*

$$\left|\overline{B}_{n,m}(f\cdot g;x) - \overline{B}_{n,m}(f;x)\overline{B}_{n,m}(g;x)\right| \le$$
$$\le \tfrac{1}{4}\widetilde{\omega}\left(f; 2\sqrt{\tfrac{\left(x-\frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-x\right)}{n}}\right)\widetilde{\omega}\left(g; 2\sqrt{\tfrac{\left(x-\frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-x\right)}{n}}\right), \quad \text{si } x \in \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right].$$

Remarquons que l' inégalité au dessus refléte le fait que $\overline{B}_{n,m}$ interpole aux points $\frac{k}{m}$, $0 \leq k \leq m$.

## 6. SUR LA FORMULE DE QUADRATURE BASÉE SUR $\overline{B}_{n,m}$

La formule de quadrature introduite par Bărbosu et Miclăuş est donnée par

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{m} \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} f(x)\mathrm{d}x \\ &\approx \sum_{k=1}^{m} \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} B_{n,k}(f;x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \overline{B}_{n,m}(f;x)\mathrm{d}x =: I_{n,m}(f).\end{aligned}$$

Théorème 2. *Pour la formule de quadrature au-dessus on a*

$$I_{m,n}(f) = \tfrac{1}{m(n+1)} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{n} f\left(\tfrac{kn-n+i}{m+n}\right).$$

*Démonstration.* Soit $k$ fixé. On peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} B_{n,k}(f;x)\mathrm{d}x &= m^n \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} f\left(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\right) \int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} \left(x - \tfrac{k-1}{m}\right)^i \left(\tfrac{k}{m} - x\right)^{n-i} \mathrm{d}x \\ &= m^n \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} f\left(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\right) \int_0^1 \left(\tfrac{i}{m}\right) \left[\tfrac{1}{m}(1-t)\right]^{n-i} \tfrac{1}{m}\mathrm{d}t \\ &= \tfrac{1}{m} \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} \int_0^1 t^i(1-t)^{n-i}\mathrm{d}t \cdot f\left(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\right) \\ &= \tfrac{1}{m} \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} B(i+1, n-i+1) \cdot f\left(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\right) \\ &= \tfrac{1}{m} \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} \tfrac{1}{n+1} \tbinom{n}{i}^{-1} f\left(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\right) \\ &= \tfrac{1}{m(n+1)} \sum_{i=0}^{n} f\left(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\right).\end{aligned}$$

Une sommation pour toutes les valeurs de $k$ donne la répresentation desirée. □

Le résultat suivant est une amélioration significative du Theorem 2.2 de [1].

Théorème 3. *Pour* $g \in C^2[0,1]$ *on a*

$$\left| \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x - I_{m,n}(g) \right| \leq \tfrac{1}{12m^2 n} \cdot \|g''\|_\infty .$$

*Démonstration.* La preuve résulte des (in)égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 g(x) - I_{m,n}(g)\right| = \\
&= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} g(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\tfrac{1}{m(n+1)}\sum_{i=0}^{n} g\left(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\right)}_{=\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} B_{n,k}(g;x)\mathrm{d}x}\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} [g(x) - B_{n,k}(g;x)|\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{m}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} -\tfrac{\left(x-\frac{k-1}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-y\right)}{2n} g''(\xi_{x,k})\mathrm{d}x\right|, \quad \xi_{x,k}\in\left(\tfrac{k-1}{m},\tfrac{k}{m}\right) \\
&\le \tfrac{1}{2n}||g''||_\infty \sum_{k=1}^{m}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}}\left(x-\tfrac{k-1}{m}\right)\left(\tfrac{k}{m}-x\right)\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2n}||g''||_\infty \sum_{k=1}^{m}\tfrac{1}{m}\int_0^1 \tfrac{t}{m}\cdot\tfrac{1-t}{m}\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{2n\cdot m^2}||g''||_\infty\cdot\int_0^1 t(1-t)\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{12nm^2}||g''||_\infty.
\end{aligned}$$

□

Dans le théorème suivant nous utilisons la fonctionnelle $K$ definie par

$$K\left(\delta, f; C^0[0,1], C^2[0,1]\right) := \inf\Big\{||f-g||_\infty + \delta||g''||_\infty : g\in C^2[0,1]\Big\}, \delta\ge 0.$$

THÉORÈME 4. *Pour* $f\in C[0,1]$ *et pour* $m,n\ge 1$ *on a*

(i) $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - I_{m,n}(f)\right| \le 2K\Big(\frac{1}{24m^2n}, f; C^0[0,1], C^2[0,1]\Big)$;

(ii) $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - I_{m,n}(f)\right| \le \frac{9}{4}\omega_2\Big(f; \frac{1}{m\sqrt{6n}}\Big)$.

*Démonstration.* Pour chaque $f\in C[0,1]$ on a

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - I_{m,n}(f)\right| \le ||f||_\infty + \tfrac{1}{m(n+1)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n}||f||_\infty = 2||f||_\infty.$$

Alors, quelle que soit $g \in C^2[0,1]$, nous deduisons, en notant $H(f) := \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - I_{m,n}(f)$, que

$$\begin{aligned}|H(f)| &= |H(f-g+g)| \\ &\leq |H(f-g)| + |H(g)| \\ &\leq 2||f-g||_\infty + \tfrac{1}{12nm^2}||g''||_\infty.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}|H(f)| &\leq 2 \cdot \inf\left\{||f-g||_\infty + \tfrac{1}{24nm^2}||g''||_\infty : g \in C^2[0,1]\right\} \\ &= 2 \cdot K\left(\tfrac{1}{24m^2n}, f; C^0[0,1], C^2[0,1]\right).\end{aligned}$$

□

Pour démontrer (ii) nous citons le Théorème 4.2 de Gonska et Kovacheva [3].

Théorème 5. *Soit* $(B, ||\cdot||_B)$ *un éspace de Banach , et soit* $H : C[a,b] \to B$ *un operator (pas nécessairement linéaire, pas nécessairement positif) satisfaisant les conditions suivantes avec des constantes* $\gamma, \alpha, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \geq 0$ *indépendantes de* $f$ *et* $g$*:*

a) $||H(f+g)||_B \leq \gamma\{||Hf||_B + ||Hg||_B\}$, *pour toute* $f \in C[a,b]$,
b) $||Hf||_B \leq \alpha ||f||_\infty$, *pour toute* $f \in C[a,b]$;
c) $||Hg||_B \leq \beta_0||g||_\infty + \beta_1||g'||_\infty + \beta_2||g''||_\infty$, *pour toute* $g \in C^2[a,b]$.

*Alors, quelque soit* $f \in C[a,b], 0 < h \leq \frac{b-a}{2}$, *nous avons*

$$||Hf||_B \leq \gamma\left\{\beta_0||f||_\infty + \tfrac{2\beta_1}{h}\omega_1(f;h) + \tfrac{3}{4}\big(\alpha + \beta_0 + \tfrac{2\beta_1}{h} + \tfrac{2\beta_2}{h^2}\big)\omega_2(f;h)\right\}.$$

Dans le cas présent nous prenons

$$C[a,b] = C[0,1], B = \mathbb{R},$$

$$\gamma = 1, \alpha = 2, \beta_0 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = \tfrac{1}{12m^2n}.$$

On obtient, pour $0 < h \leq \frac{1}{2}$,

$$|H(f)| \leq \tfrac{3}{4}\left(2 + \tfrac{1}{h^2} \cdot \tfrac{1}{6m^2n}\right)\omega_2(f,h).$$

En choisissant $h = \frac{1}{\sqrt{6m^2n}}$ nous arrivons à (ii). □

### 7. NON-MULTIPLICATIVITÉ DE LA FORMULE DE QUADRATURE

Considerons maintenant de nouveau la formule de quadrature

$$I_{n,m}(f) = \int_0^1 \overline{B}_{n,m}(f;x)\mathrm{d}x.$$

Ici, notre but est de donner une borne supérieure pour la quantité

$$|T(f,g)| := \left|I_{n,m}(f\cdot g) - I_{n,m}(f)I_{n,m}(g)\right|.$$

À cette fin, nous utilisons de nouveau le majorant concave $\widetilde{\omega}$ et le resultat suivant de [4], Th. 3.1.

PROPOSITION 6. *Si $L : C[0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle linéaire et positive satisfaisant $L(e_0) = 1$, alors pour toutes $f, g \in C[0,1]$ nous avons*

$$|T(f,g)| \leq \tfrac{1}{4}\widetilde{\omega}\big(f; 2\sqrt{T(e_1,e_1)}\big)\widetilde{\omega}\big(g; 2\sqrt{T(e_1,e_1)}\big).$$

*Ici,*

$$T(e_1, e_1) = L(e_2) - [L(e_1)]^2.$$

La proposition ci-dessus conduit à

PROPOSITION 7.

$$\big|I_{n,m}(f\cdot g) - I_{n,m}(f)I_{n,m}(g)\big| \leq \tfrac{1}{4}\widetilde{\omega}\Big(f; 2\sqrt{\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6m^2n}}\Big)\widetilde{\omega}\Big(g; 2\sqrt{\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6m^2n}}\Big).$$

*Démonstration.* Il suffit de calculer

$$\begin{aligned} T(e_1,e_1) &= I_{n,m}(e_2) - [I_{n,m}(e_1)]^2 \\ &= \int_0^1 \overline{B}_{n,m}(e_2;x)\mathrm{d}x - \left[\int_0^1 \overline{B}_{n,m}(e_1;x)\mathrm{d}x\right]^2 \\ &= \int_0^1 \overline{B}_{n,m}(e_2;x)\mathrm{d}x - \tfrac{1}{4} \\ &= -\tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{m}\int_{\frac{k-1}{m}}^{\frac{k}{m}} B_{n,k}(e_2;x)\mathrm{d}x \\ &= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{m(n+1)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n}\big(\tfrac{kn-n+i}{m\cdot n}\big)^2 \\ &= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{m^3n^2(n+1)}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=0}^{n}(kn-n+i)^2 \\ &= \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{6m^2n}. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 1. *Pour $n, m \to \infty$ nous obtenons*

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^1 (f\cdot g)(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right| = \\ &= \left|\lim_{n,m\to\infty}\left\{\int_0^1 \overline{B}_{n,m}(f\cdot g;x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \overline{B}_{n,m}(f;x)\mathrm{d}x\int_0^1 \overline{B}_{n,m}(g;x)\mathrm{d}x\right\}\hat{E}\right| \\ &\leq \lim_{n,m\to\infty}\tfrac{1}{4}\widetilde{\omega}\Big(f; 2\sqrt{\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6m^2n}}\Big)\widetilde{\omega}\Big(g; 2\sqrt{\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{6m^2n}}\Big) \\ &= \tfrac{1}{4}\widetilde{\omega}\big(f; \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big)\widetilde{\omega}\big(g; \tfrac{1}{\sqrt{3}}\big). \end{aligned}$$

□

*Remarquons qu'il s'agit d'une inégalité de type Tchebycheff-Grüss pour la fonctionnelle d'intégration où la constante $\frac{1}{12}$ est la meilleure possible.*

Remerciement. Les auteurs remercient chaleuresement Mme Birgit Dunkel pour la réalisation de ce manuscrit. On remercie aussi M. Catalin Badea pour quelques corréctions linguistiques.

## REFERENCES

[1] D. Bărbosu and D. Miclăuş, *On the composite Bernstein type quadrature formula*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., **39** (2010) no. 1, pp. 3–7.

[2] H. Gonska, D. Kacsó and P. Piţul, *The degree of convergence of over-iterated positive linear operators*, J. Appl. Funct. Anal., **1** (2006) no. 4, pp. 403–423.

[3] H.H. Gonska and R.K. Kovacheva *The second order modulus revisited: remarks, applications, problems*, Confer. Sem. Mat. Univ. Bari, **32** (1994) no. 257, pp. (1995).

[4] H. Gonska, I. Raşa and M.-D.Rusu, *Čebyšev-Grüss-type inequalities revisited*, Math. Slovaca, **63** (2013) no. 5, 1007–1024.

[5] R. Păltănea, *Approximation Theory using Positive Linear Operators*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

Received by the editors: December 11, 2013.