JOURNAL OF NUMERICAL ANALYSIS AND APPROXIMATION THEORY
J. Numer. Anal. Approx. Theory, vol. 44 (2015) no. 1, pp. 62–68
ictp.acad.ro/jnaat

SÄTZE VOM BOHMAN-KOROVKIN-TYP FÜR LOKALKONVEXE VEKTORVERBÄNDE

HEINER GONSKA*

Dedicated to prof. Ion Păvăloiu on the occasion of his 75th anniversary.

Abstract. Zwei Sätze vom Korovkin-Typ werden angegeben, die durch eine Arbeit von Scheffold inspiriert sind. Diese betreffen die Approximation eines stetigen Verbandshomomorphismus durch eine Folge gewisser positiver linearer Operatoren. Als Anwendung ergibt sich die Verallgemeinerung eines Satzes von Müller über die Approximation in Banachschen Funktionenräumen.

Abstract. Two Korovkin-type theorems inspired by the work of Scheffold are given concerning the approximation of a continuous lattice homomorphism P by a sequence of certain positive linear operators T_n. The first result is used to prove a generalization of a proposition of Müller dealing with approximation in Banach function spaces.

MSC 2010. 46A32, 46A40, 41A36, 41A65.
Keywords. Korovkin-type theorem, approximation of lattice homomorphisms, positive linear operators, Banach function spaces.

1. EINLEITUNG

Wir betrachten das Schema

$$C(X) \xrightarrow[P]{T_n} F.$$

Hierin bezeichnet $C(X)$ den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum X und F einen lokalkompakten Vektorverband.

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne eine Folge positiver linearer Abbildungen und P einen Verbandshomomorphismus. In dieser Situation gilt der folgende Satz, der eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Berens und Lorentz [1] darstellt.

Satz A. *Sei F ein lokalkonvexer Vektorverband und $P : C(X) \to F$ ein Verbandshomomorphimus. Ist S eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion g^* enthält und gilt für eine Folge positiver Abbildungen T_n : $C(X) \to F$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$T_n g \to Pg \;\; in \;\; F \;\; für\ alle \;\; g \in G = \operatorname{lin} S,$$

*University of Duisburg-Essen, Faculty of Mathematics, D-47048 Duisburg, Germany, e-mail: heiner.gonska@uni-due.de.

so folgt

$$T_n g \to Pg \;\; \textit{in} \;\; F \;\; \textit{für alle} \;\; f \in \hat{G}_{\operatorname{supp} P}.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\operatorname{supp} P} \;\; = \;\; \{ & f \in C(X) : \mu(f) = f(x) \;\text{ für alle }\; x \in \operatorname{supp} P \\ & \text{und alle positiven Linearformen }\; \mu \;\text{ mit }\; \mu(g) = g(x) \\ & \text{für alle }\; g \in G \} \end{aligned}$$

der Fortsetzungsraum bzgl. $\operatorname{supp} P$ und G. Für einen Beweis siehe [2, Theorem 3.1]. Hieraus ergibt sich unmittelbar

SATZ B. *Es sei F ein lokalkonvexer Vektorverband und $P : C(X) \to F$ ein Verbandshomomorphismus. Ist S eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion g^* enthält und $G = \operatorname{lin} S$, so gilt*

$$\hat{G}_{\operatorname{supp} P} \subset \rho(S, F, P).$$

Hierzu bezeichnet $\rho(S, F, P)$ den Schatten von S bzgl. $L^+(C(X), F)$ - der Menge aller positiven linearen Abbildungen von $C(X)$ nach F - und P, d.h.

$$\begin{aligned} \rho(S, F, P) \;\; = \;\; \{ & f \in C(X) : \;\; \textit{Ist} \;\; (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^+(C(X)F) \;\; \textit{mit} \;\; T_n g \to Pg \\ & \textit{für alle} \;\; g \in S, \;\; \textit{so folgt} \;\; T_n f \to Pf \}. \end{aligned}$$

2. ERGEBNISSE

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung eines Satzes von SCHEFFOLD [4].

THEOREM 1. *Es sei E ein topologischer Vektorraum und ein Vektorverband und F ein lokalkonvexer Vektorverband, X sei eine kompakte Menge und $T : C(X) \to E$ ein Verbandshomomorphismus. Es sei $T_n : E \to F$ eine gleichstetige Folge positiver linearer Abbildungen und $P : E \to F$ ein stetiger Verbandshomomorphismus. Es sei S eine Teilmenge von $C(X)$, die eine strikt positive Funktion $g*$ enthält und $G = \operatorname{lin} S$.*

Es gelte

$$T_n(Tg) \to P(Tg) \;\; \hat{\text{E}}\textit{in} \;\; F \;\; \textit{für alle} \;\; g \in S.$$

Dann folgt

$$T_n(\overline{f}) \to P(\overline{f}) \;\; \textit{in} \;\; F \;\; \textit{für alle} \;\; \overline{f} \in \overline{T(\hat{G}_{\operatorname{supp} P \circ T})}^{E}.$$

Beweis. $(T_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge positiver linearer Abbildungen mit

$$T_n \circ T : C(X) \to F.$$

$P \circ T : C(X) \to F$ ist ein Verbandshomomorphismus.

Nach Satz B gilt

$$\hat{G}_{\operatorname{supp} P \circ T} \subset \rho(S, F, P \circ T).$$

Aus

$$T_n \circ T(g) \to P \circ T(g) \;\; \text{in} \;\; F \;\; \text{für alle} \;\; g \in S,$$

folgt also

$$T_n \circ T(h) \to P \circ T(h) \;\; \text{in} \;\; F \;\; \text{für alle} \;\; h \in \hat{G}_{\operatorname{supp} P \circ T},$$

also

$$T_n(f) \to P(f) \text{ in } F \text{ für alle } f \in T(\hat{G}_{\operatorname{supp} P\circ T}).$$

Sei nun $\overline{f} \in \overline{T(\hat{G}_{\operatorname{supp} P\circ T})}^E$ und U eine beliebige Nullumgebung in F. Dann existiert eine Nullumgebung W in F mit

$$W + W + W \subset U.$$

Wegen der Gleichstetigkeit der Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Umgebung V in E mit $T_n(V) \subset W$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen der Stetigkeit von P eine Umgebung V' mit $P(V') \subset W$. Es sei nun $h \in \hat{G}_{\operatorname{supp} P\circ T}$ so gewählt, dass $\overline{f} - T(h) \in V \cap V'$ ist. Für $n \geq N_0$ ist dann

$$T_n \circ T(h) - P \circ T(h) \in W,$$

und insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{ccccccccc} T_n\overline{f} - P\overline{f} & = & T_n\overline{f} - T_n \circ T(h) & + & T_n \circ T(h) - P \circ T(h) & + & P \circ T(h) - P\overline{f} & & \\ & \in & W & + & W & + & W & \subset U \end{array}$$

für alle $n \geq N_0$. □

Bemerkung. Scheffold [4] hat Theorem 1 für einen lokalkonvexen Vektorverband E und einen injektiven Verbandshomomorphimus $T : C(X) \to E$ mit völlig anderen Mitteln bewiesen. Statt von Konvergenz auf dem Abschluss des Bildes eines Fortsetzungsraumes zu sprechen, verwendet Scheffold die Terminologie des relativen Choquetrandes. □

Nach Theorem 1 sind natürlich solche Vektorverbände und topologische Vektorräume E von Interesse, in die ein Raum $C(X)$ vermöge einer natürlichen Inklusion eingebettet ist und für die gilt $\overline{i(C(X))}^E = E$. Eine Klasse solcher Räume bilden sogenannte Banachsche Funktionenräume. Dazu die

Definition 2 (Müller, [3]). *Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $M(K)$ der Vektorraum der auf K definierten reellwertigen (Lebesgue-)meßbaren Funktionen modulo des zugehörigen Nullraumes N. Ein Banach-Raum $(B(K), \| \circ \|_B)$ bestehend aus Elementen von $M(K)$ heißt ein Banachscher Funktionenraum genau dann, wenn seine Norm den folgenden Bedingungen genügt:*

- (N1) *Ist $g \in M(K)$ und $f \in B(K)$ mit $|g| \leq |f|$, so folgt: $g \in B(K)$ und $\|g\|_B \leq \|f\|_B$.*
- (N2) *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $B(K)$ und $0 \leq f_n \nearrow f$ mit $f \in B(K)$, so folgt: $\|f_n\|_B \to \|f\|_B$.*
- (N3) *$\|f\|_B$ ist umordnungsinvariant für alle $f \in B(K)$, d.h.: Ist $f = f'$ λ-fast überall, so ist $f' \in B(K)$ und $\|f\|_B = \|f'\|_B$.*

Beispiel. (Müller) [3] Der Raum $L^p(K)$, $1 \leq p < \infty$ ist ein Banachscher Funktionenraum. □

Für Banachsche Funktionenräume, die den Raum $C(K)$ enthalten, gilt der

Satz 3. (Müller) [3] *Ist $K \subset \mathbb{R}$ und $B(K)$ ein Banachscher Funktionenraum, der den Raum $C(K)$ enthält, so ist $C(K)$ dicht in $B(K)$.*

Um Theorem 1 anwenden zu können, benötigen wir noch

Lemma 4. *Ein Banachscher Funktionenraum $B(K)$ ist ein Banachverband.*

Beweis. Es seien f und $g \in B(K)$. Dann ist $\sup(f,g) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$. Wegen (N1) sind $|f|, |g| \in B(K)$ und wegen $|f-g| \leq |f| + |g|$ ist auch $|f-g| \in B(K)$ und damit auch $\sup(f,g)$. Da $\inf(f,g) = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}$ gilt, folgt, dass auch $\inf(f,g) \in B(K)$ ist. $B(K)$ ist also ein Vektorverband.

Eine Nullumgebungsbasis in $B(K)$ bilden die Normkugeln $K(0,\epsilon) = \{f \in B(K) : \|f\|_B \leq \epsilon\}$. Ist nun $g \in B(K)$ mit $|g| \leq |f|$ und $\|f\|_B \leq \epsilon$, so folgt mit (N1), dass $\|g\|_B \leq \|f\|_B \leq \epsilon$, also $g \in K(0,\epsilon)$ ist. Dies bedeutet aber, dass $K(0,\epsilon)$ solide ist, und der Banachraum und Vektorverband $B(K)$ besitzt eine Nullumgebungsbasis aus soliden Mengen. $B(K)$ ist also ein Banachverband. □

Wir beweisen nun eine Verallgemeinerung eines Satzes von Müller (Müller, [3]).

Satz 5. *Es sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $B(K)$ ein Banachscher Funktionenraum, der den Raum $C(K)$ enthält. Es sei S eine Teilmenge von $C(K)$, die eine strikt positive Funktion g^* enthält und $G = \operatorname{lin} S$. Es gelte $\hat{G}_K = C(K)$. Es sei $T_n : B(K) \to B(K)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge positiver linearer Operatoren mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n g - g\|_B = 0 \ \textit{für alle} \ g \in S.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n f - f\|_B = 0 \ \textit{für allef} \in B(K).$$

Beweis. Die Injektion $i : C(K) \ni f \mapsto f \in B(K)$ ist ein Verbandshomomorphismus. Wegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$ ist die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichstetig. Die Identität $I : B(K) \ni f \mapsto f \in B(K)$ ist ein stetiger Verbandshomomorphismus.

Mit Theorem 1 folgt also

$$T_n f \to If \ \text{ in } \ B(K) \ \text{Êfür alle } \ f \in \overline{i(\hat{G}_{\text{supp } I\circ i})}^{B(K)}.$$

Nun ist

$$i(\hat{G}_{\text{supp } I\circ i}) \supset i(\hat{G}_K) = i(C(K)) = C(K),$$

also

$$\overline{i(\hat{G}_{\text{supp } I\circ i})}^{B(K)} = \overline{C(K)}^{B(K)} = B(K).$$ □

Mit Satz 5 ist es nun etwa möglich, den folgenden Approximationsprozess im Banachschen Funktionenraum $L^1[a,b]$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, auf Konvergenz gegen die Identität zu testen.

Beispiel 6. Für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1[a,b]$ sei

$$T_n(f,x) := \tfrac{1}{b-a} \circ \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \circ \int_a^b \left(1 - (\tfrac{t-x}{b-a})^2\right)^n \circ f(t)dt.$$

Darin heißt

$$K_n(t,x) := \tfrac{1}{b-a} \circ \sqrt{\tfrac{n}{\pi}} \circ \left(1 - (\tfrac{t-x}{b-a})^2\right)^n$$

Landau-Stieltjes-Kern.

T_n ist für alle $n \in \mathbb{N}$ linear und positiv, und für alle $f \in L^1[a,b]$ ist $T_n f \in \Pi_{2n} \subset L^1[a,b]$. Wie Müller [3] zeigt, sind die Normen der T_n gleichmäßig beschränkt und für $0 \le i \le 2$ gilt $T_n \pi_i \to \pi_i$ in $L^1[a,b]$. Für $G = \mathrm{lin}\{\pi_0, \pi_1, \pi_2\}$ gilt $\hat{G}_K = C(K)$, so dass mit Satz 5 nun

$$T_n f \to f \ \text{ in } \ L^1[a,b] \ \text{ für alle } \ f \in L^1[a,b]$$

folgt. □

Wir betrachten nun die spezielle Klasse lokalkonvexer Vektorverbände E, die folgenvollständig sind und im positiven Kegel einen quasiinneren Punkt besitzen. Es gilt folgendes

Theorem 7 (vgl. Scheffold [4]). *Es sei E ein lokalkonvexer, folgenvollständiger Vektorverband, $u \in E$ ein quasiinnerer Punkt des positiven Kegels E^+ von E und $\{u_i, i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von E mit*

$$\{u_i, i \in I\} \subset E_u = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : |x| \le n \circ u\}.$$

Dann gilt:

(i) *Es gibt einen kompakten Raum X und einen surjektiven Verbandsisomorphismus $T : C(X) \to E_u$.*

(ii) *Setzt man $u_i^{(2)} := T((T^{-1}(u_i))^2)$, so gilt: Ist F ein beliebiger lokalkonvexer Vektorverband, $P : E \to F$ ein stetiger Verbandshomomorphismus und $T_n : E \to F$, $n \in \mathbb{N}$, eine gleichstetige Folge positiver linearer Abbildungen mit*

$$T_n v \to P v \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ v \in \{u\} \cup \{u_i, u_i^{(2)}; i \in I\},$$

so folgt

$$T_n f \to P f \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ f \in E.$$

(iii) *Wird E von k Elementen erzeugt, so kann die Kovnergenz einer Folge gleichstetiger positiver linearer Abbildungen gegen einen stetigen Verbandshomomorphismus auf einer höchstens $(2k+1)$-elementigen Menge getestet werden.*

Beweis. Nach Definition des quasiinneren Punktes u ist das Vektorverbandsideal $E_u = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in E : |x| \le n \circ u\}$ dicht in E. Damit existieren also ein kompakter Hausdorffraum X und ein surjektiver Verbandsisomorphismus $T : C(X) \to E_u$ mit $T1_X = u$. Also gilt die Aussage (i).

Wir betrachten nun

$$Q := \{T^{-1}(u) = 1_X\} \cup \{T^{-1}(u_i); i \in I\} \cup \{(T^{-1}(u_i))^2; i \in I\} \subset C(X).$$

Der von dieser Teilmenge erzeugte Unterraum G von $C(X)$ besitzt die Eigenschaft, dass

$$\overline{\mathfrak{A}(Q)}^{C(X)} \subset \hat{G}_X \subset C(X).$$

Hierbei bezeichnet $\overline{\mathfrak{A}(Q)}^{C(X)}$ die kleinste abgeschlossene Teilalgebra, die Q enthält. Nun ist $\{u_i; i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von E, also auch von E_u. Diese Sprechweise ist sinnvoll, weil E_u selbst ein lokalkonvexer Vektorverband ist.

$\{T^{-1}(u_i); i \in I\} \subset \overline{\mathfrak{A}(Q)}$ ist also ein Erzeugendensystem des lokalkonvexen Vektorverbandes $C(X)$. Damit ist die abgeschlossene Algebra $\overline{\mathfrak{A}(Q)}$ ein abgeschlossener Vektorunterverband von $C(X)$, der ein Erzeugendensystem von $C(X)$ enthält, also gilt

$$C(X) \subset \overline{\mathfrak{A}(Q)} \subset \hat{G}_X \subset C(X)$$

und damit

$$\hat{G}_X = C(X),$$

also

$$T(Q) \subset E_u = T(C(X)) = T(\hat{G}_X).$$

Nach Voraussetzung gilt weiter

$$E = \overline{E_u}^E = \overline{T(\hat{G}_X)}^E.$$

Ist nun $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichstetige Folge positiver linearer Abbildungen und $P : E \to F$ ein stetiger Verbandshomomorphismus mit

$$T_n v \to Pv \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ v \in \{u\} \cup \{u_i, u_i^{(2)}; i \in I\},$$

so bedeutet dies ja

$$T_n \circ T(q) \to P \circ T(q) \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ q \in Q.$$

Q enthält 1_X, also folgt mit Theorem 1:

$$T_n f \to Pf \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ f \in \overline{T(\hat{G}_{\text{supp } P\circ T})}^E.$$

Wegen

$$E = \overline{T(C(X))}^E \supset \overline{T(\hat{G}_{\text{supp } P\circ T})}^E \supset \overline{T(\hat{G}_X)}^E = E$$

folgt also

$$T_n f \to Pf \ \text{ in } \ F \ \text{ für alle } \ f \in E.$$

Also gilt die Aussage (ii).

Die Behauptung (iii) ergibt sich nun sofort aus (ii). □

Bemerkung. Endlich erzeugte, folgenvollständige lokal-konvexe. Vektorverbände E sind insbesondere Gegenstand der Untersuchungen von WOLFF [6, 7]. Als besonders interessant erweist es sich hier, dass in dieser Situation E automatisch einen quasiinneren Punkt u enthält. Ist etwa $A = \{u_1, \ldots, u_k\}$ ein Erzeugendensystem von E (d.h. E ist der kleinste abgeschlossene Vektorunterverband, der A enthält), so setze man $u := \sum_{i=1}^{k} |u_i|$. Dann ist u ein quasiinnerer Punkt des positiven Kegels E^+ von E, d.h. E_u ist dicht in E. E_u ist ja ein A enthaltender Vektorunterverband von E.

Es gelingt Wolff [5], endlich erzeugte Banachverbände vollständig zu charakterisieren und als gewisse Funktionenräume (sogenannte Banach-Funktionenverbände) über geeigneten kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, darzustellen.
Im Spezialfall sogenannter minimaler und separabler Banachverbände gelingt es dabei sogar, auf ein Erzeugendensystem von nur zwei Elementen zu schließen.

REFERENCES

[1] H. Berens, und G.G. Lorentz, *Theorem of Korovkin Type for Positive Linear Operators on Banach Lattices*, Approximation Theory, G.G. Lorentz, Ed., New York - London: Academic Press, (1973), pp. 1–30.

[2] H. Gonska, *Konvergenzsätze von Bohman-Korovkin-Typ für positive lineare Operatoren*, Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 1975.

[3] M.W. Müller, *Sätze vom Bohman-Korowkin-Typ für Banachsche Funktionenräume*, Linear Operators and Approximation, P.L. Butzer, J.-P. Kahane und B.Sz.-Nagy, Ed., Basel-Stuttgart: Birkhäuser, (1972), pp. 292–299.

[4] E. Scheffold, *Ein allgemeiner Korovkin-Satz für lokalkonvexe Vektorverbände*, Math. Z., **132** (1973), pp. 209–214.

[5] M. Wolff, *Darstellung von Banach-Verbänden und Sätze vom Korovkin-Typ*, Math. Ann., **200** (1973), pp. 47–67.

[6] M. Wolff, *Über Korovkin-Sätze in lokalkonvexen Vektorverbänden*, Math. Ann, **204** (1973), pp. 44–56.

[7] M. Wolff, *A General Theorem of Korovkin Type for Vector Lattices*, Approximation Theory, G.G. Lorentz, Ed., New York - London: Academic Press, (1973), pp. 517–521.

Received by the editors: March 6, 2015.